

今日は少し数を用いた遊びのような話をしてみたいと思います。ぜひ筆記具を用意して、各点確かめつつお読み下さい。途中で少し、高等学校で学習する『図形と方程式』の考え方を使いますが、それ以上の特別な知識は必要ありません。

1

有名な定理なのでご存知の方もいらっしゃると思いますが、素数を2個の平方数 (n^2 の形の整数) の和で表そうとすると、たいへん赴き深い法則が観察されます。たとえば2であれば

$$2 = 1^2 + 1^2$$

同様に5や13も

$$5 = 1^2 + 2^2$$

$$13 = 2^2 + 3^2$$

というように2つの平方数の和で表すことができます。しかし、同じことを3, 7, 11について試してみると、どういうわけか、この形には書くことができない。読者はこの先を読まれる前に、19, 23, 29, 31といった素数を $m^2 + n^2$ の形に書くことができるか、ご自身で確認してみられることをお勧めします。はじめはきっと『変な遊びだなあ』と思われるでしょうが、これが深い話の入り口なのです。そして、2つの平方数の和で書ける素数と書けない素数の間に、どんな違いがあるのか考えてみてください。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,

67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, ...

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225,

256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, ...

素数と平方数

結果は次のようになります：

$$\begin{aligned}2 &= 1^2 + 1^2 \\3 &= \\5 &= 1^2 + 2^2 \\7 &= \\11 &= \\13 &= 2^2 + 3^2 \\17 &= 1^2 + 4^2 \\19 &= \\23 &= \\29 &= 2^2 + 5^2 \\31 &= \\&\vdots\end{aligned}$$

このように、31 までの素数のうちでは 2, 5, 13, 17, 29 だけが 2 つの平方数の和に表されます。ここには次の不可解な法則を見て取ることができます：3 以上の素数について

2 つの平方数の和に書くことができる素数は、4 でわると 1 余る。
2 つの平方数の和に書くことのできない素数は、4 でわると 3 余る。(ハ)

つまり素数を 4 で割ったときの余りと $m^2 + n^2$ の形に書けるかどうかということが関係しているのです。この規則はどんなに大きな素数に対しても成り立つことが証明されています。

*

こんな奇妙かつわけのわからないことには日頃滅多に出あわないのではないのでしょうか。こういった不思議な規則を一体どのようにして証明するのか、高校の数学を学んでいる段階では想像もつかないのではないかと思います。いつか理由を理解してやろうと思っている方も居られると思いますので、末尾に文献を挙げておきます。非常に難しいというわけでもないですが、今日はその話はしません。もっとやさしい話をします。

なお、この定理は、フェルマーの最終定理で有名なフランスの弁護士・数学者ピエール・ド・フェルマー (Pierre de Fermat) が他の数学者に宛てて書いた 1640 年 12 月 25 日 (日本は徳川家光の時代) の手紙に述べられています。ただ、ほかの多くの定理同様に氏は証明を書き残すことをしませんでした。現在まで知られている最初の証明は、1747 年にレオンハルト・オイラー (Leonhard Euler) によって得られたものです。



ピエール・ド・フェルマー
Pierre de Fermat
1608 - 1665

2

さて、素数とは限らない一般の 自然数 を2つの平方数の和に書いてみるとどうなるでしょう。たとえば25で試してみると

$$25 = 5^2 + 0^2 = 3^2 + 4^2$$

というように、複数の方法で表すことができます。同様に65も

$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$$

と複数とおりで表せます。では、もっとたくさんの方で $m^2 + n^2$ の形に表せるような自然数を見つけることはできないのでしょうか。



そこで、各々の自然数に対して、2つの平方数の和で表す方法が何通りあるのか具体的に数えて調べてみましょう。少し複雑になりますが、あとの目論見のためにここでは $(+1)^2$ と $(-1)^2$ などを区別し、また加える順番の違いも区別することにします。たとえば 25 は

$$\begin{aligned} 25 &= 5^2 + 0^2 = 0^2 + 5^2 = (-5)^2 + 0^2 = 0^2 + (-5)^2 \\ &= 4^2 + 3^2 = 3^2 + 4^2 = (-4)^2 + (-3)^2 = (-3)^2 + (-4)^2 \\ &= 4^2 + (-3)^2 = (-3)^2 + 4^2 = (-4)^2 + 3^2 = 3^2 + (-4)^2 \end{aligned}$$

