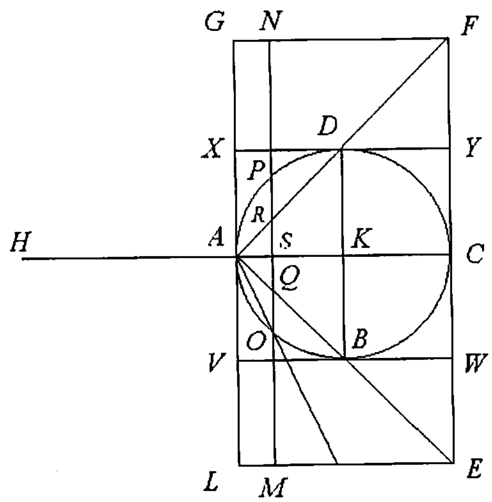
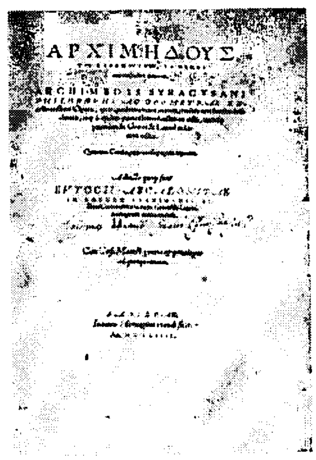
幾何Ⅰ





Archimedes (c.287B.C-212B.C).

Philosophi ac Geometriae Excellentissimi Opera,,,.

Basileae, 1544, First edition.

(金沢工業大学ライブラリーセンター所蔵)

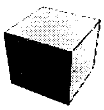
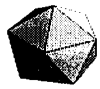
奈良女子大学文学部附属中等教育学校
数学科

2003/4/17

1　空間図形を楽しむ

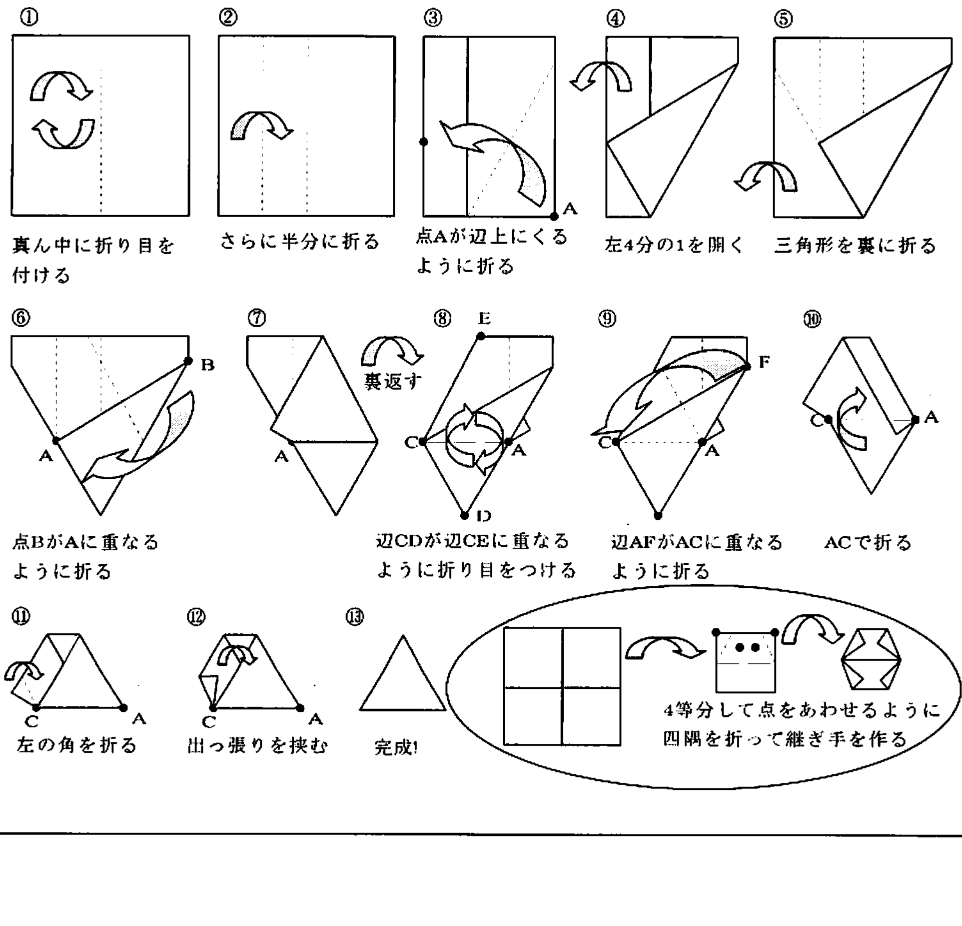
1.1　折り紙やポリドロンで正多面体を作ろう

人間はギリシャ時代から，美しい立体に心を奪われてきました。古代ギリシャの哲人プラトン (B.C.427〜347) は，宇宙のものすべては「火，土，水，空気」でできていると著書『ティマイオス』で述べています。そして，それらの形については，次のように考えていました。

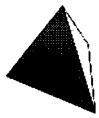
火＝  ，土＝  ，水＝  ，空気＝ 

また，プラトンから 2000 年ほど経った 1596 年に，当時 25 歳だった天文学者ケプラー (1571〜1630) は，著書『宇宙の神秘』の中で，水星，金星，地球，火星，木星，土星の 6 つの惑星とこれらの美しい立体とを関連づけて考えました。そして，それらの調和した関係を説明するために研究を重ね，「ケプラーの 3 法則」を発見したのです。ケプラーについての詳しいことは後で見ることにして，早速，美しい立体を自分で作ってみよう。

課題 1　**下図を見ながら，正三角形の板を，*1* 人 *20* 枚作りなさい。**



課題 2　下図のような，正３角形だけで作られる凸多面体を，デルタ多面体といいます。異なるデルタ多面体は，何種類あるか考えよう。



［予想］

［実験］　実際に正三角形の板で，デルタ多面体をできるだけたくさん作りなさい。

問 1.1　作ったデルタ多面体の面の数，頂点の数，辺の数を次の表にまとめなさい。

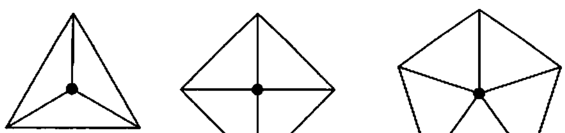
デルタ多面体の名前	面の個数	辺の個数	頂点の個数
	4		

問 1.2　上の表から，何か法則を見つけよう。

以上のことから，次の定理が成り立つことが予想できます。

定理 1.1　多面体の頂点の個数を v，辺の個数を e，面の個数を f とすると，

次に，違う観点でデルタ多面体を調べてみよう。下図のように，デルタ多面体の頂点に名前をつけます。



3面頂点　　4面頂点　　5面頂点

問 1.3　次の表を埋めながら，デルタ多面体を 2 種類に分類しよう。

	3 面頂点	4 面頂点	5 面頂点
4 面体			
6 面体			
8 面体			
10 面体			
12 面体			
14 面体			
16 面体			
20 面体			

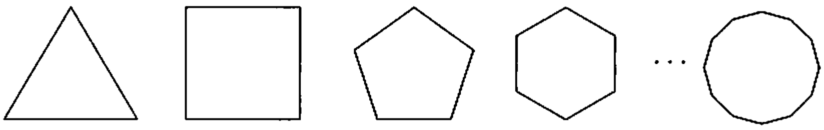
問 1.4　20 面体より面の数が多いデルタ多面体は，存在するだろうか？

1.2 正多面体

すべての面が正三角形だけで作られたデルタ多面体は，8 種類あることがわかった。そして，その中で面頂点が 1 種類だけのデルタ多面体は，(　　　　　　　)と(　　　　　　　)と(　　　　　　　)であった。このような多面体を，**正多面体**という。

