

奈良女子大学文学部附属中等教育学校 公開研究会

数学科学習指導案

2003年11月22日(土) 10:15~11:05

1年 C組

指導者 数学科教諭 吉田信也

1. 題材

自作テキストを利用した幾何の学習

2. 目標

基本的な図形に関する知識・理解をもとに、論理的に他人を納得させる表現力としての証明の方法を習得する

意欲的に操作活動に取り組み、図形の中に美しい性質や規則性を見いだそうとする(関心・意欲・態度)

演繹的な推論の進め方や考え方を理解することができる(数学的な考え方)

自分が理解したことを自分なりの言葉で説明することができ、次に論理の組み立てが他人に正確に伝わるように証明することができる(表現・処理)

操作的活動を通じて、平面図形、空間図形の基本的性質を理解することができる(知識・理解)

3. 題材観

(1) テキスト

本校数学科では、前期課程のカリキュラムに則したテキストの作成を行っている。「幾何」については、2002年度から使用をはじめ、今年度は2回目である。昨年度の実践をふまえて、今年度は改訂を行いながら授業を行っている。

自作テキストの編集方針は、以下の通りである。

- 章や節の最初に、生徒の興味を引くような課題や、数学史の話題を提示する
- 書き込み式教科書にする
- 作業や実験を多く取り入れる

今年度の改訂版テキストにおける章立ては、

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| 1. 空間図形を楽しむ | 2. 平面図形の基礎 | 3. 点の集まりと作図 |
| 4. 円 | 5. 空間の直線・平面 | 6. 空間の立体 |
| 7. 球 | 8. 三角形の合同 | 9. 四角形 |

の9章であり、学習指導要領の内容に配慮しつつ、本校数学科独自のカリキュラムに基づいた構成となっている。

本校における幾何の学習は、美しいデルタ多面体、正多面体を実際に作成し、楽しみながら学習する第1章から始まる。平面ではなく空間図形から始めるのは、多面体を考える際に「ポリドロン」(図形学習教具、東京書籍)を利用して、実際に多面体を作るという作業を取り入れられるからである。そして、その実物を手にしながら、多面体の性質について考察し、それらの性質が成り立つ理由について考える授業を行う。このことで、中学(中等教育)における数学では、「なぜ」ということを考えるのが大切であることを認識させられると考えている。

その後、平面図形の学習に入り、作図等の作業をしながら第 4 章まで平面図形の基礎を学び、再び空間図形の学習を行う。第 6 章、第 7 章では空間の立体図形の計量について学ぶが、その際に計算方法だけではなく、様々な性質が導かれる過程を無理のない範囲で証明し、理解させるように考えている。

また、随所に数学史を取り入れ、数学がある日突然にできあがったものではなく、様々な数学者の叢智の積み重ねの上に立っていることや、数学の文化的な側面を伝えようと考えた。また、少々難しいと思われることでもコラムなどに入れながら、できる限りアカデミックな本物を提示しようと思がけた。

(2) 証明

中学校の幾何において、論証を本格的に学習するのは、平面図形の合同からである。そこでは、定義、定理、仮定、結論などを学習し、演繹的に論証を進めていくことを学ぶ。本校のテキストでいえば、第 8 章からである。

本校では、幾何の授業の最初から、「証明」を意識した授業を行っている。具体的には、

➤ なぜそういえるのか？

➤ いろいろな結果から成り立ちそうであるが、本当にそうなのか？

という問いかけを常に行っている。この問いかけに、自分なりの言葉で「説明」することを求めるのである。その中では、次のような段階を踏んだ指導を心がけている。

[1] まず、自分の言葉で自分が納得できる説明をしよう

[2] 次に、他人に納得してもらえる説明をしよう

[3] その説明をノートに書いてみよう

[4] 説明は言葉だけではなく、記号や図も利用して書いてみよう

[5] 黒板に書かれた説明と自分の説明を比較しよう

例えば、第 1 章の「空間図形を楽しむ」においては、正多面体が 5 種類しか存在しない理由を考えさせている。これは結構、生徒にとっては難しいが、実際に「ポリドロン」を使って正多面体を作っているのので、ほとんどの生徒が、自分なりに 5 種類しかない理由を直観的につかんでいる。例えば、正 6 角形を使って正多面体を作ろうと悪戦苦闘するが、どうしても平面になってしまうので、正 6 角形では正多面体は作れないのではないかと疑っている。そのような体験をした後で、その疑いを言葉にして説明するように、教師が主導しながら全員で考えていく。

