平成26年度
スーパーサイエンスハイスクール
サイエンス研究会
研究論文集

奈良女子大学附属中等教育学校

平成 27 年 3 月 1 日

平成 26 年度スーパーサイエンスハイスクール

サイエンス研究会研究論文集

目次

刊行にあって　1
2014 年度教育課程表　2
奈良女子大学附属中等教育学校　SSH 概念図　3

研究論文

物理班

２進数の加算回路の製作　5
クアッドコプターの製作　11
青い炎の探究　15
白黒フィルム写真のカラー化　19
目線検出ソフトの作成　35
車両挙動モデルの開発に向けて　41
建築模型を対象とした振動発生装置の製作　45
無線通信機能を備えた機器の製作　49

数学班

コラッツ予想について　51
正五角形と黄金比Ⅱ　55
カプレカー変換に関する考察(2)　65
塔の美しさは数式のままに　73

化学班

有機色素増感型太陽電池の作成　77

生物班

黄金比と植物　85
マツタケの人工培養を目指して～マツタケ菌糸の培養方法の確立～　89
DNA による雌雄判別の確立　93
生物を使った水質浄化　96
おいしい抹茶(薄茶)を点てる～抹茶の科学～　100
猿沢池のアオコの発生を考える　107
プラナリアの集合性について　118

平成 26 年度　スーパーサイエンスハイスクール　サイエンス研究会研究論文集刊行にあたって

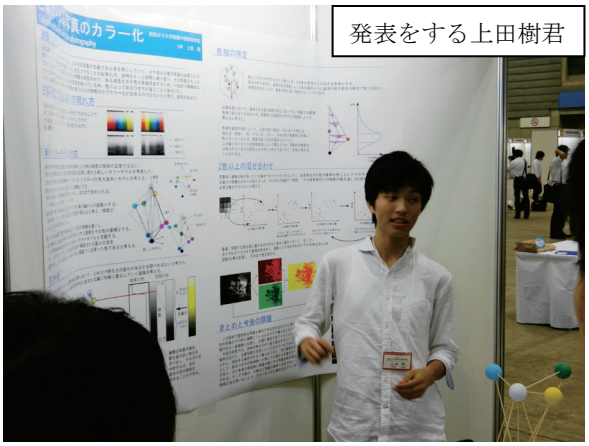
本校は、平成 17 年度に SSH の Ⅰ 期 5 年間、平成 22 年度にⅡ期 5 年間の指定を受けました。そしていま、10 年間の指定期間を終えようとしています。

本校の SSH は、中高一貫教育校における SSH の魁として研究を推進しつつ、その質を深めてきました。理数教育のカリキュラム開発や、生徒全員の数学的リテラシー・科学的リテラシーの育成とリベラルアーツの涵養を目標として実践研究を行ってきました。これらの研究はさまざまな方面から高い評価を受けています。しかしそれにとどまっているわけではありません。サイエンス研究会の生徒たちの研究内容とその活躍も、非常に高く評価されているのです。

「この学校は SSH の学校だから入学したい」「この学校を目指したのは SSH の学校だから」という受検生や入学生の声をよく聞きます。学園祭やオープンスクールなどでサイエンス研究会の生徒たちが小学生相手に自分たちの研究成果を紹介したり、小学生向けの実験を行ったりしており、それらが魅力的であるからこそ、そのような「声」につながってくるのだと思います。

ひるがえって、発表や説明をしている生徒たちの立場に立ってみましょう。自分の研究の説明がわかりやすいものになっているのかどうか。それは、実際に他者に説明してみて初めてわかることなのだと思います。自分が小学生相手に行っている実験が適切なものなのかどうかなどについても、実際にやってみてはじめて「成功」なのか「失敗」なのかがわかるのだと思います。そのような「試行錯誤する」体験を、生徒たちは学園祭やオープンスクールをはじめとして、公開研究会などの「大人」対象の発表会などにおいても実践しているのだと思います。

本論文集は、サイエンス研究会に所属する生徒の日頃の研究成果をまとめあげたものです。全校 6 学年で約 90 名が所属するサイエンス研究会の生徒の研究テーマの選択と研究は、本校の校是の通り「自由に、自主的に、自立して」行っています。そして、中高一貫教育の 6 年間のゆったりとした時間の中で、「下級生は上級生の姿を真似つつ育ち、上級生は下級生を指導しながら育つ」のです。このような生徒たちを指導する教員は、生徒の自由な研究を尊重し、ときには「壁」となりながら、情熱を込めて指導しています。



発表をする上田樹君

2014 年度は、8 月に横浜で行われた「スーパーサイエンスハイスクール生徒研究発表会」において、5 年の上田樹君が「白黒フィルム写真のカラー化」の研究で「独立行政法人科学技術振興機構理事長賞」を受賞しました。また、第 12 回高校生科学技術チャレンジ JSEC2014 において文部科学大臣賞・ISEF 日本代表に選ばれました。これはオリンピックに例えれば「金メダル」を獲得したことになります。彼がこの研究を始めたのが 4 月当初とのことで、極めて短期間に大きな研究成果を挙げたことは多くの賞賛を得ました。ほかにもユニークで“手強い”研究テーマに取り組んでいる生徒諸君は数多くいます。その成果が少しでも花開くことを切に期待しています。