定義 1.1　どの頂点にも，同じ形の正多角形が同じ数だけ集まっていて，それらを面とする多面体を，正多面体という。

正多面体は，平面上の正多角形と似ている。正多角形は，正 3 角形，正 4 角形 (正方形)，正 5 角形，正 6 角形，···，正 100 角形，··· といくらでも角の数を増やしていくことができる。



さて，正多面体ではどうだろう？

課題 3　正多面体は，全部で何種類存在するか，実際に作って調べよ。また，その理由を説明しなさい。

[予想]

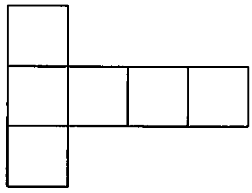
[説明]

定理 1.2　　**正多面体は，次の (　　　) 種類が存在する。**

次に，これらの正多面体を，1 枚の紙から組み立てるためにはどうすればよいかを考えよう。

定義 1.2　　**立体図形を，辺 (縁) に沿って切り開いてできる平面図形を，<u>展開図</u> という。**

例 1.1　　正 6 面体の展開図の 1 つは，下図です。



問 1.5　　例 1.1 以外の正 6 面体の展開図を描きなさい。

練習 1.1　　正 4 面体，正 8 面体，正 12 面体，正 20 面体の展開図を描きなさい。

1.3　ケプラーの考え

正多面体について，これまでにわかったことを整理すると，次のようになる。

正多面体	面の図形	頂点の個数	辺の個数	面の個数	1 頂点に集まる面の個数
正 4 面体	正 3 角形	4	6	4	3

問 1.6　上の表から，正多面体の頂点の個数と面の個数に関して気づいたことを書きなさい。また，その結果から，それらの正多面体どうしにどんな関係があるか分かりますか？　図で表してみよう。

最初に述べたように，天文学者ケプラー(下右図)は，著書『宇宙の神秘』の中で，水星，金星，地球，火星，木星，土星の 6 つの惑星とこれらの正多面体とを関連づけて考えました。

当時の天文学者は，下左図のように，惑星はそれぞれの同心球に貼り付いていると考えていました。そして，ケプラーは，6 つの惑星が作る同心球の殻の間にできる 5 つの隙間に，下中図のように 5 種類の正多面体をおきました。

水星－正 8 面体－金星－正 20 面体－地球－正 12 面体－火星－正 4 面体－木星－正 6 面体－土星

ケプラー博物館より

ケプラー博物館より

『ASTRONOMY』FRED HOYLE より

このように考えると，これら 5 つの正多面体は，外側の球殻に内接し，内側の球殻に外接するというきれいな関係をなしているのです。神が作った宇宙は，幾何学的に完璧なものと考えていたケプラーは，球と正多面体でできた太陽系を考えていたのでした。

しかし，このモデルは，ケプラーの師匠であるティコ・ブラーエのデータとあわないので，あきらめることになりました。その後，様々な図形をあてはめようとして失敗を繰り返しながら，とうとう火星の楕円軌道にいきついたのです。つまり，いまでいう「ケプラーの 3 法則」を発見したのです。

2 平面図形の基礎

2.1 ユークリッド幾何学

先生 これからは，平面図形について学習していきます。この図形に関する学問のことを，数学ではかっこよく「幾何学」といいます。その中でも，ユークリッドという数学者が研究した幾何学である「ユークリッド幾何学」を勉強するのです。

ひろき ユークリッドって誰さ？ そんな人がいるから，俺たちこんな勉強をしなければならないんだから・・・

先生 まあそう言わずに。ユークリッドというのは，ギリシャ時代の数学者で，『原論』(右図) という本を書いたことで有名なんだ。紀元前 330 年から 275 年頃に生きたといわれているけれど，はっきりしたことは何にもわかっていない数学者だ。一説によると，一人の数学者ではなくて何人かの数学者が協力して『原論』を編纂 (へんさん) したのではないかとも言われている。

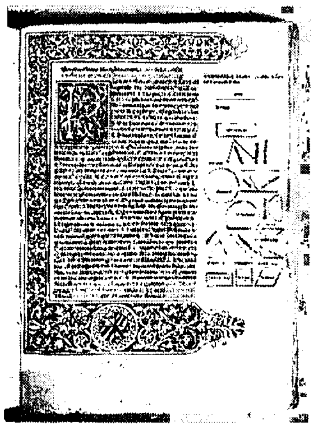


図 1: ユークリッド『原論』ヴェネツィア版（1482 年，初版）金沢工業大所蔵

あつき へー，数学ってそんなに古くからあるんだ。ギリシャの他では，そんな数学ってのはなかったの？

先生 いやいや，数学ってのはずいぶん古くから考えられていて，エジプト，バビロニア，中国などの他の文明にもあったんだ。でも，ギリシャ数学がそれらの数学と著しく異なる点は，「公理的論証数学」だったところだ。

ひろき 「こうりてきろんしょうすうがく」？ 何のこっちゃ？

先生 いや，いきなり難しい言葉を使ってごめん。簡単に説明しよう。昔から，幾何学は土地の測量などと関係が深かったんだ。例えば，古代エジプトでは毎年ナイル川が氾濫したので，土地の区画をやり直さなければならなかった。そんなとき，何がいちばん大事だと思う？ あつき？

あつき そりゃ，元通りにきちんと分けるために，いかに正確に計るかということだと思います。

先生 そうなんだ。ギリシャ以外の文明の数学は，ある量をどのようにして求めるか (*How to*)，その量の大きさはいくらか (*How large*) ということをいちばんに考えていたんだ。ところが，ギリシャ数学は，なぜかということを考え (*Why*)，その理由を説明して納得させる方向 (*Proof*) へ進んだんだよ。

かな そんなことをしても，何の得にもならないのにね。ほんとヘン。

あつき でも，それは偉大だよ。他のどの文明もしなかったことをやり遂げたのだから。でも，不思議ですね。どうしてギリシャ人だけそんなことを考えたのだろう？

先生 それにはいろいろな説があるんだが，当時の社会が「奴隷制度」であったことが関係しているという人もいる。その当時のギリシャでは，実用的な仕事，例えば医者ですら奴隷の仕事だったんだ。しかし，数学は当時、上流階級の必須の教養だったんだ。だから，数学も実用性を排して理念を重視したと考えられる。こんなエピソードもあるよ。当時の王様プトレマイオス一世がユークリッドに「幾何を学ぶのに『原論』を読まずにすます方法はないか」と尋ねたところ，ユークリッドは「幾何に王道はありません」と答えたという。王様も『原論』で幾何を勉強していたんだ。

まりか へー，それはすごい！ 二次方程式を知らなくても生きていくのに不自由はしなかった，と発言した某女性作家の意見がとり入れられる日本と比べると，全然違う世界だね。

先生　そうだね。このような歴史をもっている数学の文化的側面を見ることができないなんて，文化人に値しないね。さて，横道にそれてしまったけれど，『原論』に話を戻してまとめておこう。『原論』で証明されている定理の1つ1つも大切だけれど，ユークリッドの『原論』の最も重要な点は，

最小限の定義と公理から出発して，すべてを論理的に導いていくこと

なんだ。定義，公理とは何かということは，後で説明するね。そのために，その後2000年間『原論』は数学の教科書であって，聖書に次ぐベストセラーだといわれている。現在にも引き継がれている数学あるいは論理体系の，1つのスタイルを創り上げたのだ。