また、見たところ正しそうであり、説明もできていそうな例を取り上げ、きちんとした証明の必要性を理解させることも行っている。例えば、 60° の角を 3 等分する問題である。何人かの生徒が「発見」した方法は、定規とコンパスで作図した後、分度器で測っても 20° に 3 等分できているようであった。しかし、作図ツールを利用して確認してみると、3 等分できていないことがわかる(資料)。このような体験をしながら、きちんと証明できないうちは、見た目だけで判断するのは危ないことを感じていく。

以上のように、早い段階から常に「証明」を意識した授業を行うことで、数学に不可欠な証明への意識、証明の力を身につけることができると考えている。

ただし、いたずらに厳密性を追うことは避けなければならない。生徒の実態や題材によって、直観的なものや実験的なものも「証明」とすべきであるし、先に習熟を図った上で、「証明」を考えさせることも重要である。「証明」に呪縛されることは、避けなければならない。

4. テクノロジーの利用

本校数学科では、テクノロジーを利用した授業で生徒の理解を深めるように研究を続けているが、幾何では主に Geometer's SketchPad(GSP)や Geometric Constructor for Java(GC/Java)を利用している。これらは作図ツールと呼ばれるソフトウェアであり、図形の幾何学的関係を保ちながら自由に図形を変形することができる。1年では主に教師が利用する提示型として、2・3年では生徒が利用して課題や定理を発見し考察する追究型として活用している。

GC/Java は、愛知教育大学の飯島康之氏が作成した Windows 上で作動する作図ツールの Geometric Constructor for Windows(GC/Win)をもとに開発されたものであり、ネットワークを通じて Web ブラウザにダウンロードされ、ブラウザのウィンドウに埋め込まれて実行される Java アプレットである。GC/Java の利点について、飯島氏は次のように述べている。

http://iijima.auemath.aichi-edu.ac.jp/gcjava/manual/gcwin_gcjava.htm

インターネット経由でホームページにアクセスするだけで使うことができる。

サーバで最新版に更新すれば、すぐに反映される。

GC/Win よりも多少速度が遅いが(特に軌跡を多く残したとき)最近の PC ならばほとんど気にならない。そして、GC/Win のかなりの機能が実現できている。

GC/Java で表示できるようなコンテンツ(教材のページ)を作れば、世界中の誰もが使えるものとして提供できる。

この GC/Java の特徴を生かして、2002 年度の 3 年で実践した課題学習については、

http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/Math/Digital_Text/index.htm

をご覧ください。

今回の授業では、*Mathematica* によって作成した立体図形も利用する。

5. 指導計画

第 6 章 空間の立体(全 5 時間)

第 1 時 6.1 立体の表面積(1)

第 2 時 6.1 立体の表面積(2)

第 3 時 6.2 立体の体積(1)

第 4 時 6.2 立体の体積(2) 本時

第 5 時 6.3 カバリエリの原理

6. 生徒の実態

今年度の 1 年生は、数学好きな生徒が多い。その 1 つの例として、文部科学省主催の SPP 事業における数学特別講義(埼玉大学教授 岡部恒治)にも十数人が参加し、2 日間、数学を楽しんだことがあげられる。中でも 1 年 C 組は、授業終了後も教卓付近まで来て質問する生徒が多く、知的な雰囲気のあるクラスである。静かに授業を受けるが、発問に対して自ら手を挙げて積極的に答えてくれる生徒もいる。

数学が苦手な生徒もいるが、それなりに数学に取り組んでいて、頑張ろうという気持ちは十分にある。6 年間の中等教育において、数学の「学力」差が拡大しないように、今後の丁寧な指導が必要だと考えている。

7. 本時の学習指導

7-1 ねらい

- ・錐体の体積の公式を予想できる(数学的な考え方)
- ・錐体の体積の公式が正しいことを確認しようとする(関心・意欲・態度)
- ・実験結果から、錐体の体積の公式が理解できる(知識・理解)
- ・様々な「証明」方法があることを理解できる(知識・理解)
- ・錐体の体積の公式を利用して、錐体の体積を求めることができる(表現・処理)

