



# 科学の言語としての数学

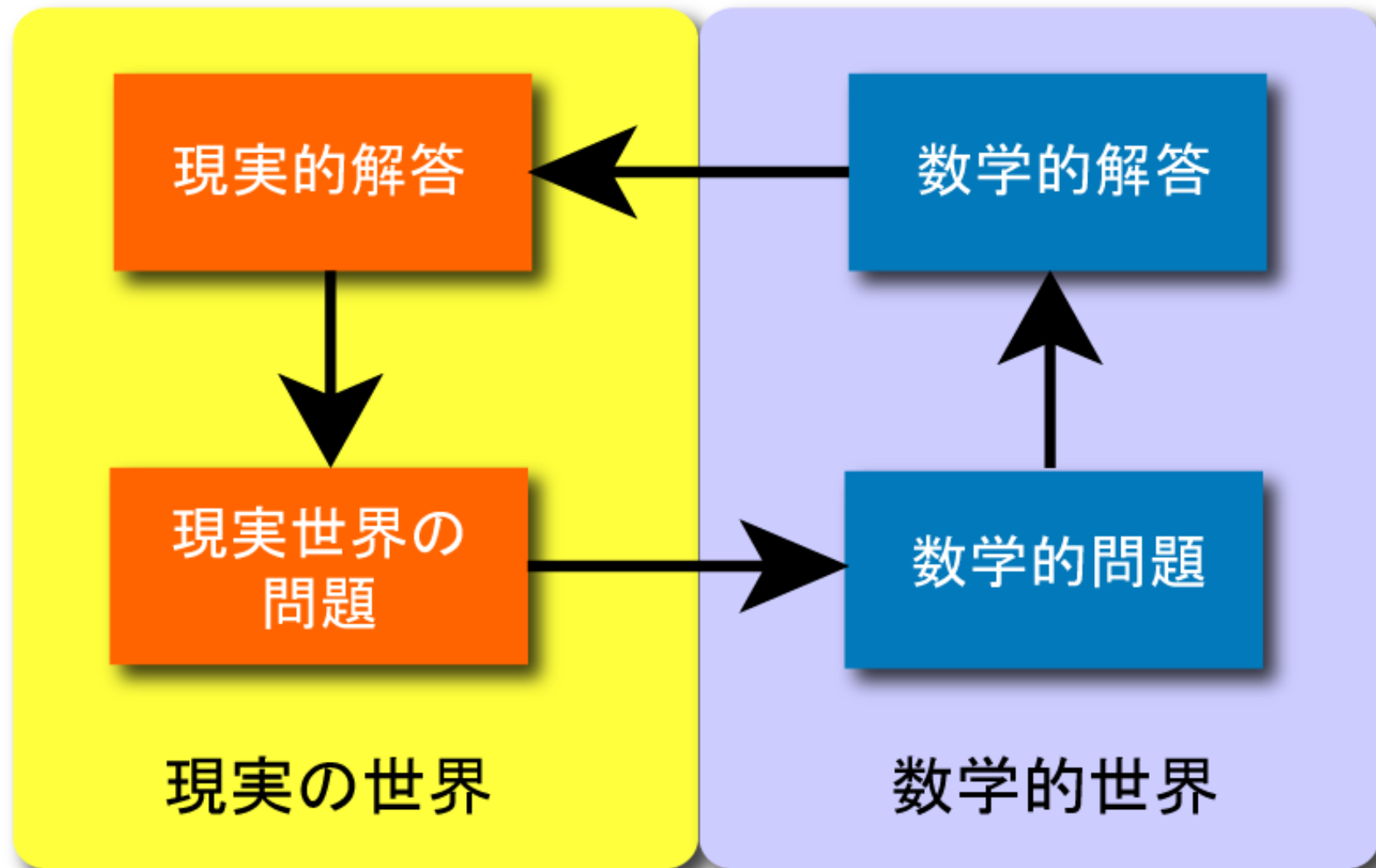
## 自然の中の数学 2

2016年10月18日(火) 10:40~12:10

吉田信也(全学共通)

# 1. シャボン玉はなぜ丸い？

下図のようなサイクルの形で、自然界や社会の現象や事柄を数学という言葉で表現し、解明している。



# 1. シャボン玉はなぜ丸い？

[課題4]