あつき　そんなにすごい『原論』なら，どんなことが書いてあるのか興味があるな～。先生，ちょっと教えてください。

ひろき　あ～あ，これだから優等生の考えることは分からないや。

かな　ほんと。でも，実は私もちょっとだけ興味があるの。なぜって，2000年以上も前に書かれたすごい数学書ってどんなものか見てみたいから。

2.2 『原論』のさわり

『原論』は全部で13巻からなる，ギリシャ数学の最大の遺産である。その第1巻は，23の定義から始まる。ここで，言葉の約束をしよう。

定義とは，ある言葉の意味をはっきりと定めたもの

である。『原論』にある定義をいくつか見ていこう。

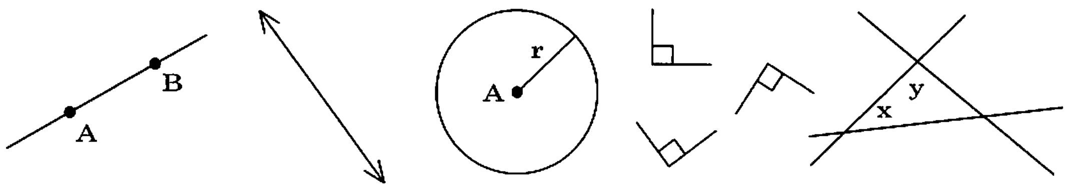
[定義1] 点は部分のないものである。
[定義2] 線は幅のない長さである。

何とも当たり前のことを述べているが，このような定義が続いた後で，5つの有名な公準が続く。
ここで，また言葉の約束をしよう。

公準とは，いまでは公理と読んでいるものと同じで，誰でも正しいと認められるもの

である。『原論』には，次の5つの公準が書かれている(言葉は易しく言い換えてある。次ページの図を参照)。これが『原論』の出発点だ。このたった5つの公準だけから出発したところが，『原論』の偉大さの1つである。

[公準1]2つの点A，Bが与えられれば，A，Bを通る直線が引ける。
[公準2] 直線を両側にいくらでも延長することができる。
[公準3] 点Aと数値rを与えれば，Aを中心とした半径rの円が描ける。
[公準4] すべての直角は互いに等しい。
[公準5]1つの直線が2つの直線と交わり，その一方の側にできる2つの角の和が2直角より小さくなるときは，それらの2つの直線を延長すれば，合わせて2直角より小さい角のできる側で交わる。



[公準1]　[公準2]　[公準3]　[公準4]　[公準5]

問 2.1　これらの 5 つの公準を見比べたとき，何か気づいたことはありませんか。

> **定義 2.1**　2 本の直線 m, n が交わらないとき，m, n は平行であるといい，$m//n$ とかき，「m へいこう n」と読む。

この公準 5 は，次のように簡単に言い換えることができる。

[公準 5] 直線 m の上にない 1 点 P を通る m に平行な直線は，ただ 1 本だけ存在する。

でも，公準 5 が他の公準に比べて異常に長くて複雑なのはどうもおかしい，とユークリッドは考えていたようだ。また，後世の様々な数学者も同様に考えて，いろいろ試みた。その結果がどうなったかは，コラムでのお楽しみ！

とにかく，ユークリッドは『原論』において，23 個の定義と上記の 5 個の公準だけから出発して，**必ず成り立つこと (定理)** を導き，またそれらを利用して新しい定理・命題を導き，・・・と証明を積み重ねていった。このような方法を**演繹**(えんえき) 的方法という。

『原論』は，この画期的なスタイルを初めて採用したのであり，これはその後 2000 年以上も数学や論理的方法をとる科学において採用されている。

コラム

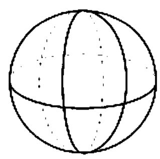
『原論』の公準 5 は，他の公準に比べるとあまりにも複雑なので，公準 5 は公準 1〜4 から導けるのではないかと多くの数学者が考えた。そして，懸命な努力が続けられたがうまくいかず，決着がついたのはなんと 19 世紀であった。

『原論』における幾何学は，**「直線 m の上にない 1 点 P を通る m に平行な直線は，ただ 1 本だけ存在する」**ことを要請する幾何学であった。これを**「ユークリッド幾何学」**という。

それに対して，19 世紀に J. ボヤイ (1802〜1867) とロバチェフスキー (1793〜1856) によって発見された幾何学は，**「直線 m の上にない 1 点 P を通る m に平行な直線は，2 本以上存在する」**いう幾何学であった。

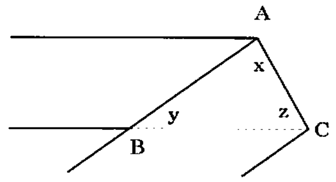
さらに，リーマン (1826〜1866) が発見した幾何学は，**「直線 m の上にない 1 点 P を通る m に平行な直線は，存在しない」**という幾何学であった。

これら 2 つの幾何学を**「非ユークリッド幾何学」**という。



2.3　直線と角

課題 4　ひろき君は，暇なので，紙テープを折って遊んでいました。ひろき君は下図のように折ってみたところ，$\angle x$ と $\angle z$ が同じ大きさであることに気がつきました。ひろき君の発見が正しいか，正しくないか説明しなさい。



問 2.2　それぞれ自分の紙テープを折って分度器で測り，ひろき君の発見が正しいかどうかを実験しよう。

問 2.3　クラス全員の実験結果から，どんなことが予想できるだろうか。

では，これから課題 4 を解決するために，学習を進めよう。

定義 2.2　直線とは，まっすぐに限りなく延びている線のことである。

問 2.4　下の空白に，適当に 3 点 A, B, C をとりなさい。

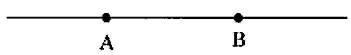
(1)　点 A を通る直線を書きなさい。また，その直線は何本ありますか。

(2)　2 点 B, C を通る直線を書きなさい。また，その直線は何本ありますか。

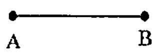
(3)　3 点 A, B, C を通る直線を書きなさい。

上のことから，1 点を通る直線は$\boxed{\qquad\quad}$あるが，2 点を通る直線は$\boxed{\qquad\quad}$しかない。つまり，直線は$\boxed{\qquad\quad}$で決まる図形であることが分かる。

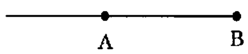
定義 2.3　直線の一部分で，両端のあるものを <u>線分</u>，片方の端だけがあって他の方へは限りなくのびているものを <u>半直線</u> という。



(　　　　　)



(　　　　　)

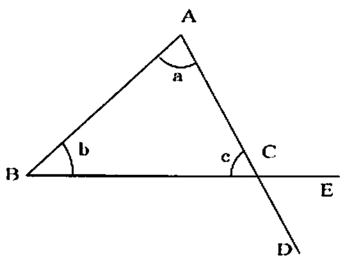


(　　　　　)

練習 2.1　ノートに 4 点 A, B, C, D をとりなさい。ただし，どの 3 点も同じ直線上にないものとします。このとき，次の図形をかきなさい。
(1)　直線 AB　(2)　線分 BC　(3)　半直線 CD　(4)　半直線 DB

2 点 A, B を結ぶ線のうち，いちばん距離が短いのは直線である。このとき，A と B の距離を **AB** とかく。

下図の三角形 ABC において，頂点 A における角を $\angle CAB$ または $\angle A$ または $\angle a$ と表す。同様に，頂点 B における角を $\boxed{\qquad\qquad}$ または $\boxed{\qquad\qquad}$ または $\boxed{\qquad\qquad}$，頂点 C における角を $\boxed{\qquad\qquad}$ または $\boxed{\qquad\qquad}$ または $\boxed{\qquad\qquad}$ と表す。そして，これらをまとめて**三角形 ABC の内角**という。
また，下図において，$\angle ACE$ を頂点 C における**外角**という。



問 2.5　(1)　頂点 C における外角は，他にもありますか？
(2)　頂点 A, B における外角を説明しなさい。

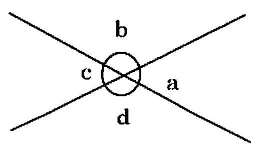
さて，三角形の内角について，調べてみよう。

問 2.6　ノートに三角形をかいて分度器で内角を測り，何か性質を見つけよう。

問 2.6 より，次の定理が成立することが予想される。

> **定理 2.1**　三角形 ABC において，　　　　　　　　　　　　　　である。

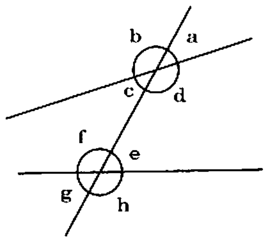
分度器での計測では，誤差もあって定理 2.1 が正しいかどうかは分からない。
そこで，ギリシャ数学から始まった「証明」というものが必要となる。でも，定理 2.1 を証明するには，もう少し直線に関する知識が必要だ。