平成 27 年 3 月

奈良女子大学附属中等教育学校
副校長　武田　章

2014年度(平成26年度) 教育課程

学年 / 時間	1年	2年	3年	4年	5年		6年	
	共通	共通	共通	共通	文系	理系	文系	理系
1	国語基礎(4)	国語基礎(3)	国語総合(4)	国語総合(5)	現代文(2)		現代文(2)	
2								
3		情報と表現(1)			古典(2)		古典(2)	
4								
5	社会(3) 地理的分野	社会(3) 歴史的分野	現代社会Ⅰ(2)		古典講読(1)		日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) *(3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)
6				現代社会Ⅱ(2)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) *(3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)		
7			現代史Ⅰ(2)					
8	数学基礎Ⅰ(4) 代数分野 幾何分野	数学基礎Ⅱ(5) 代数分野 幾何分野		現代史Ⅱ(2)			古典講読(1)	化学(4) △(0)or(4)
9			数学探究ⅠA(3)		世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) △(0)or(3)	物理(3) 生物(3) *(3)	世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) △(0)or(3)	
10				数学探究ⅡA(3)				
11								
12	情報と科学(1)		数学探究ⅠB(2)		化学基礎(2)	化学基礎(2) 化学(2)	日本史特講(2) 世界史特講(2) 地理特講(2) △(0)or(2)	物理(4) 生物(4) △(0)or(4)
13	理科基礎Ⅰ(4)	理科基礎Ⅱ(4)		数学探究ⅡB(2)				
14			自然探究Ⅰ (3)		地学基礎(2) 音楽Ⅱ(2) 美術Ⅱ(2) △(0)or(2)		化学演習(2) 地学演習(2) △(0)or(2)	
15				自然探究Ⅱ 物理基礎(2) 生物基礎(2) (4)				
16					解析Ⅰ(4)	解析Ⅰ(4)	物理演習(2) 生物演習(2) △(0)or(2)	解析Ⅱ(5) △(0)or(5)
17	音楽(2)	音楽(2)	音楽Ⅰ(2) 美術Ⅰ(2) 書道Ⅰ(2) 工芸Ⅰ(2) *(2)					
18							数学演習Ⅰ・Ⅱ(2) △(0)or(1)or(2)	
19	美術(2)	美術(2)	技術総合・ 家庭総合(2)	音楽Ⅰ(2) 美術Ⅰ(2) 書道Ⅰ(2) 工芸Ⅰ(2) *(2)			数学特講(2) 音楽Ⅲ(2)美術Ⅲ(2) 高大連携特講(1) △(0)or(1)or(2)	
20					代数・幾何(3) △(0)or(3)	代数・幾何(3)		
21	工創基礎Ⅰ 生活基礎Ⅰ (2)	工創基礎Ⅱ 生活基礎Ⅱ (2)	体育(3)	家庭総合(2)			現代文特講(2) △(0)or(2)	解析Ⅱ特講(2) △(0)or(2)
22								
23	体育(3)	体育(2)		体育(2)	Reading(2) △(0)or(2)			数学演習(1)△ (0)or(1)
24			保健(1)				体育(3)	
25		保健(1)	Topic Studies Ⅰ (2) Reading	保健(1)	体育(3)			
26	Introductory English Ⅰ(3)	Introductory English Ⅱ(3)		Topic Studies Ⅱ (3) Reading				
27			Topic Studies Ⅰ (1) Writing				Topic Studies Ⅳ(3)	
28			BasicEnglishⅢ(1)		Topic Studies Ⅲ(3)			
29	BasicEnglish Ⅰ(1)	BasicEnglish Ⅱ(1)	Topic Studies Ⅰ (1) Speaking	Topic Studies Ⅱ(1) Writing				
30	Introductory English Ⅰ(1) Speaking	Introductory English Ⅱ(1) Speaking	情報の科学(1)	Topic Studies Ⅱ(1) Speaking			Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特講(2) △(0)or(2)
31	道徳(1)	道徳(1)	探究・世界Ⅰ(2)	情報の科学(1)	Writing(1)			
32	HR(1)	HR(1)		探究・世界Ⅱ(2)	コロキウム(2)		Writing(2) △(0)or(2)	Writing(2) △(0)or(2)
33			道徳(1)					
34			HR(1)	HR(1)	HR(1)		HR(1)	
短期集中	探究・奈良Ⅰ(1)	探究・奈良Ⅱ(1)	CGⅠ(1)	AG(1)	AG(1)		AG(1) *△(0)or(1)*	
				テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)		テーマ研究(1) △(0)or(1)	

※点線:評価は区別せずに行う部分

奈良女子大学附属中等教育学校　中高一貫SSH概念図

	1年	2年	3年	4年	5年	6年
SSH理念	自然科学リテラシーの育成				リベラルアーツの育成	
SSH目標	理数に偏らない 基礎・基本の徹底		学問への興味・関心と 学びへの意欲の育成		高大接続を目指す先進的・ 総合的な視野を持つ理数教育	
教科	質の高い・現実と結びついた・リベラルアーツ育成の授業　コロキュウム					
総合学習	探究・奈良Ⅰ　探究・奈良Ⅱ		探究・世界Ⅰ　探究・世界Ⅱ		テーマ研究	