シャボン玉は、なぜ丸いのか？ その理由を考えよ。

世の中には、当たり前だと思っていることでも、よく考えてみると不思議に思えることはたくさんある。シャボン玉がなぜ丸いのかも、その1つだろう。他にも、

- ・なぜ、平面上の2点を最短距離で結ぶ曲線は直線なのか？
- ・なぜ、光は最短時間で進むのか？

など、いろいろと考えられる。このような、直観的には明らかに思えても、改めて「なぜ？」と聞かれると答えに窮することはよくある。そのときが、数学の出番なのだ。

- シャボン玉の膜は非常に薄いために， シャボン玉に働く力は表面張力のみ
- シャボン玉は一定の体積(吹きこまれた空気の量)を保つ条件のもとで， 表面張力が最小になるような形をとろうとする
- 表面張力は表面積に比例すると考えられるので， シャボン玉は表面積が最小になるうとした結果として， 球形になると考えられる
- つまり， シャボン玉が丸いのは，  
体積が同じ立体の中で，  
表面積が最小となるのは球である  
ことを示している。

## [課題5]

次のような体積 $V=1$ の立体を考えるととき、それぞれの立体の表面積 $A$ の近似値を求めよ。

(1) 球(半径 $r$ )

(2) 正四面体(1辺 $r$ )

(3) 立方体(1辺 $r$ )

(4) 円柱(底面の半径 $r$ , 高さ $2r$ )

# 数値計算の1つの例：Wolfram Alphaの利用



[Browse Examples »](#)

[New to Wolfram|Alpha »](#)

[About Wolfram|Alpha »](#)



[Get the Wolfram|Alpha App for iPad »](#)

Optimized touchscreen experience with enhanced capabilities designed specifically for the iPad



[Explore our Wolfram|Alpha-Powered Apps »](#)

Immediate optimized access to deep computational knowledge in specific educational, professional, and personal areas

View Wolfram|Alpha in:

Mobile | [Standard](#)

© 2015 Wolfram Alpha LLC  
[Terms of Use](#) | [Privacy Policy](#)

# 数値計算の1つの例：Calculatorの利用

The image shows the interface of the 'MyScript Calculator' application. On the left is a sidebar menu with the following items:

- Calculator (highlighted with a blue background)
- チュートリアル (Tutorial)
- ニュース (News)
- 設定 (Settings)
- PowerPack
- バージョン情報 (Version Information)

The main area of the app features a blue header with a hamburger menu icon and a light blue grid background. A trash can icon is visible in the top left of the grid. The calculation  $\sqrt[3]{\pi} = 1.464\dots$  is displayed in the center of the grid. The number '3' is a superscript, and the result '1.464...' is in a larger blue font.

(解答)

$$(1) \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 = 1 \text{ より, } r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$$

ゆえに,

$$A = 4 \pi r^2 = 4 \pi \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2} = 4 \sqrt[3]{\frac{9\pi}{16}} \doteq 4.84 \cdots \textcircled{1}$$



## (解答)

(2) 正四面体の高さを  $h$  とすると、三平方の定理より、

$$h^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} r \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{2}{3} r^2$$

よって、 $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r$

ゆえに、 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12} r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r = \frac{\sqrt{2}}{12} r^3 = 1$

よって、 $r^3 = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$  だから、 $r = \sqrt[3]{6\sqrt{2}}$

ゆえに、

$$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot 4 = \sqrt{3} r^2 = \sqrt{3} \sqrt[3]{36 \cdot 2} = 2\sqrt{3} \sqrt[3]{9} \doteq 7.21 \cdots \textcircled{2}$$

## (解答)

$$(3) \quad V = r^3 = 1 \text{ より, } r = 1$$

$$\text{ゆえに, } A = 6r^2 = 6 \cdots \textcircled{3}$$

$$(4) \quad V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 1 \text{ より, } r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

ゆえに,

$$A = \pi r^2 \times 2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2 = 6\pi \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} = 6\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \doteq 5.54 \cdots \textcircled{4}$$

よって,

正四面体の $A >$ 立方体(正六面体)の $A >$ 円柱の $A >$ 球の $A$   
となりそうだ...