> **定義 2.4**　下図のように 2 直線が交わっているとき，$\angle a$ と $\angle c$ を <u>対頂角</u> という。$\angle b$ と $\angle d$ も対頂角である。
>
> 
>

> **定理 2.2**　対頂角は等しい。

［説明］定義 2.4 の図において，

定義 2.5 *2* 直線があって，それに *1* 本の直線が交わっているとき，下図の $\angle c$ と $\angle e$ のような位置にある *2* つの角を **錯角** という。また，$\angle b$ と $\angle f$ のような位置にある *2* つの角を **同位角** という。

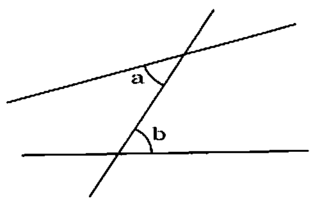


問 2.7 (1) 上図で，すべての錯角をいいなさい。
(2) 上図で，すべての同位角をいいなさい。

定義 2.1 で述べた平行線には，美しい性質がある。

定理 2.3 *(平行線の性質)* *2* 本の直線に *1* 本の直線が交わるとき，
(1) *2* 本の直線が平行ならば，錯角は等しい。
(2) *2* 本の直線が平行ならば，同位角は等しい。

［説明］(1) 平行線を $m, n, \angle a$ と $\angle b$ を錯角とする。
もし，平行線 m, n において $\angle a < \angle b$ とすると，m と n を左の方にのばしていくと交わる。
また，$\angle a > \angle b$ とすると，右の方にのばしていくと交わる。
いずれにしても，m, n が平行であることに矛盾する。
よって，$\angle a = \angle b$ でしかあり得ない。
ゆえに，$m//n$ ならば，$\angle a = \angle b$ である。



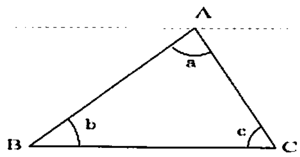
(説明終わり)

問 2.8 定理 2.3 の (2) 同位角の場合を説明しなさい。

さて，これで定理 2.1 の証明ができるが，証明について確認しておこう。

証明とは，公理や定義，すでに証明された定理等を用いて，誰もが納得する説明をすること

［定理 2.1 の証明］　右図において，



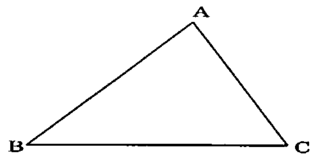
(Q.E.D.)

✎ これからは，(証明終わり) を (Q.E.D.) とかく。これは，ラテン語の quod erat demonstrandum の略であり，英語では，which was to be proved という意味である。

三角形の内角の和が 180° であることが証明できたが，三角形の内角と外角には，次のような関係がある。

定理 2.4　**三角形の *1* つの外角は，その隣にない *2* つの内角の和に等しい。**

［証明］



さて，平行線の性質を利用して定理 2.1 の証明ができた君たちは，課題 4 が正しいことを証明できる。

問 2.9　課題 4 における，ひろきの発見 (テープの角度) が正しいことを証明しなさい。

課題 5　**定理 *2.1*「三角形の内角の和は *180°*」の結果から，君はどのようなことを類推しますか？つまり，定理 *2.1* に似た他の美しい性質を発見して，その結果をレポートで提出しなさい。**

問 2.10　1 組の三角定規を使って，平行な直線をかきなさい。

問 2.10 は，1 つの平行線の描き方を示しているが，これを定理の形にまとめると，次のようになる。

定理 2.5　***(平行線になる条件)2* 本の直線に *1* 本の直線が交わるとき，**

(1)

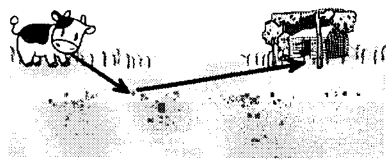
(2)

最後に，三角形の辺の間には次の関係が成り立つことを知っておこう。

3　点の集まりと作図

3.1　抽象化

課題 6　右下図のように，牛を草原から川まで連れていって水を飲ませ，牛小屋に連れて帰ります。このとき，牛の移動距離が最小になるようにするには，川のどこで水を飲ませればいいでしょう？



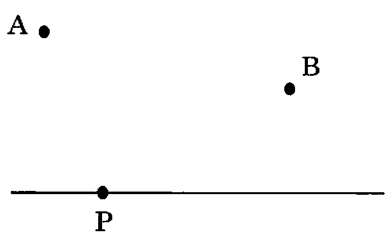
このような問題を考えるときの 1 つの方法は，水を飲ませる場所を何回も変えて，そのたびに移動距離を測って最小になるときを探すというものだ。でも，こんな事はやってられないし，もし最小らしき場所が見つかっても，果たしてそれが本当に最小になるという保証は何もない。

では，どうするか？

ここで，数学の出番なのだ。この問題を数学的に考えるときは，まず，

- 牛を点 A
- 牛小屋を点 B
- 川の水辺を定直線 m

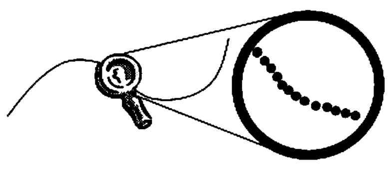
としてしまうのだ。このように考えることを，**抽象化**(ちゅうしょうか) という。



こう考えると，課題 6 は，右図において，$AP+PB$ が最小になる直線 m 上の点 P の位置を求める問題となる。右図を縮図で描いておき，正確に点 P の位置を作図できれば，実際の水飲み場を決定できるというわけだ。

この章では，課題 6 を解決するためにも，定規とコンパスで正確に作図する基本的な方法を学習しよう。

3.2　点の集まりと図形



ノートに，自由に鉛筆で線を描いてみよう。そして，その線を「頭の中のバーチャルな顕微鏡」で覗いてみよう。すると，無限に小さな点が無数に並んでいるのが見えるだろう。つまり，

線は点の集まり

とみることができる。この観点で，身近な図形を考えてみよう。

問 3.1　(1)　ノートに適当に定点 O をとり，O から 3cm の距離にある点をたくさんとりなさい。
(2)　(1) でとった点の集まりは，どんな曲線を描いていますか？

定義 3.1　定点 O から一定の距離 r にある点の集まりは，$\boxed{}$ の $\boxed{}$ である。

2.5 角いろいろ

90° の角は重要な角なので，ちゃんと直角と名前が付いている。では，直角以外の角には名前がないのだろうか？ 実は，その他大勢にだけれど，次のように名前が付いている。

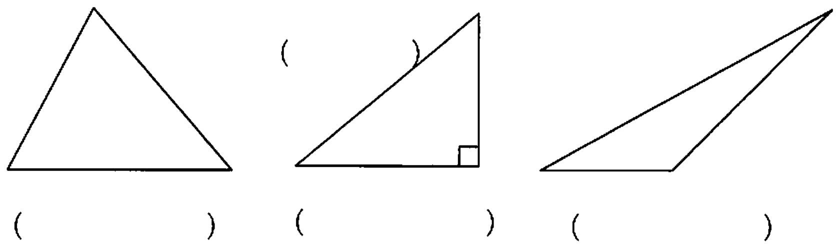
定義 2.6 *(1)* 90° より小さい角を，<u>鋭角</u>(えいかく) という。
(2) 90° である角を，<u>直角</u> という。
(3) 90° より大きく，180° より小さい角を，<u>鈍角</u>(どんかく) という。

✎ 直角のことを，$\angle R$ と表すことがある。

問 2.14 三角形において，2 つの内角がともに鈍角になることはありますか？

このことから，三角形は内角の大きさによって，次の 3 つに分類される。

定義 2.7 *(1)* 3 つの角がすべて鋭角である三角形を，$\boxed{\qquad\qquad}$ という。
(2) 1 つの角が直角である三角形を，$\boxed{\qquad\qquad}$ という。
(3) 1 つの角が鈍角である三角形を，$\boxed{\qquad\qquad}$ という。