7-2 展開

評価の観点：

[関] = 関心・意欲・態度, [数] = 数学的な考え方, [表] = 表現・処理, [知] = 知識・理解

	学習活動	教師の主な発問と予想される生徒の反応 (発問, 指示・説明, 生徒の反応)	指導上の留意点・評価の観点
導入	<p>1. [課題 15]を理解する。</p> <p>2. 確かめる方法を考え、発表する。</p>	<p>課題 15 の柱体、錐体の名前を確認する。</p> <p>柱体と錐体の体積の関係を予想しよう。そして、その関係を確かめる方法を考えて、テキストやノートに書きなさい。</p> <p>机間指導を行い、生徒の書き込みをチェックし評価する。</p> <p>柱体、錐体の模型に、水を入れて実験すればよい。</p> <p>柱体、錐体の重さを比べればよい。</p> <p>小さな立方体をピラミッド状に積み上げて、柱体の個数と比較すればよい。</p> <p>確かめる方法を、発表させ板書していく。</p> <p>それぞれの方法で、体積の比較ができることを確認する。</p>	<p>柱体、錐体の名前は、学習済みである。</p> <p>塾などで学習して、すでに錐体の体積の公式を知っている生徒も多いと思われる。そのような生徒には、確かめる方法を考えさせる。</p> <p>[関] 興味・関心を持って、確かめる方法を考えることができるか。</p> <p>[数] 水の量や重さの比較で、錐体の体積を予想できるか。</p>

学習活動		教師の主な発問と予想される生徒の反応 (発問 , 指示・説明 , 生徒の反応)	指導上の留意点・評価の観点
展開	3 生徒から出てきた方法を実際に行い, 公式を確認していく。	<p>水の実験は, 教師が前で行う。</p> <p>重さを量る実験は, 生徒を前に出して目盛りを確認させる。</p> <p>小さな立方体を積み上げるのは教師が行い, 個数の数え方を考えさせる。</p> <p>1 個ずつ数えてもいいけれど, もっとうまい方法はないかな?</p> <p>$1 + 2^2 + 3^2 + \dots$ と考える。</p> <p>コンピュータによるシミュレーションで, $\frac{\text{四角錐をなす小立方体の個数}}{\text{立方体をなす小立方体の個数}} \rightarrow \frac{1}{3}$ となることを納得させる。</p> <p>このような 近似をより正確にしながら考える方法は, 数学では重要なものであることを伝える。</p> <p>実験の結果からわかったことを, ノートにまとめさせる。</p>	<p>水の実験道具, 柱体, 錐体, 秤, 立方体の積み木, 直方体の 3 分割の教具を用意する。</p> <p>[知] 実験結果から, 錐体の体積が柱体の体積の $\frac{1}{3}$ であることを理解できるか。</p> <p>Mathematica で作成したファイルを用意しておく。</p> <p>立方体を積み上げる考え方が出なければ, 「錐体の代表的な建造物は?」などと誘導する</p> <p>微分・積分法の名前を出してもよい。</p>
	4 問 6.3 を考える。	<p>もっと別の方法はないだろうか?</p> <p>問 6.3 を考えさせる。</p> <p>3 つ使って, 立方体を作る。</p> <p>問 6.3 の結果は, 先の実験結果と同様のことを示していることを確認する。</p> <p>別の直方体の 3 分割を示し, 柱体と錐体の体積の関係を確認する。</p>	<p>問 6.3 の立体は, 事前に宿題として家で作ってくるように指導しておく。</p> <p>1 つの事柄を示すにも, 様々な考え方, 方法があることを理解させたい。</p>
まとめ	5 定理 6.3 をまとめる。	<p>定理 6.3 を完成しなさい。</p> <p>問 6.4 を解かせて, 錐体の体積の求め方に習熟させる。</p>	<p>実験結果, 直観的な証明を再確認し, 公式の使い方を練習させる。</p> <p>[表] 錐体の体積を求めることができるか。</p>

7 - 3 評価場面・方法

(1) 数学的な考え方

- ・錐体と柱体の体積の関係を確かめる方法を考える
- ・テキストやノートをチェックして評価する

(2) 表現・処理

- ・問 6.4 を解く
- ・ノートをチェックし, 解答を板書させて評価する

