Ⅲ　自然は知っているか？

1.　黄金比は美しい？

自然の中に数学が潜んでいて，自然は数学を「知っている」，なぜか自然は数学に「支配されている」というようなことを読んだり，見たり，習ったりしてことはないだろうか？

ここでは，そのようなことについて考察していく。

［課題 13］

次の Web ページは，日本テレビ(NTV)の「世界一受けたい授業」で行われた授業の，復習コーナーである。この内容について，グループで議論して疑問や意見をまとめよ。

今回のホニャララ授業復習コーナー

■問題の答え　（1/1ページ）

Q 自然の中にはある数字が多く潜んでいます。

フィボナッチ数列の法則に従ったひまわりの種の右回りの渦の数と左回りの渦の数の比率は、だいたい1：1.618になり、この比率は**「黄金比」**とも呼ばれ、様々なところに登場します。
自然の中は**「1：1.618」の黄金比**が潜んでいます。

例えばオウム貝。
この貝は、半分に切ると中身は画像のようになっています。この画像のように向かい合った次の辺と長さを比べると、黄金比になっています。

さらにみなさんが目にする美しいと思われるものには、黄金比が潜んでいる事があります。

例えば、モナリザ。モナリザの顔は、顔の輪郭に沿って接線を引く、そしてそのたてと横の直線の長さ。
ミロのビーナスは、頭からおへそ・おへそからつま先までの長さ。

ほかに日常にも黄金比が多く見られます。名刺、タバコの箱、新書、クレジットカードなどもその一例です。

☒とじる

http://www.ntv.co.jp/sekaju/student/20050528/02_0301.html

［貴方・グループの疑問・意見］

テレビで 2005 年 5 月 28 日に放映された「世界一受けたい授業」の中には，次のような間違いがある。

[1]　オウム貝

出演した著名な数学者の秋山仁が持っているのは「オウムガイ」であり，これは貝ではなく，頭足類(イカやタコの仲間)である。流石に画面のテロップは正しく表記されているが，Web 上では間違っている。この間違いは非常に多い。