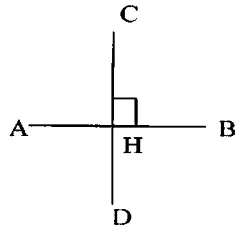
三角形の分類

コラム

これから数学では，いろいろなギリシャ文字が登場するので，一覧表をあげておきます。

ギリシャ文字	読み方	ギリシャ文字	読み方	ギリシャ文字	読み方
α	アルファ	ι	イオタ	ρ	ロー
β	ベータ	κ	カッパ	σ	シグマ
γ	ガンマ	λ	ラムダ	τ	タウ
δ	デルタ	μ	ミュー	υ	ユプシロン
ε	イプシロン	ν	ニュー	φ, ϕ	ファイ
ζ	ゼータ	ξ	クシー	χ	カイ
η	イータ	o	オミクロン	ψ	プサイ
θ, ϑ	シータ	π	パイ	ω	オメガ

2.4 垂直



平面上の異なる 2 直線の間の関係は,

- 交わる
- 平行

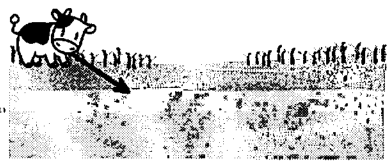
の 2 つがあった。

2 直線 AB と CD が点 H で交わる場合，特に $\angle AHD$ が直角であるとき，AB と CD は**垂直**である，または**直交**するといい，記号で,

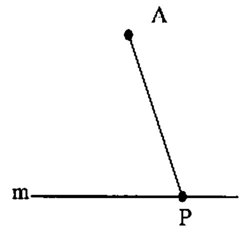
$$\mathbf{AB \perp CD}$$

と表し,「AB 垂直 CD」と読む。

このとき，AB を CD の**垂線**という。もちろん，CD も AB の垂線である。



問 2.11 右図のように，牛を草原から川まで連れていって水を飲ませます。歩く距離を最小にするには，どこで水を飲ませるとよいでしょう？



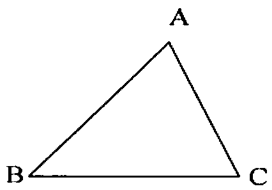
問 2.12 右図において，点 A は定点であり，点 P は直線 m 上を動く点とする。このとき，線分 AP の長さが最小になる m 上の点を H とすると，H はどんな点ですか？ また，AH が最小になることを説明しなさい。

問 2.12 の後半部分を証明するためには，次の定理が必要だ。

定理 2.7 三角形 ABC において,

(1) $BC > CA$ ならば $\angle A > \angle B$

(2) $\angle A > \angle B$ ならば $BC > CA$



この証明は少し難しいので，代わりに GSP で実験してみよう。

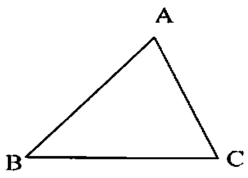
Computer 1 定理 2.7 が成立することを，GSP で確認しなさい。

問 2.12 における線分 AH の長さを，**点 A と直線 m との距離**という。

✎ 定点とは止まっていて動かない点のことであり，動点とは動く点のことである。

問 2.13 点と直線の距離を定義したが，直線と直線の距離は考えられるだろうか？ 考えられるとすれば，それはどんな場合だろう？

定理 2.6 三角形 ABC において，辺の間に次の関係が成り立つ。
$AB + AC > BC \qquad AC + BC > AB \qquad BC + AB > AC$



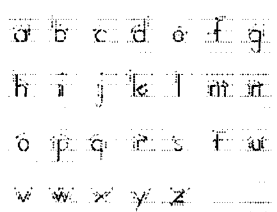
これは，要するに「2 辺の和が他の 1 辺より大きい」ということである。証明は，結構，準備することが多いので省略する。興味のある人は，調べてみなさい。

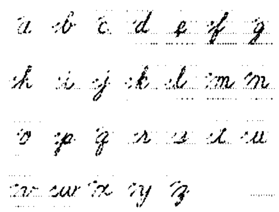
定理 2.6 は，昭和の小説家である菊池寛が，「数学で唯一役立った定理だ」と言ったという話だ。日本の文学者には，なぜこうも数学嫌いが多いのだろう？

コラム
定理 2.5 は，定理 2.3 の逆という。詳しいことは後で学習するが，この 2 つの定理では何が「逆」になっているか分かりますか？
数学においては「逆」という概念は非常に重要なものであり，これからの 6 年間で頻繁 (ひんぱん) に登場する。さらにいえば，ある定理があると，その逆が成り立つのかな？ と考えてみることは，数学の力をつける上でも大変望ましいことである。このことは，頭の隅に入れておこう。

コラム
定理 2.3 の説明では，「矛盾 (むじゅん)」を導いて定理が成立することを示しています。このような方法を，数学では「**背理法**」といいます。
辞書によると，矛盾とは，「つじつまがあわないこと。論理が一貫しないこと。」となっていますが，この言葉のいわれを知っていますか？ 矛は槍のようなもの，盾は防御の道具であり

コラム
アルファベットには，ブロック体 (左図) と筆記体 (右図) の 2 つがあります。





数学では，筆記体を用いることが多いのです。それは，例えばブロック体の"b" は，数字の"6" と間違えやすいからです。ただし，"z" はブロック体で真ん中に小さな斜め棒をつける人が多いようです。

円は，1 点から一定の距離にある点の集まりの図形である。次に，1 つの直線から一定の距離にある点の集まりの図形を考えよう。

問 3.2　(1)　ノートに適当に 1 本の直線 m を描き，m から 3cm の距離にある点をたくさんとりなさい。
(2)　(1) でとった点の集まりは，どんな曲線を描いていますか？

定義 3.2　**直線 m から一定の距離 r にある点の集まりは，m に $\boxed{\quad\quad\quad}$ な $\boxed{\quad\quad}$ である。**

コラム
いま学習しているユークリッド幾何では，定規とコンパスの役目は限定されているんだ。
定規は目盛りがついていなくて，直線を引くのに使えるだけで，長さは測れない。これはかなり強い制限だね。そして，コンパスは円を描くためだけに使えるんだ。そのコンパスにも，ユークリッドは「コンパスを紙から離したら，コンパスを必ず閉じなければならない」という制限をつけていた。
なぜこんな制限をつけていたのかというと，『原論』では，次の命題を証明しているからなんだ。

命題 2　与えられた点から，与えられた線分に等しい長さの線分を引くことができる

この命題が証明できれば，上で述べた「閉じる」という制限は必要ないね？　じゃあ，はじめからそんな制限をつけずに，命題 2 を認めておけばいいじゃないか，ということになるけれど，そこが『原論』(ギリシャ数学) の『原論』たるところだ。すなわち，

公準として最初に認めておくことは最小にしておきたい

というギリシャ数学の意思表示なんだね。

3.3　基本作図

課題 7　**トゥメンバイヤー，トグラック，ナラの 3 人は，一緒に遊びに出かけるために，モンゴルの大平原で待ち合わせをすることにしました。やはり 3 人のゲルから等距離にあるところで待ち合わせするのがよいと考えたのですが，その場所をどこにすればよいのか分かりません。3 人に代わって，その場所を考えてあげてください。**

トゥメンバイヤー

トグラック

ナラ

問 3.3　課題 7 を抽象化しなさい。

さて，抽象化して数学の世界に持ち込んだ。次はどうしよう…。数学の世界で(だけとは限らないが)よく使われる考え方に，デカルト曰く**「困難は分割せよ」**というのがある。いまの場合は，一気に3人の家から等距離にあるところ，と考えるから難しい。そこで，困難を分割しよう。