## 2. 大昔から知っていた？

実は、体積が一定のときの表面積が最小となる問題に似ている次のような問題は、キリストが生まれるよりも何世紀も前から、古代ギリシャやエジプトの数学者によって考えられていた。

### [課題5] 等周問題

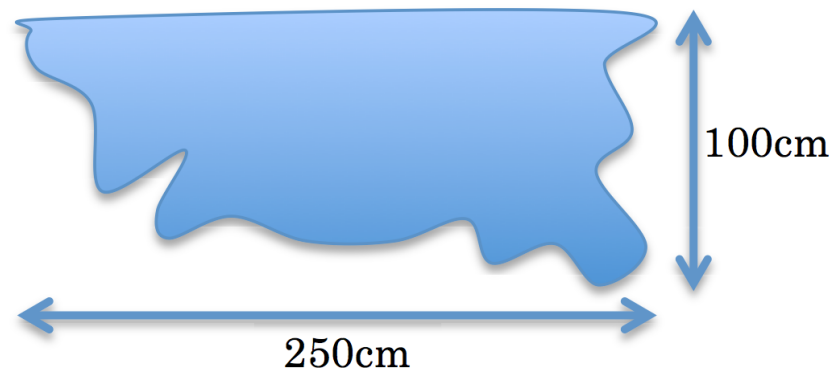
長さが一定の閉曲線の中で、その閉曲線で囲まれる面積を最大にするのは何か？

- フェニキアの王女であったディドーは、彼女の夫を殺害した残忍な兄ピグマリオンから逃れるために海を渡り、北アフリカの現在チュニス湾と呼ばれるところに上陸した
- ディドーは家臣とともに新しい国を築くために、その地の支配者から土地を買おうとした
- 彼らが結んだ売買契約は、牛1頭分の皮で囲めるだけの土地を買うというものであった

#### [課題6] ディドーの問題

ディドーは、牛1頭分の皮で囲めるできるだけ広い土地を得ようとして、どのような方策を考えたか？  
また、その結果として、どれ位の大きさの土地を得ることが出来たか？

- ディドーは、牛半頭分の皮2枚から、幅2.5mmの何本もの紐を切り取り、それらをつなぎ合わせて1本のロープを作った。



[問3] そのロープの長さを求めよ。

$$250 \times 2 \text{ cm} = 5000 \text{ mm}$$

$$\frac{5000}{2.5} \times 100 \text{ cm} = 2 \times 10^5 \text{ cm} = 2 \times 10^3 \text{ m}$$

- ディドーは、真っ直ぐな海岸線を一方の境界として、出来上がったロープで半円形に土地を囲い込んだ
- 彼女は、面積が最大になるのは土地の形が半円形するときであることを知っていたに違いない。このようにして、古代都市カルタゴは出来上がった（右図は現在の博物館にある想像図）。



[問4] ディドーが手に入れた半円形の土地の半径 $r$ とその面積 $S$ を求めよ。

$$\pi r = 2 \times 10^3 m$$

$$\therefore r = \frac{2 \times 10^3}{\pi} = 637 m$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4 \times 10^6}{\pi^2} = \frac{2 \times 10^6}{\pi} = 6.4 \times 10^5 m^2$$