[2]　オウムガイに黄金比が潜んでいる

オウムガイを 2 つに割ると，綺麗な螺旋を見ることができる。この螺旋は，**対数螺旋**と言われるものであり，極方程式で，

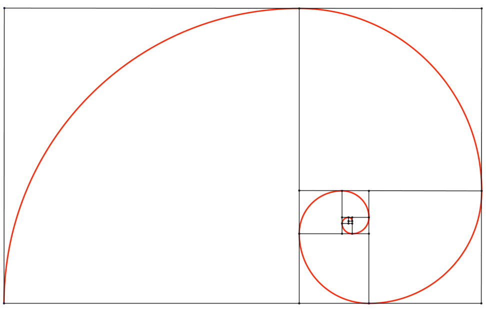
$$r = ae^{\theta \cot b} \cdots (*)$$

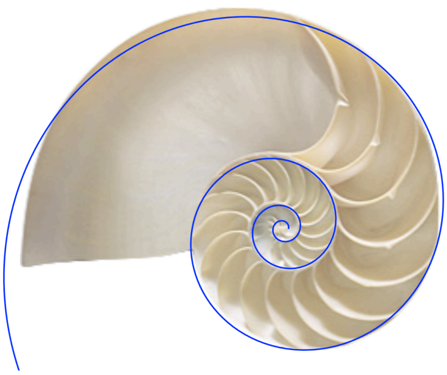
と表される。

このオウムガイの螺旋に**黄金比**が現れるという意味は，

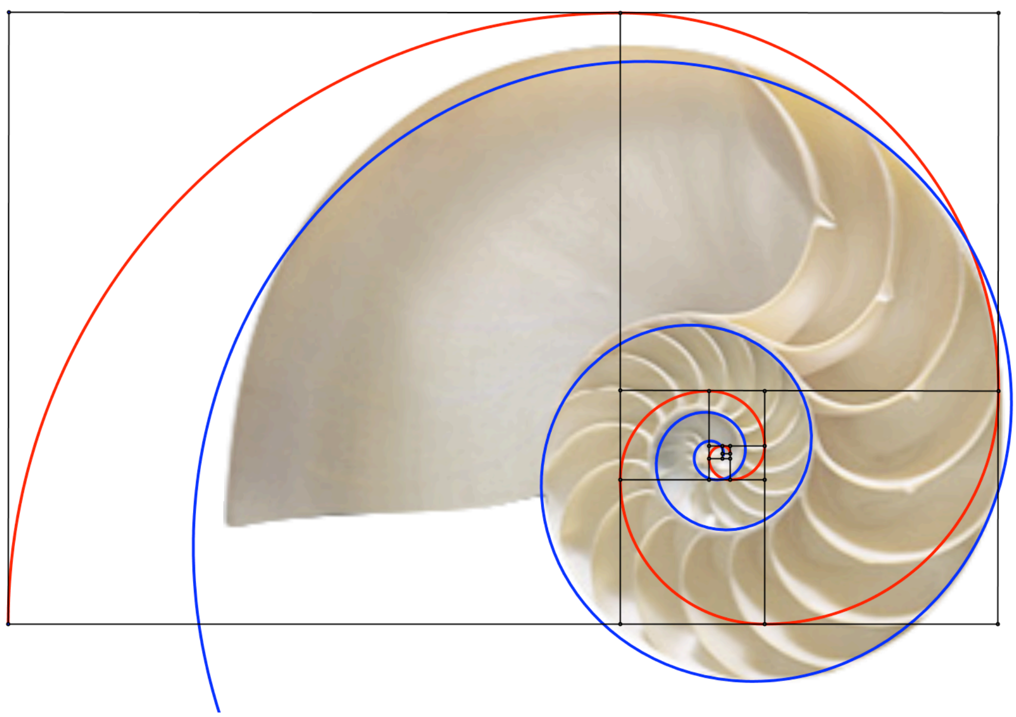
縦：横＝1：1.618

となる長方形(**黄金矩形**)によってできる螺旋(これも対数螺旋である)が，オウムガイの螺旋になっているということである。本当かどうか調べてみると･･･





確かに似ているが，重ねて見ると･･･



違っている！

実際に，対数螺旋(*)における b の値は，

黄金矩形の螺旋：72.8°，オウムガイの螺旋：79°～80°

となって，黄金矩形による螺旋ではない，すなわち，オウムガイには黄金比は潜んでいないのである。このオウムガイと黄金比の関係は，都市伝説のように流布されているが，数学できちんと判断すれば間違っていることがわかる。

[3]　名刺のサイズは黄金比

日本の名刺のサイズは，

55mm×91mm，55：91＝1：1.65454545

であり，黄金比とはちょっと違うのではないか。小数点第 1 位までは同じだけれど･･･これも都市伝説かな。

他にも，パルテノン神殿には黄金比があるので美しい，という説が多く語られている。そこで確認してみると，黄金矩形は右図のようになるので，ちょっとこれも無理があると思われる。

世の中で言われていること，ネットで流れている情報を鵜呑みにせず，数学的に論理的に自分の頭で考えることのできる人間になりましょう！

2. 黄金比とは？

さて，**黄金比**に現れる数 1.618 は，**黄金数**と呼ばれて，正確な値は，

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

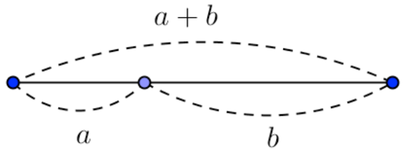
である。この黄金比，黄金数を定義する。

［定義 2］黄金比

線分を a，b の長さで 2 つに分割するとき，

a：b＝b：(a＋b)

が成り立つように分割したときの比 a：b を黄金比という。



実際に求めてみる。

a：b＝b：(a＋b)　⇔　b^2＝a(a＋b)　⇔　$b^2-ab-a^2=0$

両辺を $a^2>0$ で割ると，$\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b}{a}-1=0$

よって，$\frac{b}{a}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\dfrac{b}{a}>0$ より，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，a : b＝1 : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ＝1 : ϕ