奈良女子大学附属中等教育学校　SSH
リテラシーとリベラルアーツ

奈良女子大学　他大学

附属中等教育学校

高大接続
カリキュラム

サイエンス研究会
- ■「スーパー」な生徒の育成
- ■科学の面白さの普及

数学的リテラシーの育成

科学的リテラシーの育成

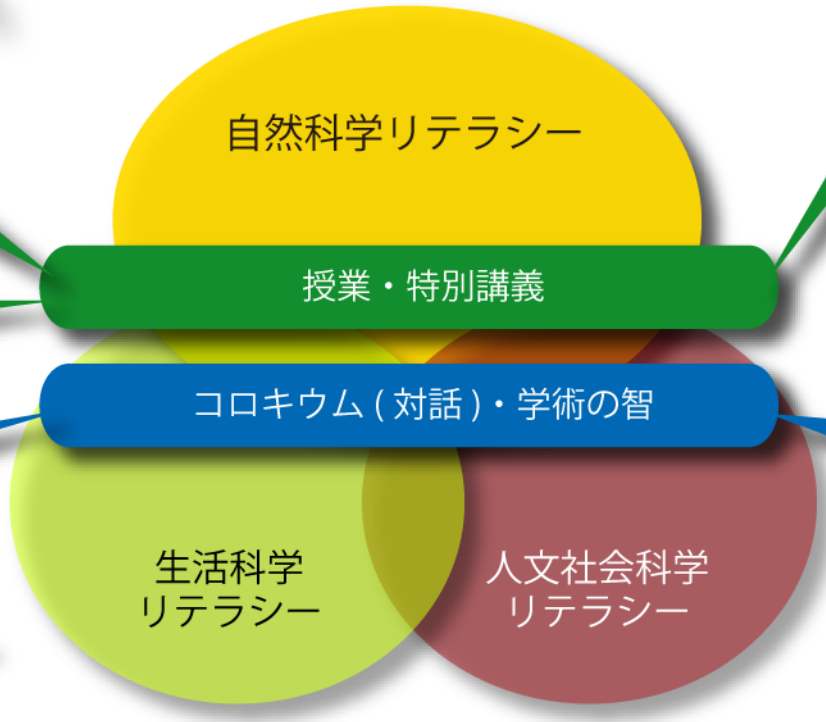
生活科学リテラシーの育成

教材開発・出版

高大接続（学習面）

ESD に基づく海外連携
コア SSH

21 世紀のリベラルアーツ



育成したい力のキーワード
- ■言語能力・言語認識
- ■批判的思考力
- ■他者への寛容・理解
- ■学び方

生命論
環境論
宇宙論
数理科学
科学技術社会論
……
人間とは何か
現代社会論
文化と社会
歴史探究
比較文化論
……

研 究 論 文

２進数の加算回路の製作

１年Ｂ組　志村　恒太郎
指導教員　米田　隆恒

１．要約

私は記念すべき第一作の開発を論理回路の加算器にした。しかし、IC を使ったただの加算器を作るのは面白くないので、IC を使わない２進数の加算器の製作に挑戦することにした。今回は、ダイオードとリレーを用いて OR、NOT、AND の３つの論理回路を利用して、半加算器などを作成し、並べて合体させて IC を使わない２進数の加算器を考案し、製作を順調に進めているので紹介する。

キーワード　論理回路、加算器、ダイオード、リレー

２．研究の背景と目的

今回は初めての研究なので、基礎的なところから始めていこうと思い、そこで、コンピューターなどの様々なハードウェアの基本となる２進数の研究にすることにした。その中から今回は１番簡単な（と自分としては思っている）加算器を開発することにした。ただ、加算器を作るとき、普通は IC 論理回路を使うものだが、簡単すぎて面白くないので、IC を使わずに作ることにした。しかし、それによって思っていた以上にレベルがとても上がってしまった。

３．研究内容

3.1 論理回路上での加算器

まず、論理回路上での加算器を考える。加算器には全加算器と半加算器がある。全加算器は繰り上がりを受け取ることができる加算器で、半加算器は２つの数を加算するだけの加算器である。そのため全加算器は２つの半加算器と１つの OR 回路によって成り立っている。

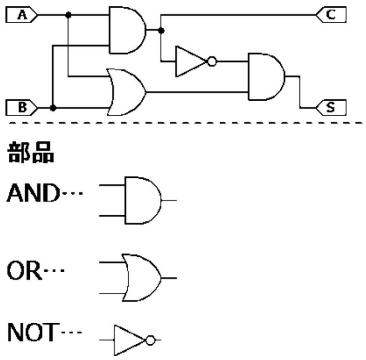


図１論理回路で表したときの半加算器（A と B はそれぞれ入力、S は答え、C は繰り上がり）

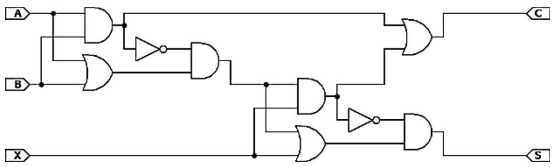


図２　論理回路で表したときの全加算器（A と B はそれぞれ入力、X は繰り上がりの入力、S は答え、C は繰り上がり）

さて、今回の研究では IC を使わずに加算器を作る。図１と図２でも分かるように、AND 回路と OR 回路と NOT 回路から成り立っている。この３つの回路は一般的に IC

として取り扱われている。そのため、「IC を使わずに」となると似たような性質を持つ電子部品を使わなければならない。そこで、ド・モルガンの法則を使い、まず AND 回路を OR 回路と NOT 回路にすることにした。

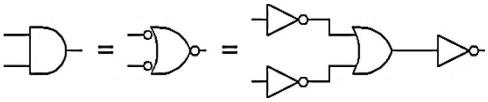


図３ド・モルガンの法則を利用して AND 回路を OR 回路と NOT 回路に変換する過程

この変換によって、回路を OR 回路と NOT 回路だけにできた。

次に、OR 回路と NOT 回路を IC 以外の電子部品に替える。

- OR 回路

OR 回路の入力と出力を表にまとめる。

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表１ OR 回路の入力と出力の関係

このように、A または B のどちらかが 1 になると OR 回路は 1 を出力する。

そこで思いついたのが、入力を出力につなぎ、２つの入力が互いに逆流しないようにダイオードをつけることである。このアイデアを回路図にした。

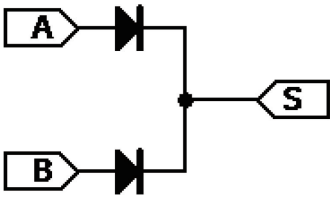


図４　回路図に表した IC を使わない OR 回路
（A と B はそれぞれ入力、S は答え）

これで、OR 回路を IC からダイオード 2 個に替えることができた。なお、ダイオードについては、3.2 で詳しく紹介する。

- NOT 回路

OR 回路と同じく、NOT 回路も入力と出力を表にまとめる。

A	S
0	1
1	0

表２　NOT 回路の入力と出力の関係

このように、0 ならば 1、1 ならば 0 というように、入力の反対を出力する。

そこで、スイッチを簡単に自動で ON/OFF できる電子部品はないか探したところ、リレーという部品を発見した。リレーという電子部品については 3.2 で詳しく紹介する。

このリレーが物理的に NOT 回路の役割を果たす。このアイデアを回路図にした。

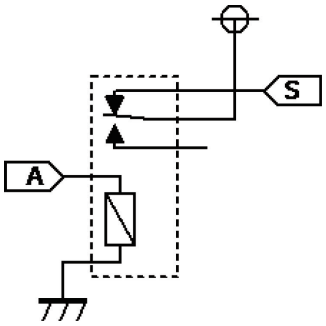


図５　回路図に表した IC を使わない NOT 回路（A は入力、S は答え）

3.2 使用した電子部品と法則の説明

- ダイオード

ダイオードは、アノードとカソードの２つの端子からなる、電流を一方向にしか流さない電子部品である。今回の研究では、この部品を OR 回路（２つダイオードを使う）と電流の逆流防止に使用する。

図６　ダイオード

● リレー

リレーは、コイルとスイッチからなる電子部品である。有線電信において、伝送路の電気抵抗によって弱くなった信号を中継するために発明されたものである。今回の研究ではこの部品を NOT 回路の代わりとして利用する。