問 3.4　課題7の困難を分割して，考えてみよう。

(1) トゥメンバイヤーとトグラックの家から等距離にある場所は，どこにあるだろう？　等距離の点を何個かとって調べてみよう。

(2) トグラックとナラの家から等距離にある場所は，どこにあるだろう？　等距離の点を何個かとって調べてみよう。

(3) トゥメンバイヤー，トグラック，ナラの3人の家から等距離にある場所は，どこにあるだろう？

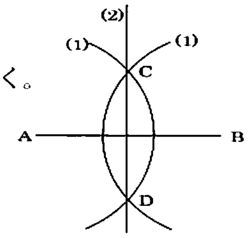
問3.4から，2点 A，B から等距離にある点の集まりは，線分 AB の［　　　］を通り，線分 AB に［　　　］な［　　　］であることが予想される。この［　　　］を，**線分AB** の［　　　　　］という。

また，このことから，次のことがわかる。

作図方法 [1]［　　　　　］

(1) 線分 AB の両端の点 A，B をそれぞれ中心として，交わる等しい半径の円を描く。

(2) その2円の交点を C，D として，直線 CD を引く。

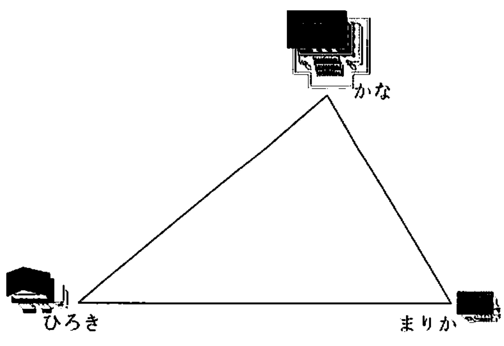


練習 3.1　自分で $\triangle ABC$ を描いて，その三角形で次の作図をしなさい。

(1) 辺 AB の垂直2等分線

(2) 辺 BC の中点

課題 8　ひろき，まりか，かなの3人の住む市では，コンサートホールが建設されることになりました。3人の家は図のような3本の道路で結ばれているのですが，市役所ではこの3本の道路への距離が同じである地点にコンサートホールを造りたいと考えています。しかし，市役所の誰もその場所をどこにすればよいのか分かりません。市役所に代わって，その場所を考えてあげてください。



問 3.5　課題 8 を抽象化しなさい。

問 3.6　課題 8 の困難を分割して，考えてみよう。

(1)　ひろきとまりか，ひろきとかなを結ぶそれぞれの道路から等距離にある場所は，どこにあるだろう？等距離の点を何個かとって調べてみよう。

(2)　まりかとひろき，まりかとかなを結ぶそれぞれの道路から等距離にある場所は，どこにあるだろう？等距離の点を何個かとって調べてみよう。

(3)　ひろき，まりか，かなの 3 人の家を結ぶ 3 本の道路からから等距離にある場所は，どこにあるだろう？

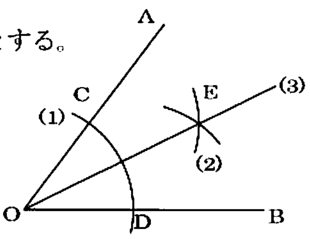
問 3.6 から，2 本の半直線 OA，OB から等距離にある点の集まりは，$\angle AOB$ を $\boxed{\qquad}$ する $\boxed{\qquad}$ であることが予想される。この $\boxed{\qquad}$ を，$\boxed{\qquad\qquad}$ という。
また，このことから，次のことがわかる。

作図方法 [2] $\boxed{\qquad\qquad}$

(1)　点 O を中心とする円を描き，辺 OA，OB と交わる点をそれぞれ C，D とする。

(2)　2 点 C，D をそれぞれ中心として，半径 OC の円を描く。

(3)　その 2 円の交点の 1 つを E として，半直線 OE を引く。



✎ 点 C，D を中心とする円の半径は，等しければ OC でなくてもよい。

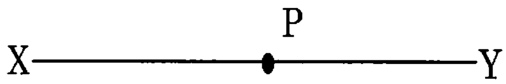
練習 3.2　自分で適当な $\angle AOB$ を描き，$\angle AOB$ の 2 等分線を作図しなさい。

問 3.7　$\angle AOB$ が 90° のとき，$\angle AOB$ の 3 等分線を作図しなさい。

✎「作図」というのは，定規とコンパスだけでする事を忘れないように！　分度器はダメ！

問 3.8　$\angle AOB$ が 60° のとき，$\angle AOB$ の 3 等分線を作図できますか？

問 3.9　直線 XY 上の点 P を通り，直線 XY に垂直な直線を作図しなさい。



コラム

ギリシャ数学 3 大作図問題

古代ギリシャの哲学者アナクサゴラス (500～428B.C.) は，太陽は神ではないと主張して投獄された。そのときに監獄で考えたといわれるのが，次の問題だ。

1.(円積問題)　与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図せよ。

また，当時のアテネでは，アテネの人口の $\frac{1}{4}$ が死んだ疫病がはやっていた。この疫病を鎮めるためにアポロに伺いをたてたところ，「立方体の形をした祭壇を 2 倍の大きさにせよ」とのお告げがあった。早速アテネ市民は祭壇を 2 倍にしたが，いっこうに疫病は治まらなかった (なぜだかわかりますか？)。このことがきっかけで，次の問題が生まれたそうだ。

2.(立方体倍積問題)　与えられた立方体の 2 倍の体積を持つ立方体の 1 辺を作図せよ。

そして，そのころのアテネで流行っていたのが，次の問題だ。

3.(角の 3 等分問題)　与えられた角の 3 等分線を作図せよ。

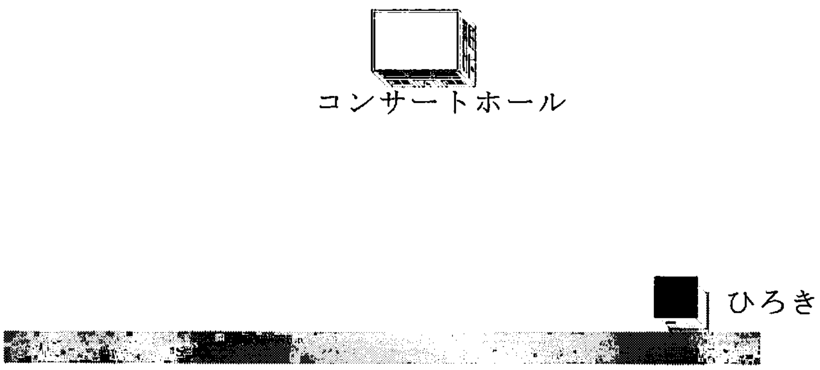
古代ギリシャの人々は，これらの問題をどうしても解くことができなかった。それもそのはずで，これらの問題は現代数学の深いところと関係していたのだ。この 3 つの問題を現代数学風に書き直すと，次のようになる。

1. $\sqrt{\pi}$ を定規とコンパスだけで作れ。
2. $\sqrt[3]{2}$ を定規とコンパスだけで作れ。
3. 3 次方程式 $4x^3 - 3x - a = 0$ の解 x を定規とコンパスだけで作れ。

※上にでてきた訳のわからない記号も，後期課程 (高校) になればわかるから心配はいらないよ。

そして，これら 3 つの作図が不可能 であることが証明されたのは，実に 19 世紀になってからなんだ。ワンツェルが 1837 年に 2. と 3. が不可能であることを示し，リンデマンが 1882 年に 1. が不可能であることを証明した。

課題 9　あつき，まりか，かなの *3* 人の住む市のコンサートホールから，ひろきの家の前を通る道路へ垂直な道路を造ることになりました。ところが，また市役所では道路のどこへ道をつければいいのかが分かりません。市役所に代わって，その場所を考えてあげてください。



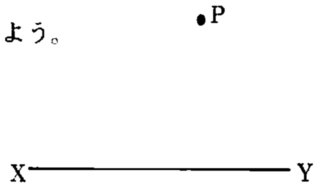
問 3.10　課題 9 を抽象化しなさい。

数学では，すでにわかっていることを利用することがよくあります。いまの場合は，問 3.9 で垂線を引いたので，その方法が利用できないか考えてみよう。

問 3.11　課題 9 を，直線上の定点を通る垂線の作図を利用して，右図で考えてみよう。

(1)　問 3.9 で，直線 XY 上に 2 点 A, B を $AP = BP$ となるようにとりました。
いまの場合，そのような 2 点 A, B を求めるにはどうすればよいでしょう？