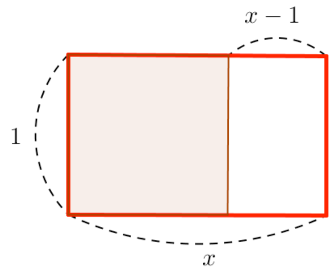
次に，黄金矩形と呼ばれる長方形で定義すると，次のようになる。

［定義 3］黄金比(黄金矩形)

x＞1 のとき，

(縦の長さ) : (横の長さ)＝1 : x

の長方形から，右図のように正方形を取り去った残りの長方形が元の長方形と相似になるとき, x を黄金比(黄金数)という。また，このような長方形を黄金矩形という。



実際に求めてみる。

$$1 : x=(x-1) : 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1)=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-1=0$$

よって，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

x＞0 より，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$

黄金矩形から取り去る正方形の 1 辺の長さを半径とする四分の一円を描いてつなげると，先に見た対数螺旋が得られる。

黄金矩形の定義より，残った長方形から正方形を取り去る操作は無限に続けることができる。そして，黄金数 ϕ は無理数である。

［問 9］

(1)　$\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　黄金数 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が無理数であることを証明せよ。

パルテノン神殿は，B.C.447 年に建設が始まり，B.C.438 年に完工したとされる。この時代の数学者としては，**ピタゴラス**(B.C.582〜B.C.496)がいる。ピタゴラスの定理(三平方の定理)で有名であるが，彼は新興宗教とでも言える「ピタゴラス教団」の教祖であった。ピタゴラス教団の教義は,「万物は数である」という教えであったが，当時における数とは有理数のことであった。有理数は分数で表せる数，言い換えるとある単位で計り切ることができる数である。そのような時代に，操作が無限に続く，無理数である ϕ を利用してパルテノン神殿を建てたとは，とても思えない。つまり，世の中のいろいろな所に黄金比が潜んでいるという話は，都市伝説であることが多いのである。

［問 10］

黄金矩形と他の長方形を幾つか並べて見てもらったとき，どの長方形を美しく感じる人が多いか調査して考察してみよ。

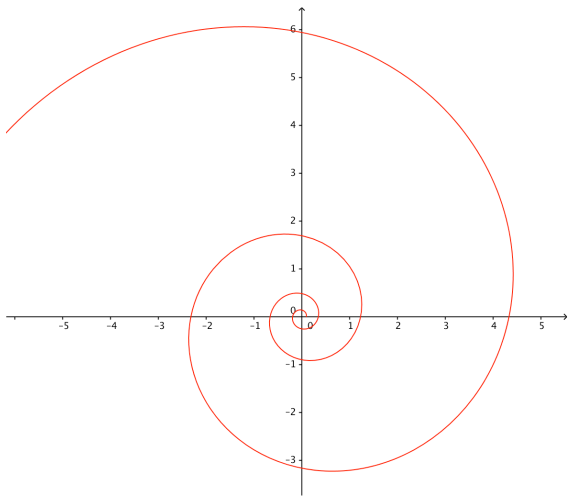
3. 螺旋とは？

黄金比のところで登場した**対数螺旋**は，次の極方程式で表される曲線である。

$$r = ae^{b\theta} \cdots (**)$$

(a，b は定数で，e は自然対数の底＝ネピア数)

例えば，a＝0.1，b＝0.2 のとき，対数螺旋(**)は，右図のような螺旋になる。a，b を変化させれば，また違う形になるように思えるが，自己相似形の曲線である。すなわち，任意の倍率で拡大した対数螺旋は，適当な回転によって元の螺旋と一致するという美しい性質を持っている。



また，対数螺旋は，極方程式の形を見ればこのような名前で呼ばれるのは当然であるが，一方で**等角螺旋**とも呼ばれる。

［課題 14］

等角螺旋の名称は，中心から伸ばした半直線と対数螺旋のなす角が一定であることからきている。このことを証明せよ。

(証明)