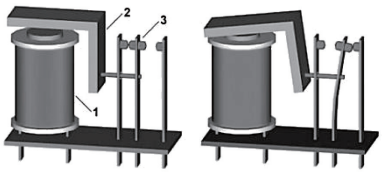


図７　リレーの内部構造

（１はコイル、２はコイルによって動く器械、３はスイッチ。左はコイルに電気が流れていない状態、右はコイルに電気が流れている状態。）

● フォトカプラ

フォトカプラとは、内部で電気信号を光に変換し、再び電気信号へ戻すことによって、電気的に絶縁しながら信号を伝達する電子部品である。フォトカプラは内部に発光素子と受光素子が収められ、外部からの光を遮断するパッケージに封じ込められた構造になっている。今回の研究では、装置の出力電圧の安定化のために用いる。

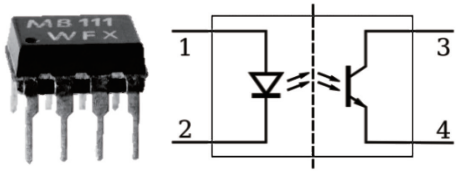


図８　フォトカプラ

（左…外見、右…内部の回路図）

● ド・モルガンの法則

ド・モルガンの法則とは、真・偽を反転させ、論理和・論理積の定義を交換した論理体系が元の論理体系と同一視できることについての法則である。

具体的に数式でこれを表すと、以下のようになる。

$$A \cdot B = \neg\ (A + B)$$

数式１　ド・モルガンの法則による AND 回路の反転

3.3 加算回路の作成

半加算器・全加算器の作成に必要な AND 回路、OR 回路、NOT 回路をすべて IC 以外の電子部品にできたので、それに基づいて加算回路を作成していく。

3.3.1 論理回路で表した加算回路本体

まずは、3.1 で述べたときの半加算器・全加算器を組み合わせ、加算回路本体を作る。

今回の加算回路は 2 桁+2 桁=3 桁になるように作る。そこで、半加算器と全加算器の組み合わせを簡易的に図に表した。

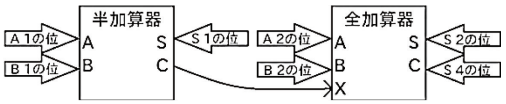


図９　加算器の組み合わせの簡易的な図

（→の矢印…入力、←の矢印…出力、細い矢印…導線）

この組み合わせから考えて、半加算器が３つ（全加算器の中には半加算器が２つある）と OR 回路が１つ必要となる。つまり、半加算器の中には AND が２つ、OR が１つ、NOT が１つあるので表にまとめると次のようになる。

回路	数（個）
AND	6
OR	4
NOT	3

表３　図９の組み合わせの中にある AND 回路と OR 回路と NOT 回路の数

ここから AND 回路をド・モルガンの法則を利用して OR 回路１つと NOT 回路３つにする。ただしここで、図１と図３を見なおしてもらいたい。まず、図１を見ると、NOT 回路が上の AND 回路の出力を反転している。しかし、図３を見ると、AND 回路の中で出力の直前にその前の OR 回路の出力を反転させている。つまり、図１の NOT 回路をそのまま置いておいて加算回路を作っていったとき、NOT 回路のあとにまた NOT 回路がつながっているという現象が起こり、NOT 回路が無駄である。そこで、AND 回路（OR 回路１つと NOT 回路３つ）に NAND 回路出力をつける。こうすることによって NOT 回路を３つも減らすことができた。

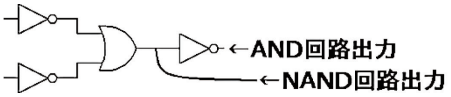


図 10 AND 回路に NAND 回路の出力をつけたときの図

ここで AND 回路を OR 回路と NOT 回路に替えて OR 回路と NOT 回路だけで図９を作ったときの OR 回路と NOT 回路の数を表にまとめる。

回路	数（個）
OR	10
NOT	18

表４　図９の組み合わせの中の AND 回路を OR 回路と NOT 回路に分けて考えたときの OR 回路と NOT 回路の数

3.3.2 IC 以外の部品で表した加算回路本体

3.3.1 で図９の組み合わせを OR 回路と NOT 回路にしたので、次は OR 回路と NOT 回路をダイオードとリレーに替える。

- OR 回路

OR 回路はダイオード２つに替えることができる。そのため、OR 回路をダイオードに替えた時点でダイオードは 20 個必要となる。

- NOT 回路

NOT 回路はリレー１つと GND から逆流しないようにするためのダイオード１つに替えることができる。そのため、NOT 回路をリレーとダイオードに替えたときリレーは 18 個、ダイオードも 18 個必要となる。

以上の２つの通りに OR 回路と NOT 回路をリレーとダイオードに替えたとき、必要となるリレーとダイオードの数は表５の通りである。

電子部品	数（個）
リレー	18
ダイオード	38

表５　必要となるリレーとダイオードの数

3.3.3 加算回路全体の回路

次に入力装置と出力装置を作成する。

- 入力装置

入力装置はスイッチと LED のシンプルな設計にした。また、LED による電圧降下を補うためにフォトカプラも使うことにした。（フォトカプラについては 3.2 を参照。）