というように、12 通りと数えることにします。すると 9 までの結果は次のようになります。

$$\begin{aligned} 1 &= 0^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + 0^2 && (4 \text{ 通り}) \\ 2 &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 && (4 \text{ 通り}) \\ 3 &= \\ 4 &= 0^2 + (\pm 2)^2 = (\pm 2)^2 + 0^2 && (4 \text{ 通り}) \\ 5 &= (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 && (8 \text{ 通り}) \\ 6 &= \\ 7 &= \\ 8 &= (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 && (4 \text{ 通り}) \\ 9 &= 0^2 + (\pm 3)^2 = (\pm 3)^2 + 0^2 && (4 \text{ 通り}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

便宜のため、記号 $d(n)$ を使って n を 2 つの平方数の和で表す 方法の数 を表すことにして、上の結果を

$$d(1) = 4, \quad d(2) = 4, \quad d(3) = 0, \quad d(4) = 4, \quad d(5) = 8, \quad \dots$$

と表記しましょう。この $d(n)$ についても、(ハ) を反映した次のような見事な関係式が成り立ちます：

$$d(n) = 4 \left\{ (n \text{ の } 「4m+1」 \text{ 型の約数の数}) - (n \text{ の } 「4m+3」 \text{ 型の約数の数}) \right\}. \quad (\text{ル})$$

たとえば $n=5$ のときを考えると、上述のように $d(5)=8$ ですが、5 の約数のうち「 $4m+1$ 」型なのは 1 と 5 の 2 つ、また「 $4m+3$ 」型の約数はありませんので右辺は $4 \times (2-0) = 8$ となり、確かに関係が成り立っています。また $n=25$ のときは、「 $4m+1$ 」型の約数は 1, 5, 25 の 3 個、「 $4m+3$ 」型の約数はありませんので、 $d(25)=12$ となり上に述べた結果に一致します。

式(ル)を用いれば、たとえば $5 \times 13 \times 17 = 1105$ が『32 通り』の方法で $m^2 + n^2$ 形に表せることも分かります。

$$1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$$

これに順序と符号を替えたものを併せると 32 通りになります。

公式(ル)は 19 世紀プロセイン王国(現ドイツ)の数学者
カール・ヤコビ(Carl Jacobi)によって導出されました。



カール・グスタフ・ヤコブ・ヤコビ
Carl Gustav Jacob Jacobi
1804 - 1851

3

さらに発展させて、先ほどの表に出てきた数の平均をとってみましょう。前節で見たように、 $1, 2, \dots, 9$ を平方数の和で表す方法の数はそれぞれ $4, 4, 0, 4, 8, 0, 0, 4, 4$ ですから、平均すると

$$(4 + 4 + 0 + 4 + 8 + 0 + 0 + 4 + 4) \div 9 = 3.11\dots$$

となります。さらに先の方まで計算して平均をとってみると

★ $d(1)$ から $d(100)$ までの平均は 3.16

★ $d(1)$ から $d(1000)$ までの平均は 3.148

★ $d(1)$ から $d(10000)$ までの平均は 3.1416

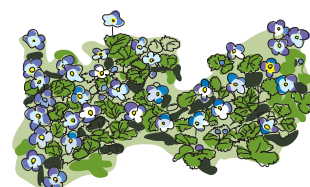
★ $d(1)$ から $d(10000000)$ までの平均は 3.14155

というように、この値は調べる数の範囲を大きくするにつれて円周率 π に近づいていきます。つまり、

自然数を $m^2 + n^2$ のかたちに表す方法は平均して π 通りある (ス)

これが今日の題です。さっきまで余りだの約数だのと整数らしい話をしていたところに突然 π が現れたので、意外に感じられたかもしれません。

でも、ここに π が現れた理由は、次頁以降で見るように比較的かんたんに理解することができます。ここまでどんどん話を複雑にしてきたように見えて、実は (ス) だけは易しいのです。