極方程式(**)を，直交座標におけるパラメータ表示に書き換えると，

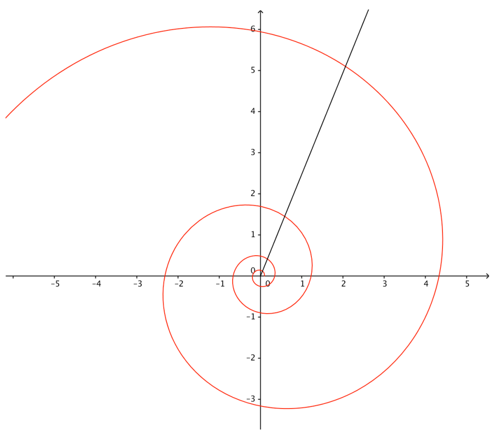
$$x = r\cos\theta = ae^{b\theta}\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = ae^{b\theta}\sin\theta$$

よって，

$$\frac{dx}{d\theta} = ae^{b\theta}(b\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = ae^{b\theta}(b\sin\theta + \cos\theta)$$



ゆえに，対数螺旋の点(x，y)における接線方向のベクトルを $\vec{u}$ とおくと，

$$\vec{u} = (b\cos\theta - \sin\theta,\ b\sin\theta + \cos\theta)$$

また，半直線の方向ベクトルを $\vec{v}$ とおくと，

$$\vec{v} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$$

よって，

$$|\vec{u}| = \sqrt{b^2+1},\quad |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (b\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta + (b\sin\theta + \cos\theta)\sin\theta = b$$

ゆえに，半直線と対数螺旋のなす角を α とすると，

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} = 一定$$

(Q.E.D.)

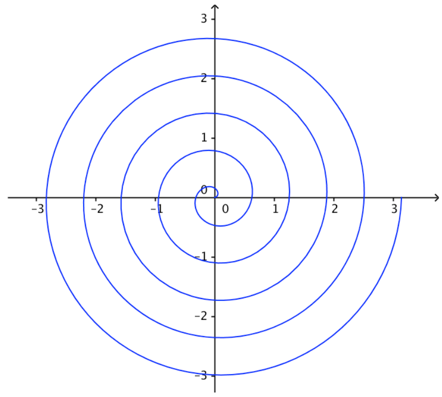
対数螺旋には，このような美しい性質が他にもある。

［問 11］

対数螺旋(**)と中心を通る半直線との交点のうち，隣り合う交点については，原点からの距離の比は一定であることを証明し，その一定の値を求めよ。

［問 12］

時速 320km もの猛烈な速さで飛ぶハヤブサが，獲物を狙って飛ぶときの飛行曲線は対数螺旋になると言われている。これは，ハヤブサの目は頭の横についているために，正面はよく見えないので，斜めから見て獲物を常に視野に収めて飛ぶからだそうだ。この説が正しいとすれば，ハヤブサの飛行曲線が対数螺旋になる理由を説明せよ。



螺旋には，極方程式

$$r = a\theta \cdots (☆) \quad (a は定数)$$

で表される螺旋もあり，これを**アルキメデスの螺旋**という。

例えば，$a=0.1$ のときのアルキメデスの螺旋は，右図のようになる。

［問 13］

アルキメデスの螺旋(☆)と中心を通る半直線との交点のうち，隣り合う交点については，原点からの距離の差は一定であることを証明し，その一定の値を求めよ。

スイスの数学者・科学者ヤコブ・ベルヌーイ(1654〜1705)は，対数螺旋について研究し，その美しい性質に魅了されたので，墓石に対数螺旋を彫ってもらうことを望んだ。しかし，実際には誤ってアルキメデスの螺旋が彫られてしまった･･･

［課題 15］

等角螺旋は，オウムガイのような軟体動物の殻の断面や，動物の角の形によく現れる。その理由について考察せよ。

大きなオウムガイは，小さなオウムガイを相似拡大したものであり，形が変わらない。オウムガイは，大きくなるにつれて大きな部屋を次々に作って住み替えていく。そのときの部屋の条件は，大きさを増しながら一定の形を保つことである。