● 出力装置

出力装置も７セグメントディスプレイ[1]を使用せずに LED３つというシンプルな設計にした。この入力装置と出力装置と加算回路本体をつなげると、下図のようになる。

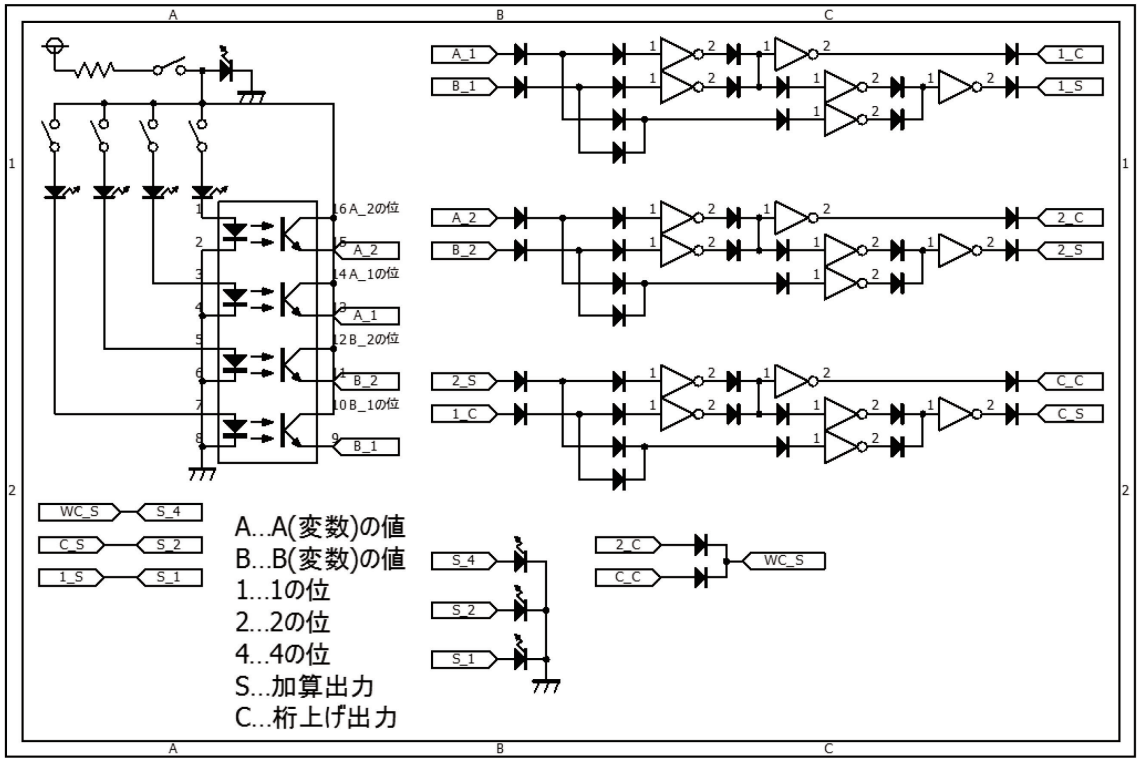


図 11 加算回路全体の回路図（リレーの部分はややこしくなるため NOT 回路で表記）

[1] ７セグメントディスプレイ

７セグメントディスプレイは、電子的な表示装置の一種であり、十進のアラビア数字を表示することができる。アラビア数字１文字を表現するために、それぞれ個別に点灯･消灯できる７つのセグメントから構成されているためこの名がある。

（この写真は Peter Halasz 氏が撮影したものである）

４．考察

今回の研究で、IC を使わずに論理回路を作ることが困難ながらできることが分かった。また、この膨大な量の電子部品（実際の IC の中にはほかの電子部品が入っている）を１つの IC にまとめることができることを考え、IC が今の電子回路界でどれだけ重要な役割を果たしているかも分かった。

５．今後の課題

実はまだ本体の製作が完了していないので、次の論文を書く頃までには完成させたい。また、入力装置や出力装置（こちらはどちらも完成済み）がよく壊れる原因も調べたい。

あと、少し電気の基礎を誤解していた部分があったのでこれからは気を付けたい。

６．謝辞

この研究を行うにあたりまして、顧問の米田先生には多大なご指導を賜りました。また、サイエンス研究会の先輩方や、友人にも多くの助言・協力を賜りました。この場を借りて、深く御礼申し上げます。また、御多用とは思われますが、これからもいろいろと御協力お願い申し上げます。

クリエイティブ・コモンズ ライセンスに基づく表示

図番号	著作権保持者
１，２，３，４，５，９, 10, 11	志村 恒太郎
6	John Maushammer 氏
7	Wikimedia Commons
8 左	André Karwath aka 氏
8 右	このコンテンツはパブリックドメインです

※但し、一部の図には改変・加工・修正が施されています。

クアッドコプターの製作

３年Ａ組　松村　一希
３年Ｂ組　三浦　聡汰
３年Ｃ組　上林　幹宜
指導教員　米田　隆恒

１．要約

私たちは、強風などの悪条件下でも飛行することのできるクアッドコプター（4 枚のプロペラで姿勢制御を行う小型ヘリコプター）の開発を目指している。そのために、可能な限り簡単に無線通信をする方法の考察とともに、安定した飛行方法を研究している。

今回は、昨年度の続きとして、加速度センサを用いてモータ制御をすること、モータドライバーと無線マイコンをつなぐこと、既製品のラジコンヘリから安定して飛行するコツを探ること、などの研究を行った。

キーワード　　クアッドコプター、モータドライバー、無線マイコン、加速度センサ

２．研究の背景と目的

東日本大震災などのような大災害が起こった場合に、がれきなどが散乱した道路では車などを使っての情報収集は難しいと考えられる。そのため、狭い隙間でも入ることのできるような小型で飛行する、小回りの利くものが情報収集の手段として必要だと考えた。そこで、そのような場合にクアッドコプターが便利ではないかと考えた。昨年度の研究で、モータ制御、無線制御をそれぞれ行うことに成功した。今回は加速度センサを用いたモータ制御、ラジコンカーの製作、既製品のラジコンヘリから、安定して飛行するコツを探るなどの研究を行った。

３．研究内容

3.1 加速度センサによるモータ制御

今回は、昨年度の研究に使用したようなスイッチではなく 3 軸加速度センサモジュール　「KXR94-2050」(図１)と、モータドライバー「TA7291P」(図２)を使用してモータ制御を行った。