(2)　(1) で 2 点 A, B を求めることができれば，問 3.9 の方法で垂線を引けば，求める垂線が引けたことになります。その方法を説明しなさい。



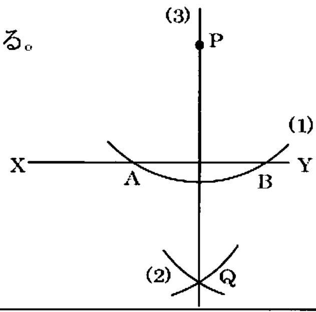
以上のことから，次のことがわかる。

作図方法 [3] $\boxed{}$

(1)　点 P を中心とする円を描き，直線 XY と交わる点をそれぞれ A, B とする。

(2)　2 点 A, B をそれぞれ中心として，半径 PA の円を描く。

(3)　その 2 円の交点の 1 つを Q として，半直線 PQ を引く。



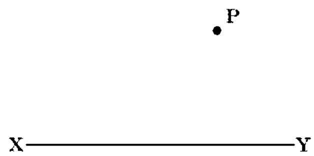
✎ 点 A, B を中心とする円の半径は，等しければ PA でなくてもよい。

練習 3.3　自分で適当な $\triangle ABC$ を描き，次の直線を作図しなさい。

(1)　頂点 A を通り，辺 BC(またはその延長線) に垂直な直線

(2)　頂点 A を通る辺 AB の垂線

問 3.12　右図において，点 P を通り直線 XY に平行な直線を作図しなさい。



さて，これで君たちは牛に水を飲ませて小屋へ連れて変える課題 6 を解決できるだけの知識と技能を身につけたはずだ。

問 3.13　課題 6 を解決しなさい。

4　円

4.1　円の基礎

先生　ここでは，円について学習します。円は，直線と共に重要な図形だね。いま学習している「ユークリッド幾何学」は，円と直線の幾何学といわれるからね。

ひろき　円ってのは簡単な図形だよね。コンパスを使えば，アッという間に描けるし。

先生　そうだね。円は完璧な対称性を持っているし，完全な図形として古代から人々の関心を引いていたようだよ。でも，そんな円の中にも，不思議な数が潜んでいるんだよ。

あつき　それって，円周率のことでしょう？

ひろき　ボクはそんなのより，なぜくるっと 1 回転したら 360° っていうのか，そっちの方が不思議だな。

先生　じゃあ，ひろきの質問から答えよう。古代バビロニア人は，1 年を 360 日と考えていたんだ。そして，1 年は繰り返すことも知っていたので，全円周を 360 等分して，その 1 つが 1 日にあたると考えたんだ。この 1 日分の角度が 1° だね。

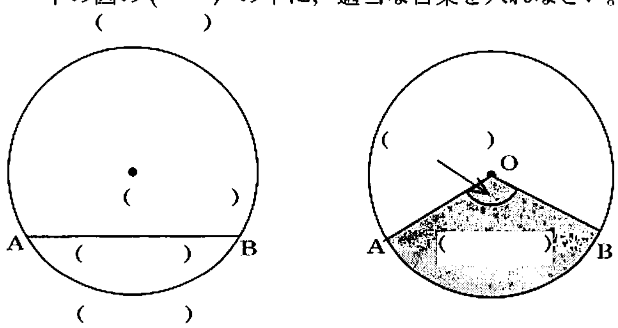
あつき　そうか。それで 360° か。では先生，度 (°) より小さい単位として分 (') があって，1° = 60' と聞いたことがあるんですが，なぜ 60' なんですか？

先生　それはね，バビロニアに残っている壁画などから想像すると，バビロニア人は円周をその半径で次々と区切っていくと，6 回目で元に戻ることを知っていたようなんだ。そして，360 ÷ 6 = 60 なので，この 60 という数を非常に重要な数と考えていたようなんだ。実際，古代バビロニア人は 60 進法 (60 ごとに 1 つ桁があがる。詳しいことは後期課程で勉強するよ。) を使っていたしね。だから，1° をさらに細かく分けたいときには，1° を 60 で割って 1' としたんだ。だから，1° = 60'。

あつき　1 時間 = 60 分と似ているな・・・。それじゃ，角度でも 1 分 = 60 秒なの？

先生　その通り！　記号で書くと，1' = 60" なんだ。バビロニア人は 1' のことを「partes minutae primae」(第 1 の小さな部分) と呼んだんだ。そこから，現在の「1 分 = 1minute」がきているんだ。同じように，バビロニア人が 1" のことを「partes minutae secondae」(第 2 の小さな部分) と呼んだので，「1 秒 = 1second」なんだね。これは英語のお勉強。さて，数学に戻って，円の基本的な用語を整理しておこう。

問 4.1　　下の図の (　　) の中に，適当な言葉を入れなさい。



中心を通る弦を[　　　　]という。上図において，$\triangle OAB$ は[　　　　　　　　]となる。

練習 4.1　　正 5 角形，正 6 角形の内角は何度ですか？

4.2 円とおうぎ形の計量

先生　では，さっきのあつきの話に出てきた「円周率」について教えてあげよう。

ひろき　円周率って小学校で習ったような気がするよ。確か・・・3 だったかな？

あつき　違うよ。円周率は 3.14 だよ。ねえ，先生？

先生　だいたいの値 (近似値) という意味では，2 人とも正しいよ。ただし，あつきの方がより正確だけどね。数学でよく使うコンピュータのソフトウェアに *Mathematica* というのがあるんだけれど，それを使うと円周率は次のように計算できるんだ。

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198 9・・・

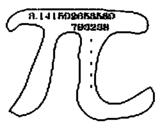
ひろき　ひえ〜，すごい。これってどれくらい数字が並んでいるの？

先生　小数点以下 1000 桁だよ。すごいだろ！

あつき　でも先生，最後に・・・とあるのは何ですか？

先生　いいところに気がついたね。それは，円周率はまだまだず〜っと続くという意味なんだ。

ひろき　終わりがないってこと？　無限に続くの？



先生　そういうこと。円周率を正確に表そうとすると，無限に続くので無理だね。上のような数を延々と書いてなんかいられない。そこで，数学で円周率を表すときは，ギリシャ文字 π を使うんだ。π という文字に延々と続く数を閉じこめてしまうというわけだ。これからは，円周率としては π を使よ。3.14 としないようにね。ところで，君たち，値はともかくとして，円周率の意味は分かっているだろうね？

あつき　当然ですよ。どんな円でも，円周と直径の比率は一定で，その一定の値を円周率といいます。

$$\frac{\text{円周}}{\text{直径}} = \text{一定 (円周率)}$$

先生　その通りだね。では，円やおうぎ形の面積や周囲の長さについて勉強しよう。

定理 4.1　半径 r の円の周の長さを l，面積を S とすると，

(1)　$l = 2\pi r$

(2)　$S = \pi r^2$

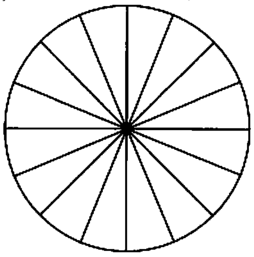
(証明)

(1) 円周率の定義から，

$$\frac{l}{2r}=\pi$$

よって，$l = 2\pi r$

(2) 下図のように，円を細かく半径で分ける。



(Q.E.D.)

例 4.1 半径 $5cm$ の円の周の長さ l と面積 S を求めなさい。

(解) $l = 2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi \quad (cm)$

$S = \pi r^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi \quad (cm^2)$

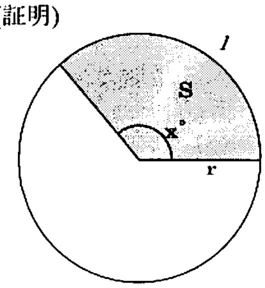
練習 4.2 直径 $20cm$ の円の周の長さ l と面積 S を求めなさい。

定理 4.2 **半径 r，中心角 x° のおうぎ形の弧の長さを l，面積を S とすると，**

(1) $l =$

(2) $S =$

(証明)



(Q.E.D.)