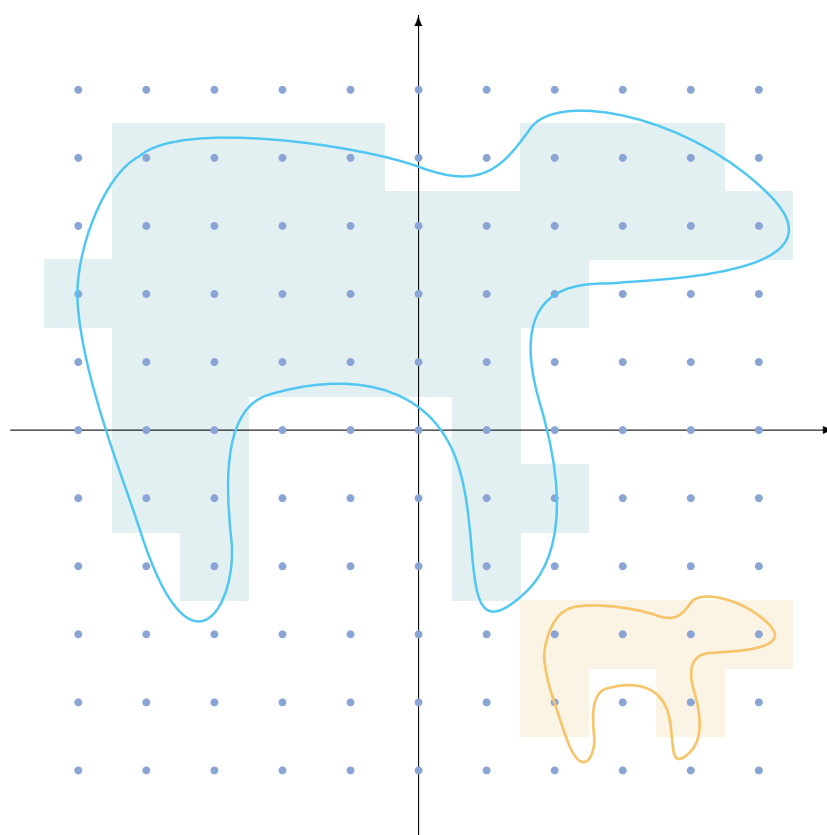
それでは、命題 (ス) を論証していきます。

a

証明に先立って、議論のなかで中心的な役割を果たす大切な考え方を説明しておきます。

平面上のなめらかな閉曲線の囲む領域の面積を測りたいとする。領域が十分に大きければ、その面積は領域内にある格子点の個数におおよそ等しい。^{1 2}

特に、領域の面積が大きければ大きいほど全体に対する誤差の割合は小さく無視できるようになります。これは積分（求積）の考え方のひとつのあらわし方と見なす事もできます。



ここでは厳密に証明しませんが、閉曲線内のそれぞれの格子点のまわりに、格子点を中心とする 1×1 の正方形を書いてみると、領域の面積を格子点数で近似できることがわかんと思います。³

¹ 格子点というのは x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことです。上の図では、水色の点々で示しています。

² 高等学校以降の数学では、面積は 1×1 の正方形のものを 1 として測り、単位は明示しないことが慣例になっています。

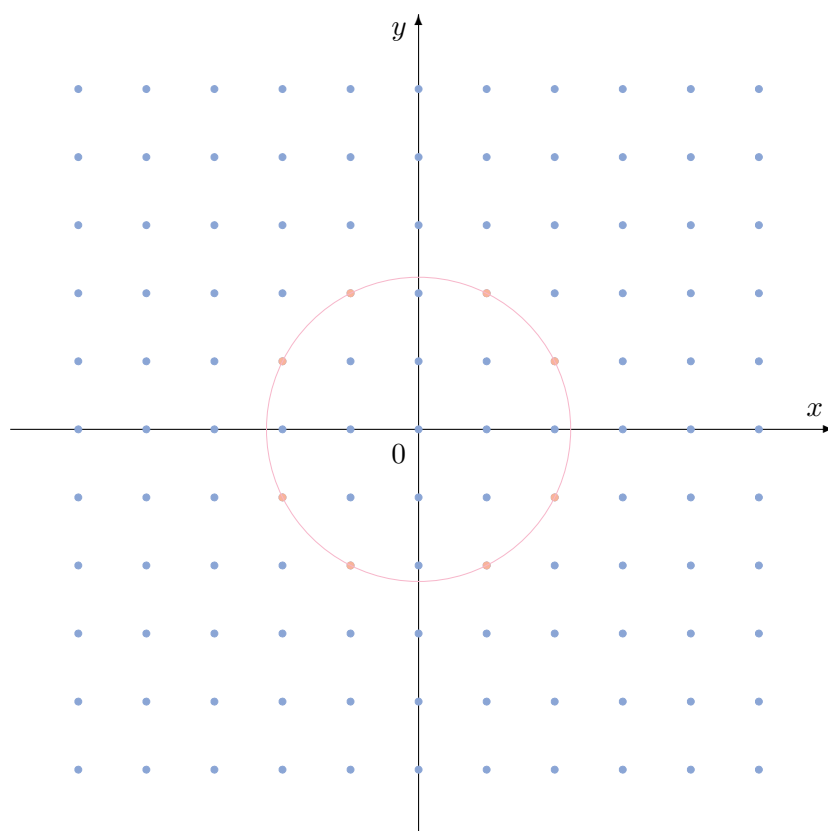
³ 詳細は補遺（別ファイル）で説明する予定なので、腑におちない方はそちらをご参照ください。

b

次に、円の方程式について復習しておきましょう。方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ は半径 r の円を表すのでした。中心は原点にあります。このことから