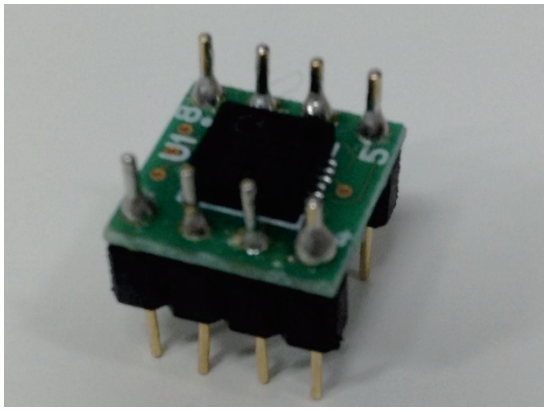


図１　KXR94-2050

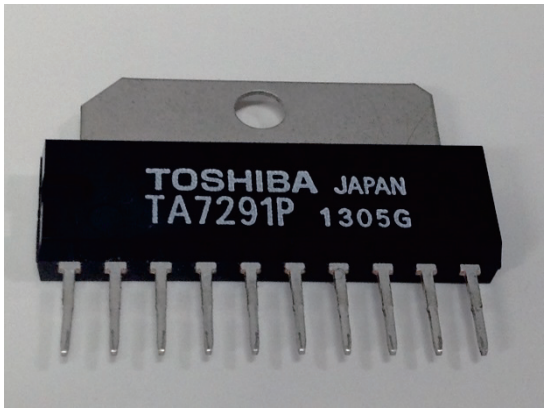


図２　TA7291P

KXR94-2050 は X 軸、Y 軸、Z 軸方向の傾きを検出し、その傾きに応じて変化する電圧を出力することができる。これを利用することによりクアッドコプターの機体が傾いた場合にも修正が可能になるので、安定した飛行が可能となる。TA7291P は、2 つのピンを制御するだけで正転、逆転、ストップのコントロールを行うことができる([5]参照)。

私たちは、加速度センサを用いて機体の水平を保つ方法について、以下のように考えている。

あるモータの高度が上がり、機体が斜めになった場合、対角にあるモータの出力を上げ、機体を水平に保つ。同様に、あるモータが下がれば対角にあるモータの出力を下げ、並行に保つ。それを二つ組み合わせて四方に対応できるようにする。この方法を使用することで、加速度センサで制御する必要のあるモータを二つに減らすことができる。さらに、プログラミングする必要がなくなるので、より簡単に製作することができる。

3.2 ラジコンカーの製作

私たちは昨年度の研究で、モータドライバー「TA7291P」([5]参照)と、無線マイコン「TWE-Lite DIP(トワイライト・ディップ)」(図３)を使用し、モータ制御と無線制御を行った。

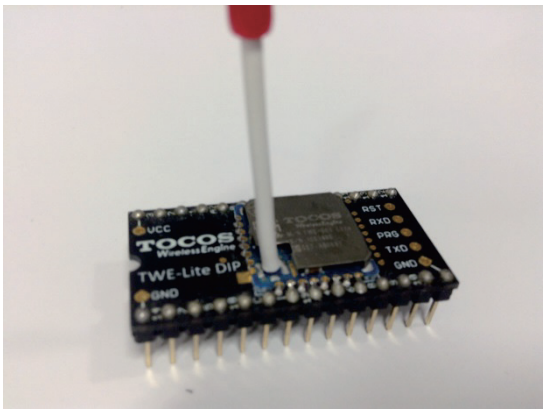


図３　TWE-Lite DIP

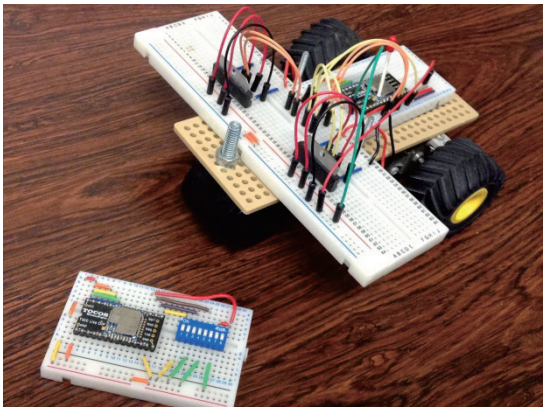


図４　今回製作したラジコンカー

今回は、モータドライバーと無線マイコンをつなげ、ラジコンカーを作成した。

このラジコンカーでは、TA7291P を左右のタイヤにそれぞれ 1 つずつ使用し、TWE-Lite DIP を親機、子機用にそれぞれ 1 つずつ使用している。

TWE-Lite DIP は、デジタル入力、出力、アナログ入力、出力を行うピンがそれぞれ

4 本ずつある(詳しくは昨年度の研究論文を参照)。そのため、親機側のデジタル入力を 4 本、子機側のデジタル出力を 4 本使用した。子機のデジタル出力 1、2 を左側のモータを制御する TA7291P に接続し、デジタル出力 3、4 を右側のモータを制御する TA7291P に接続した。こうすることによって、4 つのスイッチを制御するだけで、ラジコンカー本体から離れた場所からでもラジコンカーを操作することができた。

４．反省点

今回は、ブレッドボードを使用したため、ラジコンカーを操作したときにジャンパーワイヤが外れてしまうということがよく起こってしまった。今後はきちんとはんだ付けを行いたい。

５．今後の課題

赤外線通信では、通信が可能な距離が 5 メートルから 7 メートルである。一方、今回使用する TWE-Lite DIP は、100 メートルから 200 メートルが典型的な通信距離である。よって通信手段としては、赤外線通信には変更せず、このまま無線通信を使用するのがよいと考えた。

既製品の小型ヘリコプターを観察し、クアッドコプターの開発にとって大切なことは以下の 3 つであると考えられる。

・部品の軽量化、つまり、最も簡単な回路にすること
・操作を減らすため、4ch にすること
・赤外線通信ではなく、無線通信を利用すること

それに付け加え、今後は、インターネット回線を通じてリアルタイムでクアッドコプターからの画像を受信し、その画像を見ながら操作することや、傾きセンサでコントロールを行うこと、また、よりシンプルな作りのコントローラーにすることなどを行いたい。

今回、モータドライバーや加速度センサを用いたモータ制御と、無線を用いたモータ制御を行うことができた。

しかし、実際に飛行するものを作るためには、まだまだたくさんのことを調べる必要があると感じた。そこで、既製品の小型赤外線ヘリコプター「G-METAL ジャイロメタル ファルコン 4」を観察し、これを元にクアッドコプターに応用できる点などを探りたいと考えている。

６．参考文献

[1]『電子工作マガジン No.20』電波新聞社(2013)
[2]TA7291P　データシート
http://akizukidenshi.com/download/ta7291p.pdf
[3] TWE-Lite DIP　マニュアル
http://akizukidenshi.com/download/ds/tocos/TWE-Lite_DIP_manual.pdf
[4] KXR94-2050 データシート
http://akizukidenshi.com/download/ds/akizuki/AKI-KXR94-Module.pdf
[5]上林幹宜「H8 マイコンによるライントレースカーの製作」奈良女子大学附属中等教育学校平成 24 年度 SSH サイエンス研究会研究論文集,p15-p16