例 4.2 半径 $10cm$，中心角 72° のおうぎ形の弧の長さ l と面積 S を求めなさい。

(解) $l = 2\pi \times 10 \times \dfrac{72}{360} = 4\pi \quad (cm)$

$S = \pi \times 10^2 \times \dfrac{72}{360} = 20\pi \quad (cm^2)$

練習 4.3 次のおうぎ形の弧の長さ l と面積 S を求めなさい。

(1) 半径 $6cm$，中心角 60°

(2) 半径 $8cm$，中心角 225°

問 4.2 半径 $9cm$，弧の長さ $8\pi cm$ のおうぎ形の中心角の大きさを求めなさい。

コラム

最初に円周率をギリシャ文字 π を用いて表したのは，イギリスのジョーンズ (1675〜1749) で，『新数学入門』という本の中で使いました。そして，この記号 π が広く使われたのは，スイスの天才数学者オイラー (1707〜1783) が使ったからだといわれています。

では，なぜ π なのでしょう？　それは，ギリシャ語の「周囲」という言葉は「περιμετρον」(パイ，イプシロン，ロー，イオタ，ミュー，イプシロン，タウ，ロー，オミクロン，ニュー) なので，その頭文字を取ったといわれています。これをアルファベットで表せば，「perimetros」(周) です。

さて，π の値 (近似値) の計算は，古代から行われていました。古代バビロニア人は，円周率として

$$3,\ 3\frac{1}{7}(= 3.1428\cdots),\ 3\frac{1}{8}(= 3.125)$$

のどれかを使っていました。また，古代エジプト人は，

$$4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.16049\cdots$$

を用いていたことが，B.C.1650 年頃の『リンド・パピルス』という数学文書からわかります。こんな大昔に，円周率を求めているのはすごいことです。しかし，これらは数学的な明確な方法を基にしたものではありませんでした。

初めて数学的に円周率の近似値の求め方を明確にして，実際に円周率の近似値を求めたのが，古代ギリシャの天才アルキメデス (B.C.287〜212) です。アルキメデスは「取りつくし法」と呼ばれる方法で，円周率 π が，

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \quad \text{すなわち，} 3.14084\cdots < \pi < 3.1428\cdots$$

であることを示しました。つまり，円周率 π の小数点以下 2 位までの値を正しく求めたのです。

最近では，東京大学の金田康正先生が，1999 年 9 月 20 日にスーパーコンピュータで，なんと 2061 億 5843 万桁まで計算しました。計算にかかった時間は，37 時間 21 分 04 秒でした。ちなみに，π の小数点以下 2061 億 5843 万桁は「3.14159…22144 96687 55157 30964」だそうです。覚えておくと自慢できるかも？　また，「01234567890」という数列が，小数点以下 532 億 1768 万 1704 桁目からと，1484 億 2564 万 1592 桁目からに現れるそうです。面白いですね。

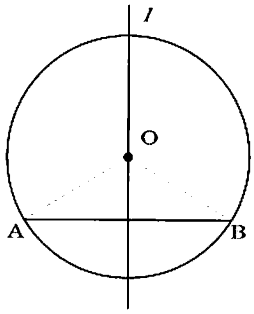
なお，金田先生による Windows 上で動く「スーパー π」という円周率計算ソフトがあります。3355 万桁まで計算できるので，インターネットからダウンロードして，キミも計算してみたら？

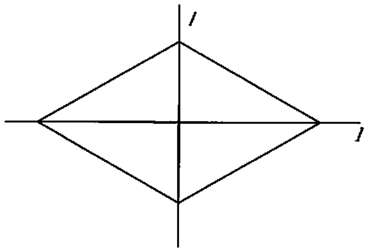
4.3 対称性

昔から，円は完全無欠な図形だと見なされてきた。その理由の 1 つは，完璧な対称性を持っていることだろう。ここでは，円やその他の図形も含めて，対称性について学習しよう。

例 4.3 (1) 円を直径 l を折り目として折ると，両側の半円がぴったりと重なる。

(2) ひし形を対角線 l を折り目として折ると，両側の三角形がぴったりと重なる。

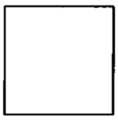




> **定義 4.1** 1 つの直線 l を折り目にして折ったとき，折り目の両側の図形がぴったりと重なる図形は，線対称であるという。また，そのときの折り目の直線 l を，対称の軸という。

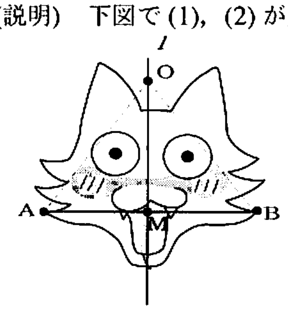
例 4.3 から，円もひし形も線対称な図形であることがわかる。そして，それぞれの対称の軸は，直径，対角線である。

問 4.3 線対称な図形を，できるだけたくさんあげなさい。また，それらの図形の対称の軸をいいなさい。

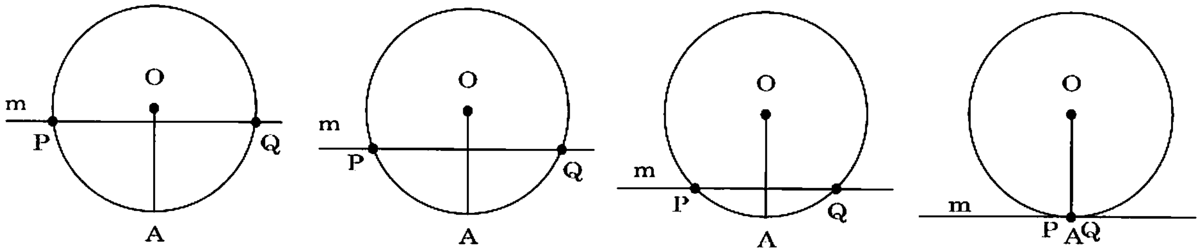


> **定理 4.3** 線対称な図形において，対称の軸を l，対応する 2 点を A, B，線分 AB と l との交点を M とすると，
> (1) $AB \perp l$
> (2) $AM = MB$

(説明) 下図で (1)，(2) が成立することを示そう。



円は直径に関して線対称なので，下図のように半径 OA に垂直な直線 m を点 A の方向に動かしていくと，2つの交点 P, Q は互いに近づいて，最後には一致する。



このとき，直線 m は円 O に［　　　　］といい，直線 m を円 O の［　　　　］，点 A を［　　　　］という。

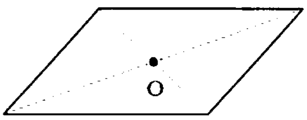
> **定理 4.4**　　円の接線は，接点における半径に垂直である。

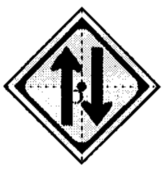
練習 4.4　　適当な円 O を描いて，円周上に点 A を取り，A を接点とする接線を作図しなさい。

次は，同じ対称性でも線対称と違う対称について考えよう。

例 4.4　　(1)　平行四辺形を，対角線の交点 O を中心に 180° 回転すると，もとの図形にぴったりと重なる。

(2)　下の交通標識を，対角線の交点 O を中心に 180° 回転すると，もとの図形にぴったりと重なる。





> **定義 4.2**　　ある点 O を中心にして 180° 回転したとき，もとの図形とぴったりと重なる図形は，<u>点対称</u> であるという。また，そのときの点 O を，<u>対称の中心</u> という。

例 4.4 から，平行四辺形も対面通行を表す交通標識も，点対称な図形であることがわかる。そして，それぞれの対称の中心は，対角線の交点である。

問 4.4　　点対称な図形を，できるだけたくさんあげなさい。また，それらの図形の対称の中心をいいなさい。