この条件には円錐形の殻が当てはまり，そのような殻を作る軟体動物もいる。外周全体の成長速度が同じであれば，円錐形になるのである。ところが，オウムガイは片側ともう片側の成長速度が違うために，円錐がねじれて螺線形になるのである。つまり，オウムガイに幾何学的な見通しがあるとか，遺伝子に対数螺旋が暗号化されている必要はない。

4. フィボナッチ数列とは？

数学は，科学の言語として自然現象等を解明・説明するのに，大いに役立つ。しかし，前節で少し見たように，何でもかんでも数学のせいにする，数学って凄いだろう，的な理解は間違っている。

黄金比の他にもそのような例として，**フィボナッチ数列**(**フィボナッチ数**)がある。

［定義 4］フィボナッチ数列

次の漸化式で定義される数列をフィボナッチ数列といい，各項の数をフィボナッチ数という。

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

具体的にフィボナッチ数を求めてみると，次のようになる。

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，・・・

フィボナッチ(1170 頃～1250 頃)は，本名をレオナルド・ダ・ピサ(ピサのレオナルド)といい，フィボナッチは「ボナッチの息子」という意味である。フィボナッチは，1202 年に『算盤の書』を発行し，その中でウサギのつがいが増えていく問題を作ったが，そこにフィボナッチ数列が現れたのである。

［課題 16］

フィボナッチ数列の一般項を求めよ。また，$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$ を求めよ。

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \cdots ①$$

において，

$$x^2=x+1 \iff x^2-x-1=0$$

の 2 つの解を α，$\beta\ (\alpha>\beta)$とすると，

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1 \quad \left(\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

であるから，①より，

$$F_{n+2}-\alpha F_{n+1}=\beta(F_{n+1}-\alpha F_n)$$

よって，

$$F_{n+1}-\alpha F_n=(F_2-\alpha F_1)\beta^{n-1}=\beta^n \cdots ②$$

同様にして，

$$F_{n+1}-\beta F_n=(F_2-\beta F_1)\alpha^{n-1}=\alpha^n \cdots ③$$

③−②より，

$$(\alpha-\beta)F_n=\alpha^n-\beta^n$$

ゆえに，

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \cdots ④$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\left(\because\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1\right)$$

さて，フィボナッチ数列の一般項④は，無理数の n 乗の数で表されているが，計算の結果出てくる各項は整数である。ちょっと不思議な感じがする。

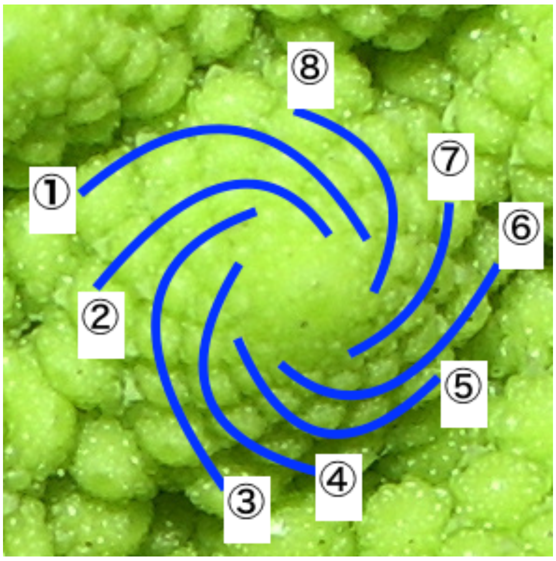
また，フィボナッチ数列の隣り合った項の比は，黄金数 φ に収束する！この結果もあって，次節で見るようにフィボナッチ数を特別な数とみなす「風潮」がある。