７．謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ、多くの先輩方か

ら多大なご指導や、ご協力していただきま
した。この場で深く感謝申し上げます。

青い炎の探究

３年Ａ組　清家　悠大
３年Ｂ組　中谷　駿介
指導教員　米田　隆恒

１．要約

私たちはこれまで、効率のよい電球を作るための研究を行っていた。その後様々な研究を行う中で、私たちはそもそも物が燃えて光を出すのはなぜかと考え、燃焼に対する空気のはたらきを調べた。その過程で、真空にしていくとろうそくの炎に変化があることが分かったので、その過程と結果を報告したい。

キーワード　ろうそく　炎　微真空状態　青色　丸い形状

２．研究の背景と目的

私たちは、火のついたろうそくを真空容器の中に入れ、徐々に空気を抜いていくと、図１のように、十数秒ほどかけて炎の形状は丸くなり、炎の色が青色に変化することを発見した。なぜこのような現象が起きるのかということに興味を持ち、探究することにし、実験を行った。

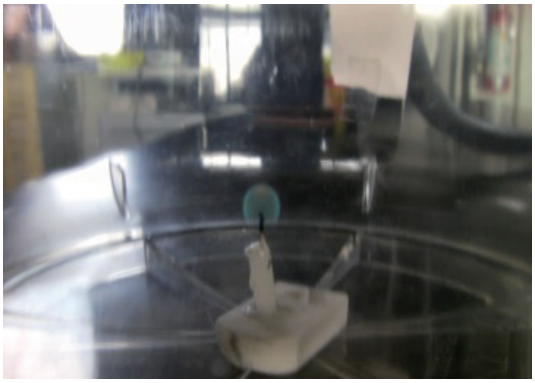


図１

３．研究の方針

私たちはこの現象について、炎の形状が丸くなることと、炎の色が変化することの原因は異なると考え、ひとつひとつ解決していくことにした。

４．丸い形状の研究

4.1 仮説

炎の形状が丸くなる原因は空気の流れが関係している、と仮説を立て、次の実験を行った。

4.2 実験：空気の流れを調べる

図２のように、真空ポンプと真空容器を用い、空気の流れを線香の煙で調べることにする。

図 2

真空容器の中に火のついたろうそくを立て、それと同時に真空容器内に火のついた線香を立て、真空容器の蓋で真空容器を閉じる。

このとき煙の動く様子をつぎの 2 つの場合について観察し、比較することにする。

①真空にしない場合

真空容器の蓋はするが、真空ポンプは動かさず、ろうそくの炎が自然に消えるまで観察する場合。

②微真空の場合

真空容器の蓋をして、炎が完全に消えるまで真空ポンプを用いて真空容器内の空気を抜いていく場合。

4.3 結果

①真空にしない場合では、線香の煙がろうそくの上方に流れていき、さらに、煙は真空容器の側面に沿って下降し、再び、ろうそくの炎のほうへ上昇していく。このような対流する現象が見られた。この場合、炎の形状は通常の空気中の燃焼と同様に、上に伸びた形をしたまま、やがて消えていった。

②微真空の場合では、最初線香の煙が、①真空にしない場合と同様にろうそくの上方に流れていき、真空容器の側面に沿って降りてくるが、この後、煙は真空容器の底に溜まる現象が観察できた。

4.4 考察

この 2 つの結果から、炎の形状が通常の空気中で燃焼させたときに上方に伸びあがることは、空気の対流によると考えることができる。また、②微真空の場合では対流が発生せず、ろうそくの炎が空気の対流の影響を受けないので、炎が丸い形状になったと考えられる。よって仮説は正しいと言えそうである。

５．青い炎の研究

5.1 仮説

1 年生のとき、星の色は温度によって青かったり、赤かったりすると学習した。

そこで、②微真空の場合に青い炎が発生した原因として、炎の温度が関係している、という仮説を立て、炎の温度を測定することにした。

5.2 実験：温度を測定する

ろうそくの炎には、炎心、内炎、外炎といった部分があり、それぞれ温度が異なっている。そこで、熱電対温度計を真空容器の中に入れ、①真空にしない場合と②微真空の場合について、実際に各場所の温度を測定することにした。

熱電対温度計の先端は、まず炎心部分に置いて測定する。そして、内炎の部分、外炎の部分というように測定を繰り返した。

5.3 結果

次の表のような結果となった。

	①真空にしない場合	②微真空の場合
炎心	723.3 ℃	420.2 ℃
内炎	845.6 ℃	535.6 ℃
外炎	902.3 ℃	899.3 ℃

図 3

5.4 考察

①と②を比較すると、外炎の温度は違いがはっきりしないが、炎心に近づくほど、炎の温度が極端に低いことが分かる。このことより、②微真空の場合、対流の停止と酸素の濃度の減少という 2 つの原因によって、炎への酸素の供給量が低下し、その結果、炎の中心部の温度が低下する。それが、炎の色が青くなった原因であると言えそうである。よって仮説は正しいと言えそうである。

６．結論

微真空状態の場合、ろうそくの炎は対流が発生せず、酸素が供給されないため、丸い形状に変化することが分かった。炎の色の変化の原因については今回の研究では不明であった。

７．課題と今後の展望

(1)　②微真空の場合、青い炎になる様子を観察していると、図 4 のように、ろうそくの形状が丸く、炎の色が青くなる十数秒ほど前に、白い煙がろうそくを取り巻くように発生した。数秒間この煙を観察できたが、その後、煙は無色になり目に見えなくなった。

この煙は何によって発生したものかこれから探究したい。

図 4

(2)　今回の研究では、温度の低下によってろうそくの炎の色が青色に変化したということが予想できるが、なぜ青色になったのかということは不明のままである。青色になった原因として、温度以外の原因が考えられないか、研究を重ねてはっきりとしたい。