★ $d(n)$ は円 $x^2 + y^2 = n$ 上にある格子点の個数である

ことがわかります。例えば $d(5) = 8$ でしたが、これは半径 $\sqrt{5}$ の円上に格子点が 8 つ、 $(\pm 1, \pm 2)$ と $(\pm 2, \pm 1)$ の位置にあることに対応します。



c

さて、b で述べたことから

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) + 1 = (\text{半径 } \sqrt{n} \text{ の円の内部にある格子点の数}) \quad (\text{ギ})$$

が成り立ちます。 n が十分大きいと仮定したとき、右辺はおおよそ円の面積 $n\pi$ に等しいので

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) \sim n\pi$$

つまり

$$\frac{d(1) + d(2) + \cdots + d(n)}{n} \sim \pi \quad (\text{テ})$$

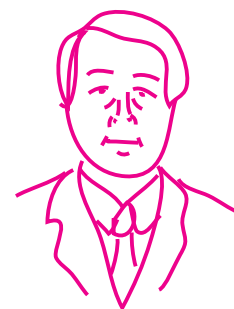
と書くことができる。ここで記号 \sim は『おおよそ等しい』という意味で使っています。 n を大きくしていくと誤差はなくなると考えられるので、(ス) が導かれます。(証明おわり)



結論

背景がわかってしまえば、(ス)に π が現れることは実に自然なことだといえます。ここでの証明の書き方は厳密なものではありませんが、微積分法を使えば、この議論に沿って厳密な証明を組み立てることはそれほど難しくありません。文献 [1] には本稿と同じ線に沿った証明が載せられています。一方で、1 で述べた定理 (ハ) はなかなか自然なこととは思えない、奥の深い話といっても良いと思います。この定理は『Fermat の 2 平方数定理』などの名前で知られ、証明は [1], [2], [3] などにあります。また 2 で登場した公式 (ル) は『Jacobi の公式』などと呼ばれ、証明は [1] などにあります。

この話に興味を持たれた方には、整数論の研究者である加藤和也氏の書かれた本を推薦します。[4] は数論の入門書で、Fermat の 2 平方数定理を含む大きな理論の広がりを感じることができます。高校生でも読めるように書かれた本ということで、ここに挙げた文献の中でもっとも読みやすいものだと思います。[5] は京都大学で行われた公開講座をもとにしたもので、より高い内容を扱っています。数学科や物理学科の大学生・院生がよく読んでいような水準の本ですが、最初の方はやさしく書かれているので、数学が得意な高校生・大学生くらいの方も敬遠せずに手に取ってみると楽しめるかもしれません。



加藤 和也
1952 -

今回の話のように、奥深い理論の一部分だけに手が届く、という現象は他の分野においても時々おこるもので、これは高い木の枝の先についた果実がたまたま手が届くところまでぶら下がってきている状態に似ていると私は思います。平均という上手な方法で情報を切り取った (ス) の結果とその証明は気の利いたものですが、(ハ) や (ル) など含む全体の理論の流れというのはどっしりとしていて広がりもあり、多様な読み方を許容するため息が出るほど見事な構造をもつものです。上に挙げた文献などとともに、ぜひ、そちらの方も機会があったら探求してみて頂きたいと思っています。

参考文献

- [1] 『数論入門 I』(G. H. ハーディ・E. M. ライト, シュプリングー・フェアラーク東京, 2001 年/丸善出版, 2012 年), 『数論入門 II』(G. H. ハーディ・E. M. ライト, シュプリングー・フェアラーク東京, 2001 年/丸善出版, 2012 年)
- [2] 『数論 I』(加藤和也・黒川信重・齋藤毅, 岩波書店, 2005 年), 『数論 II』(加藤和也・黒川信重・齋藤毅, 岩波書店, 2005 年)
- [3] 『天書の証明』(アイグナー・ツィーグラ・ホフマン, シュプリングー・フェアラーク東京, 2002 年/丸善出版, 2012 年)
- [4] 『数論への招待』(加藤和也, シュプリングー・フェアラーク東京, 2012 年/丸善出版, 2012 年)
- [5] 『フェルマーの最終定理・佐藤-テイト予想解決への道』(加藤和也, 岩波書店, 2009 年)