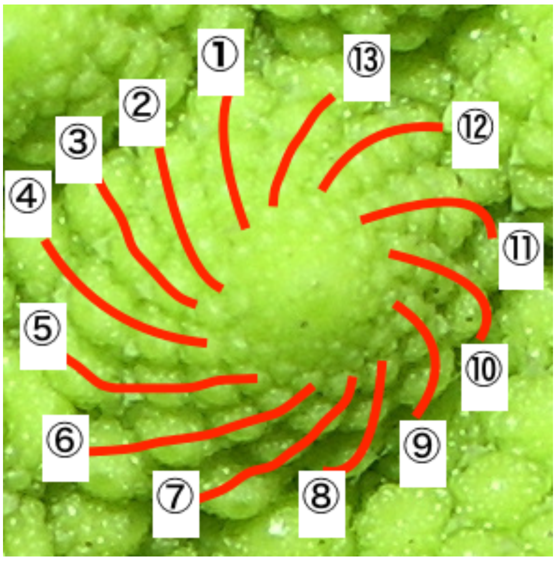
5. フィボナッチと螺旋と葉序の関係は？

右の野菜は，カリフラワーの仲間のロマネスコである。このロマネスコは，見ての通りフラクタル構造(自己相似構造)がはっきりと見える，美しい(？)野菜である。

これだけでも，数学的に素晴らしい野菜であるが，その一部を拡大すると，今度は右回りと左回りの螺旋がくっきりと見えてくる。またまた数学的な構造を持っているというわけだ。

その本数を数えると，8 本と 13 本となる。なんと，これは，隣り合ったフィボナッチ数ではないか！



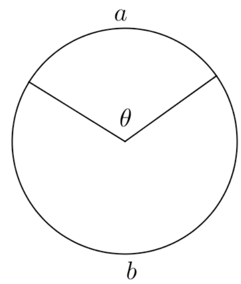


一般に，花の花弁の数は 3，5，8 が多いと言われ，これらもすべてフィボナッチ数である。また，パイナップルや松ぼっくりなどは螺旋を数えられる実を持つが，これらの螺旋の数もほとんど 5，8，13 だと言われる。自然は，フィボナッチ数に支配されているのか？

［課題 17］

植物の 80%では，茎についた葉の列は螺旋を描く。葉はそれぞれすぐ下の葉と一定の角度だけずれた所についている。このずれる角度は，多くの種において概ね 137.5° であることが多い。この角度は一体，どこから現れたのだろう？

定義 2 で，黄金比を線分の比で定義した。そのアナロジーで，円を分割する。すなわち，右図のように，



(短い円弧)：(長い円弧)＝(長い円弧)：(円周)

を満たすように分割したときの，短い円弧に対する中心角を θ とすると，

$$a : b = b : (a+b)$$

これはどこかで見たような･･･，そう，黄金分割である。ゆえに，

$$a : b = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

より，

$$\theta = 360° \times \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 360° \times \frac{2}{3+\sqrt{5}} = 137.5077\cdots°$$

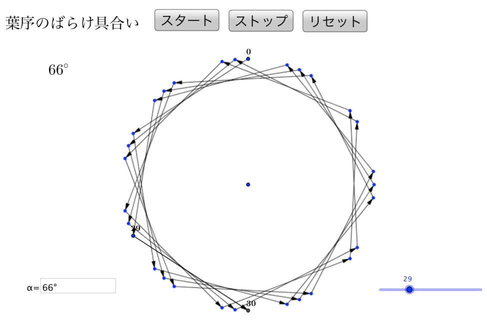
と，137.5° が現れる。この中心角 θ ＝137.5° を，**黄金角**という。

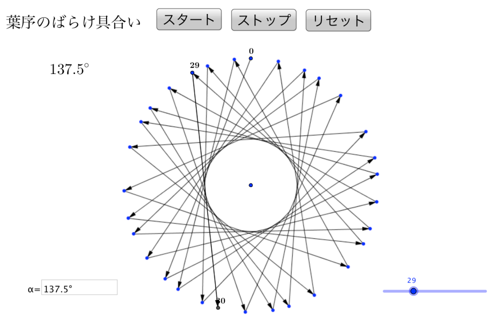
またまた現れた黄金比，そして黄金比に分割された黄金角，これは本当に特別な角度なのだろうか？