# 3. 等周問題は解決？

ディドーの問題を数学的に書きなおすと、次のようになる。

[定理3] ディドーの問題

定直線 $L$ 上の2点を、一定の長さの曲線で結ぶとき、領域の面積が最大になる曲線 $C$ は半円である。

# (証明) スイス人数学者シュタイナー(1796~1863)

まず、 $C$  は凸図形でなければならない。

なぜなら、 $C$  が凸図形でないとすると、右図のような図形となる。

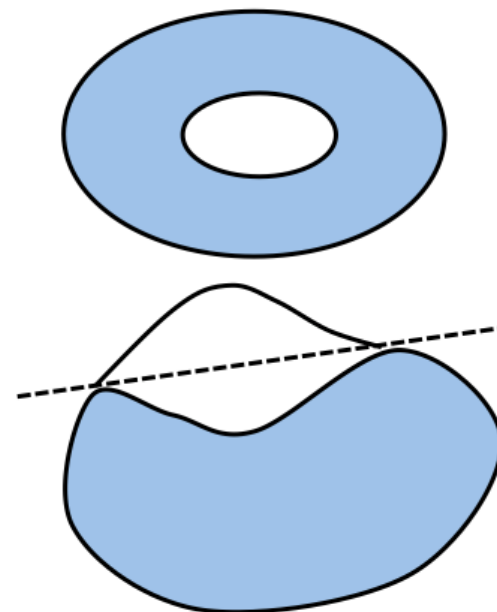
(i) 穴が開いているとき

穴を取り除くことにより、周の長さが短くなり面積は大きくなる。

(ii) 凹んでいる部分があるとき

接線に関して対称に折り返すことにより、周の長さは同じで面積は大きくなる。

いずれにしても条件を満たさないので、 $C$  は凸図形でなければならない。





# (証明) スイス人数学者シュタイナー(1796~1863)

さて、右上図において  $C$  は半円ではないとすると、 $C$  上の点で、

$$\angle APB \neq 90^\circ \dots \textcircled{1}$$

なる点  $P$  が存在する(注 1)。領域を弦  $AP$ ,  $BP$  で 3 つの部分に分割して、それぞれ  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  とする。

ここで、 $AP$ ,  $BP$  を硬い棒だと思い、

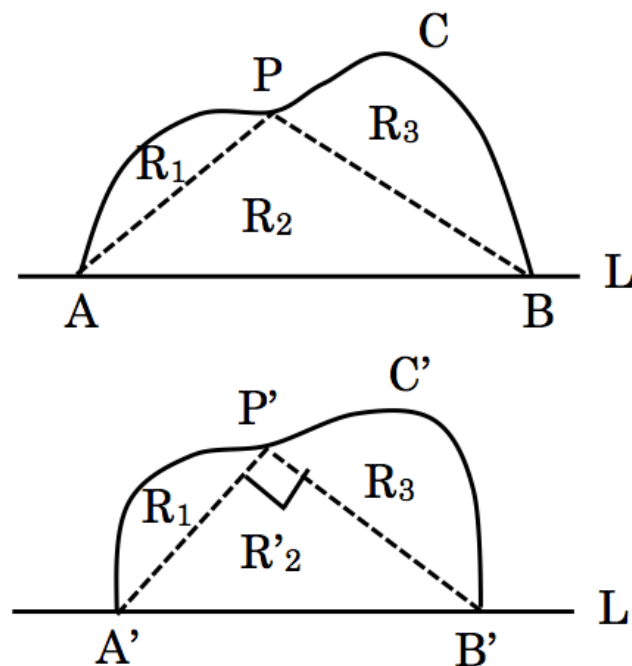
$$\angle A'P'B' = 90^\circ \dots \textcircled{2}$$

となるように、点  $A$  を  $A'$ ,  $B$  を  $B'$  に移動させる。このとき、点  $P$  は  $P'$  に移動し、

$$AP = A'P', \quad BP = B'P' \dots \textcircled{3}$$

となる。この移動の結果、曲線  $C$  は  $C'$  に移動したとする。

③より、 $R_1$ ,  $R_3$  は変化することなく弦  $A'P'$ ,  $B'P'$  の上に移動し、 $R_2$  は  $R_2'$  に移動している。



# (証明) スイス人数学者シュタイナー(1796~1863)

ここで, ①, ②, ③より,

$$\triangle APB = \frac{1}{2} AP \cdot \underline{BP} \sin \angle APB < \frac{1}{2} A'P' \cdot B'P' \sin 90^\circ = \triangle A'P'B'$$

であるから, 任意の曲線  $C$  を

$C$  の周の長さ =  $C'$  の周の長さ,  $C$  と  $L$  で囲む面積  $<$   $C'$  と  $L$  で囲む面積  $\cdots$  ④

を満たす曲線  $C'$  に変形することができる(注 2)。

④のような, 周の長さが変わらずに面積が増加するような変形を受けない曲線は, 半円に限る( $\because$   $C$  が半円なら①を満たすような点  $P$  は存在しないから)。

よって, 領域の面積が最大になるのは,  $C$  が半円のときである。

(Q.E.D.)

(注 1) 曲線上の任意の点  $P$  について  $\angle APB = 90^\circ$  となるのは円だけであることを示す必要があるが, その証明は省略する。

(注 2) 移動することで領域  $R_1, R_3$  が重なることはないのであるが, その説明は省略する。

## [定理4]

曲線Cを等周問題の解となる図形とすると，C上の2点を結ぶ弦で周を2等分するものは，面積も2等分する。

(証明)

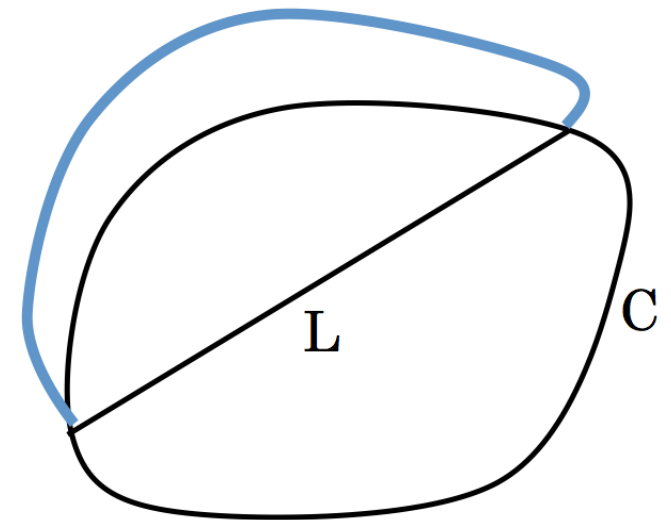
このような弦Lが，面積を2等分しないとすると，面積の大きい方をLに関して対称に折り返してできる図形は，周の長さは同じであるが，面積は大きくなる。

これは，Cが等周問題の解であることに矛盾する。

よって，Lは面積も2等分する。

(Q.E.D.)

(注) C上の2点を結ぶ弦で周を2等分するものが存在することは，実は証明が必要であるが，省略する。



## [定理5] 等周問題

長さが一定の閉曲線の中で、その閉曲線で囲まれる面積を最大にするのは円である。

(証明) シュタイナー

等周問題の解となる図形 $C$ が与えられたとして、 $C$ の周を2等分する弦 $L$ を描き、 $C$ を2つの図形 $C_1$  ,  $C_2$ に分割する。 $C_1$  ,  $C_2$ は弦 $L$ を共有しているので周の長さは同じであり、定理4より面積も同じである。

ここで、 $C_1$  ,  $C_2$ の(同じ)面積を最大にすれば、 $C$ の面積は最大になる。定理3より、 $C_1$  ,  $C_2$ の(同じ)面積が最大になるのは、 $C_1$  ,  $C_2$ が半円のときであるから、 $C$ は円である。

(Q.E.D.)

以上で、シュタイナーは見事なアイデアで等周問題を解決したように思える。しかし、実はこの証明には欠陥がある。

[問5] シュタイナーの証明の、数学的欠陥を述べよ。

シュタイナーの証明は、

等周問題の解となる曲線の存在を、証明なしに仮定している

ことが数学的にはダメであると、同時代のドイツ人数学者ディリクレ(1805~1859)に指摘されていた。これに対してシュタイナーは、解が存在するのは明らかであると反論した。大多数の人は、シュタイナーと同じように考えるだろう。しかし、幾何学の問題では、解が存在するのは明らかに見えても、実は解が存在しない問題はいくらでもある。

[例]

周の長さが1より小さい凸図形の中で、面積が最大のものを見つけよ。

[解]

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、周長の長さが  $1 - \varepsilon$  の凸図形  $C$  を考える。 $C$  を周の長さが  $1 - \frac{1}{2} \varepsilon$  である相似な図形  $C_1$  に相似拡大すると、 $C_1$  の周の長さは1より小さく、面積は  $C$  よりも大きい。この操作を繰り返すと、周の長さが  $1 - \frac{1}{2^n} \varepsilon$  ( $n=1, 2, \dots$ ) と1より小さく、面積が増加する凸図形の無限列が得られる。

すなわち、周の長さが1より小さい凸図形で面積が最大となるものは存在しない。

古代から等周問題とその解がよく知られていたことは、例えば下図のような中世における都市の城壁の形を見ても分かる。



現在のケルン市街



中世都市ネルトリンゲン

# 4. 双対性

[定理6] 双対性

平面上の閉曲線の周の長さを $L$ ，閉曲線が囲む領域の面積を $A$ とし，2つの命題を  
 $P$ ： $L$ が一定のとき， $A$ が最大となる閉曲線は円である。