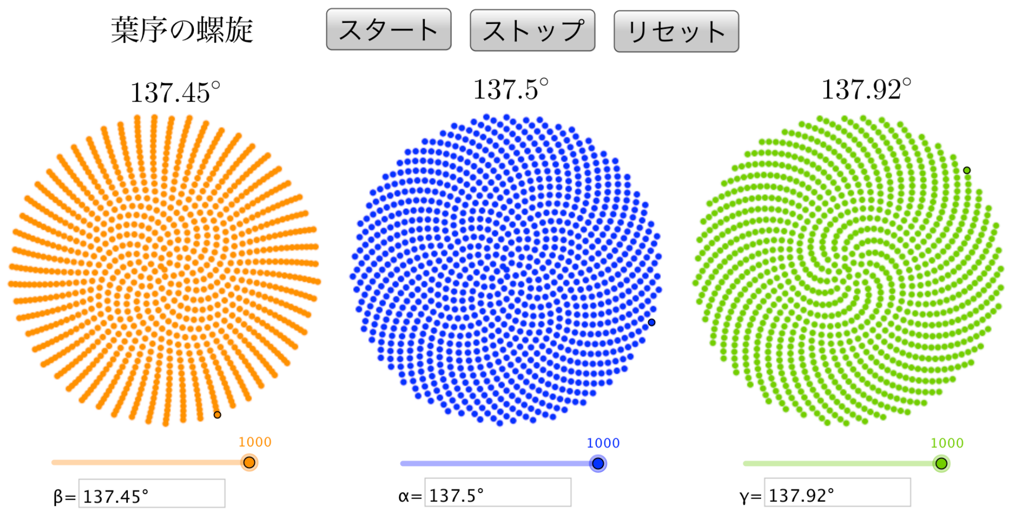
［課題 18］

GeoGebra のファイルを利用して，葉序や小花の詰め込みのシミュレーションを行い，黄金角について考察せよ。

シミュレーションの結果は，次のようになり，黄金角の「神秘性」「偉大さ」が確認できたように思えるが･･･







多くの本やネット上では「以上のようなことから，フィボナッチ数・黄金角の葉序は植物に有利であり，進化の過程でそれを選択した植物が生き残ったのである。なんと素晴らしい！」と解説してある。そして，それを読んで「凄い！　自然は素晴らしい！」と感激，納得するのである･･･

しかし，これで本当に理解できたのだろうか？

> 確かに黄金角であれば，葉序は植物に有利そうだ
> しかし，その中途半端な 137.5077･･･° を決める原理は何なのだ？
> 隣り合った葉の原基(葉になる細胞)が，なぜ黄金角だけずれるのか？
> それは少しも説明できていないではないか！

ということで，もっと科学的な説明・解明が必要なのである。数学的な操作はしているが，自分の思い込みや思い入れで，自然の中に現れる黄金比，フィボナッチ数を賞賛するのでは，数学を科学の言語として理解しているとは言えない。

葉序については，大阪大学の近藤滋先生が，次のような概略の仮説を唱えられている。

まず，葉の原基の形成には，一定濃度以上のオーキシンという植物ホルモンが必要である。古い原基はオーキシンを吸収する(阻害的に働く)ので，新しい原基は古い原基からできるだけ遠くにできる。そこで，次の 2 つの仮定を立てる。

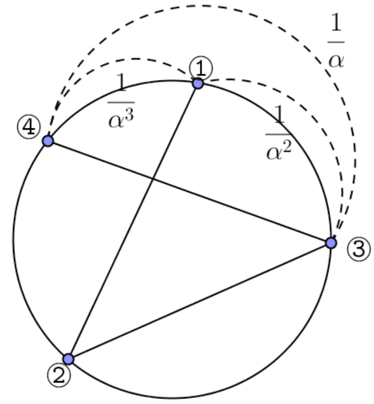
[1]　1 つ前の原基の阻害効果は，一定の比率で減衰する

(ただし，4 個以上古いものは無視する)

[2]　原基からの阻害効果は，距離に反比例する

以上を図示すると，右図のようになる。

ここで，α は減衰率である。



［問 14］

近藤先生の仮説に従えば，$\alpha = \phi$ となることを示せ。