$Q$ ： $A$ が一定のとき， $L$ が最小となる閉曲線は円である。

とすると， $P$ と $Q$ は同値( $P \Leftrightarrow Q$ )である。



命題Pは等周問題の解であり，真であることを証明したので，命題Qも真である。

そこで，命題Qの次元を1つ上げると，次の定理が成り立つ。

### [定理7] シャボン玉

同じ体積を囲む閉曲面の中で，表面積が最小となるのは球である。

# 5. 変分法

定理7が成り立つことを数学的に厳密に証明するには、**変分法**という数学が必要となる。変分法は、イギリスの天才数学者ニュートン(1642~1727)とドイツのこれまた天才数学者ライプニッツ(1646~1716)が発見した**微分法の兄貴分**、とでも言うべき数学である。微分法と変分法の違いを、具体例で見よう。

[課題7] 微分法

4辺の長さの和が4である長方形のうち、面積が最大のものは何か？

長方形の縦の長さを  $x$ 、面積を  $S$  とすると、

$$S = x(2-x) = -x^2 + 2x$$

よって、

$$\frac{dS}{dx} = -2x + 2 = 2(1-x)$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 \text{ とすると, } x=1$$

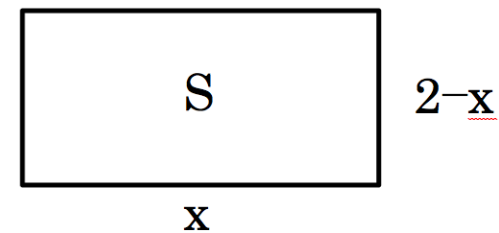
増減表より、 $S$  は  $x=1$  で最大値をとる。

よって、面積が最大となるのは、正方形のときである。

このように、一般的にいうと、

関数  $f(x)$  が極値をとる  $x$  の値を求める方法が微分法

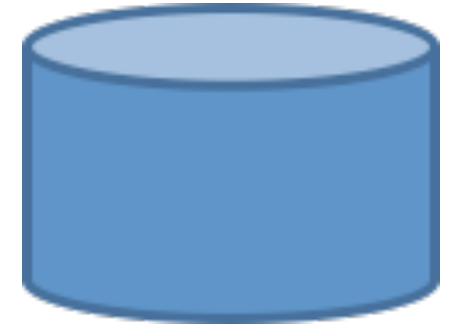
である。



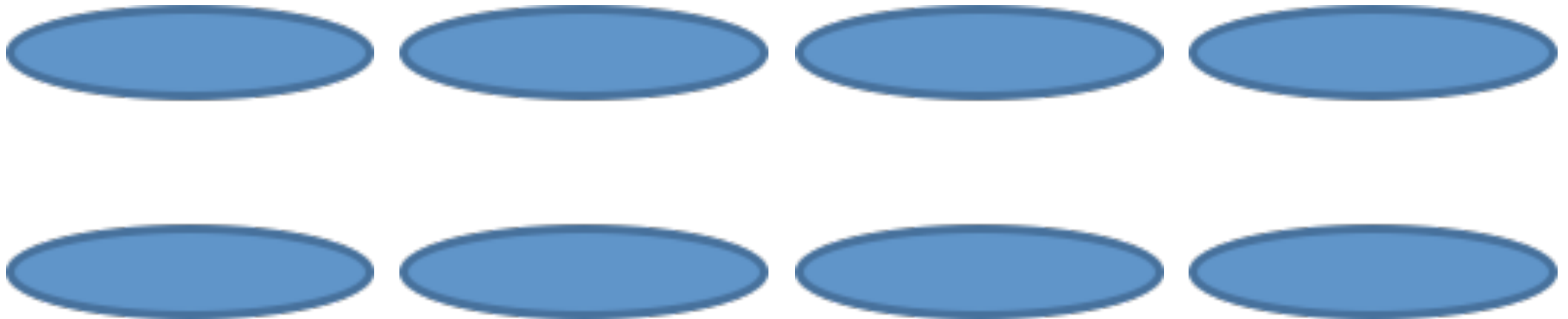
$x$	0	...	1	...	2
$\frac{dS}{dx}$	/	+	0	-	/
$S$	/	↑	極大 1	↓	/

〔課題8〕 変分法

右図のような、底面の半径が1、高さが1の円柱形の容器がある。この容器の表面に塗料を塗りたい。塗料の量が最も少なくなるように容器の側面の形を変えるとき、その形はどうなるか？

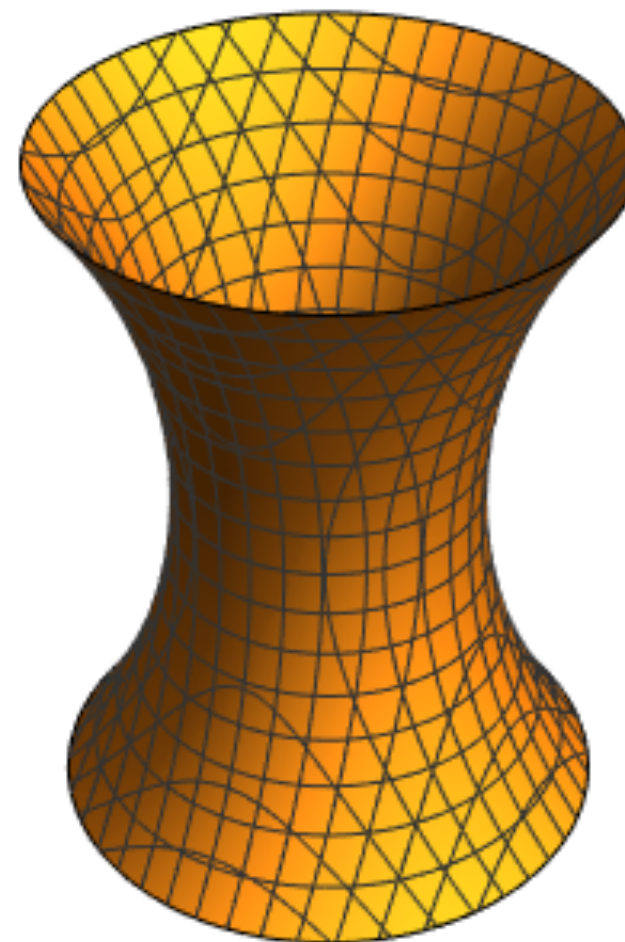
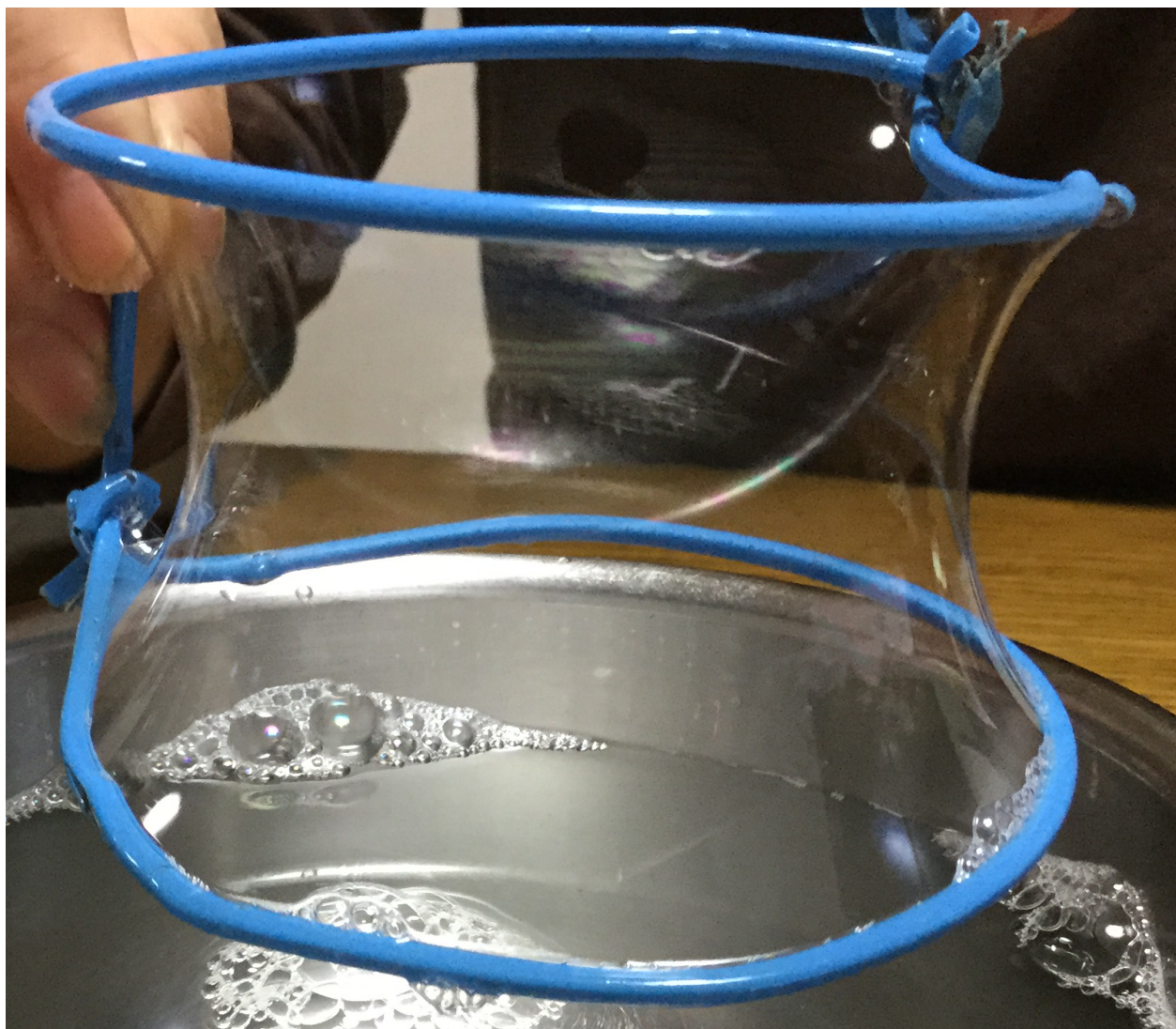


〔貴方の予想〕



- 塗料の量を最小にするには、容器の側面積を最小にすればよい
- 課題7においては、 $S$ が最大となる $x$ の値は、 $x$ を少し変化させても $S$ はほとんど変化しない
- つまり変化率が0となることから求められる
- これと同様の考え方で、課題8を満たす側面の曲線 $f(x)$ があるとして、 $f(x)$ をどのように変形しても表面積は増えるが、表面積の変化率は $f(x)$ で0になっているはず
- 表面積が最小になる $f(x)$ では、曲線を少し変化させても表面積はほとんど変化しないはず
- このように、
  - 表面積が極値をとる曲線(関数) $f(x)$ を決定する方法が変分法
- 微分法と変分法の違いは、簡単に言うと、
  - 変分法は、変形の仕方に無限のバリエーションがある
- 課題8においては、側面を表す曲線 $f(x)$ としては直線、放物線などありとあらゆる曲線が考えられる
- その中で、表面積を最小にする曲線(関数)を求める方法が変分法

実はシャボン膜(自然)は, またまた答えを知っているのである。



この曲面は, 懸垂曲面と呼ばれる曲面であり, カテナリーという曲線を回転させて得られる。

# レポート課題

[問 6]

- (1) 課題 8 の立体の側面を表す曲線を  $y=f(x)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ),  $f(-1)=f(1)=2$  とし, この曲線の微小部分の長さを  $ds$  とする。曲線  $y=f(x)$  を  $x$  軸の周りに 1 回転したとき, この微小部分が掃く曲面の微小部分の面積を  $dA$  とすると,

$$dA = 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

であることを説明せよ。

- (2) この円柱状の立体の側面積は,

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

であることを説明せよ。

- (3) 変分法を用いると, 側面積  $S$  を最小にする関数  $y$  は, 微分方程式

$$y y'' = 1 + (y')^2 \cdots (*)$$

を満たすことが分かる。このとき, 関数

$$y = f(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} \cdots (\star) \quad (a \text{ は定数})$$

は,  $(\star)$  を満たすことを示せ。

※シャボン膜の右横の図は,  $(\star)$  において  $a=0.589$  の  $y=f(x)$  を回転したものである。