また、星の場合、青いほど温度が高く、赤いほど温度が低くなるので、今回の炎の色と温度の関係と一致しない。これも併せて研究したい。

８．参考文献

[1]　ろうそくの科学
http://www.genpaku.org/candle01/candle.pdf

９．謝辞

今回のこの研究において、顧問の米田先生には多大なご指導をいただきました。この場をお借りして、深く御礼申し上げます。

白黒フィルム写真のカラー化

5年B組　上田　　樹
指導教員　米田　隆恒

１．要約

白黒写真に記録されている情報とは､各画素の輝度の情報のみである｡カラー情報にはR、G、Bの３つの要素が必要であるため、白黒写真のカラー化は一般的に不可能だといわれてきた。しかし私は、１画素ではなく写真全体で見れば、輝度の分布、輝度の変化量の分布に元の色による違いが現れることに気付いた。そこで、私はまず写真内に存在する色は、元の物体の色に応じて規則があるとし、「基準色」「屈折点」という２つの情報のみで近似させた。また、白黒写真からでも得ることのできる、輝度の分布、輝度の変化量の分布のそれぞれのヒストグラムがこれらに関係することが分かった。この研究では、このように白黒写真から得られる情報のみによるカラー化を目指す。

キーワード　輝度、カラーモデル、基準色、屈折点、CG、法線ベクトル

２．研究の背景と目的

私が以前、父の子供の頃のアルバムを見せてもらった際、父はそのアルバムが白黒写真であることを気にしていた。カメラ屋などでのカラー化は手作業であるため高価で、アルバム単位での依頼は難しい。機械的にカラー化できないかと考えたが、白黒写真に残された情報は輝度情報のみで、カラー画像は各画素にR,G,Bの３つの情報を持っている。そのため、輝度だけでは色が１つに定まらず、機械的なカラー化は不可能であるように思えた。しかしその後、私は写真を撮っている際、写真全体の明るさ、明るさの変化の仕方が色によって異なることに気付いた。そこでこの研究では、これら白黒写真から得られる情報のみ、つまり「木であるから緑」といった資料なしでのカラー化を目指す。

３．研究内容

3.1 従来のカラーモデル

カラーモデルとは、色を規則に沿って 2 次元あるいは 3 次元空間上に配列する形式であり、色を座標で指示できるようにしたものである。カラーモデルを用いれば、色同士の違いという人間的な感覚を、それぞれの色を座標として扱うことで数値的に違いを調べることができる。

白黒写真から元の色を推測するためには、色ごとの輝度や彩度、色相の違いを明確にする必要がある。しかし、従来のカラーモデルの多くは、HLS モデル（図１）のように 3 原色で輝度がそれぞれ等しいとしてしまっており、色ごとの違いを考慮できていない。また、人の目での色の感度を正確に計測した CIE カラースペース（図２）等では、形状が複雑で、三原色 RGB への分解に不規則なデータを必要としてしまうため、カラー化を考えづらくなってしまう。

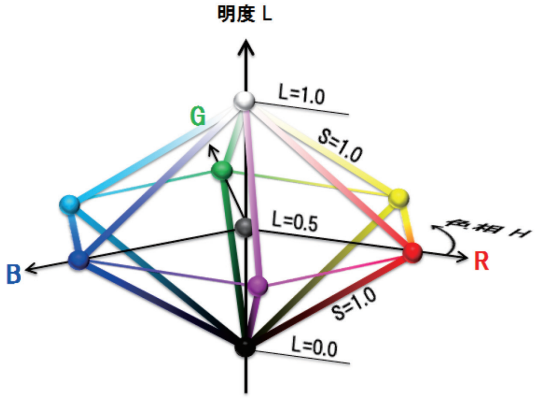


図１　HLS モデル

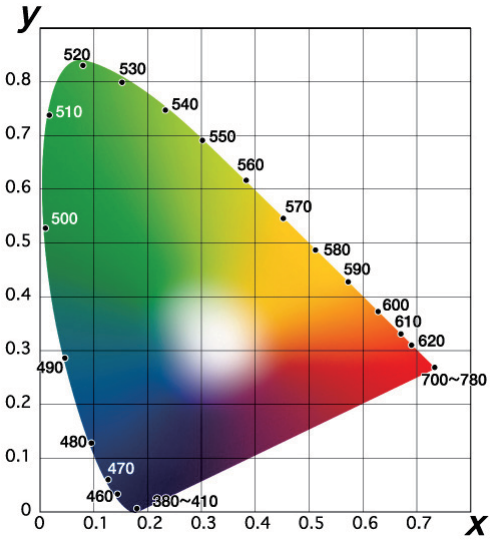


図２　CIE xyz カラースペース

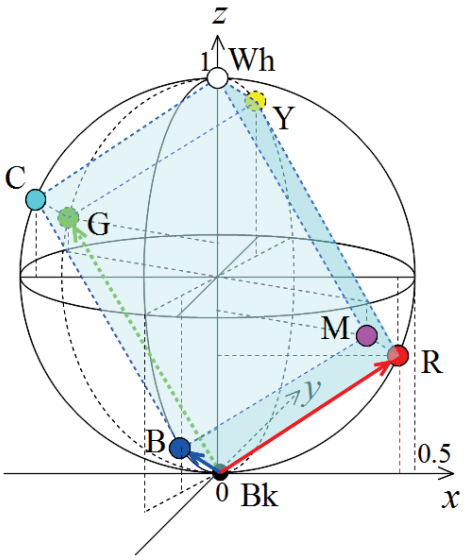


図３　URS モデル

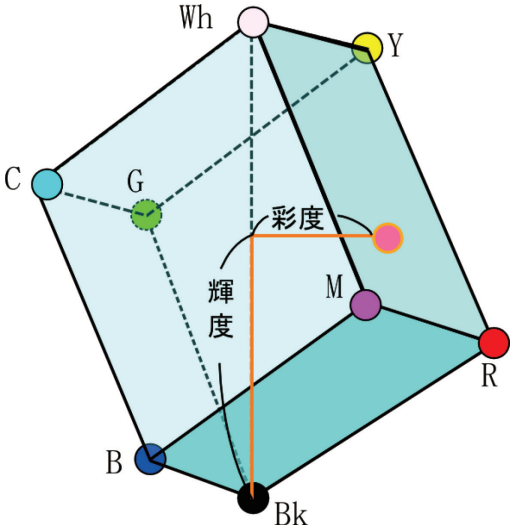


図４　輝度と彩度の関係

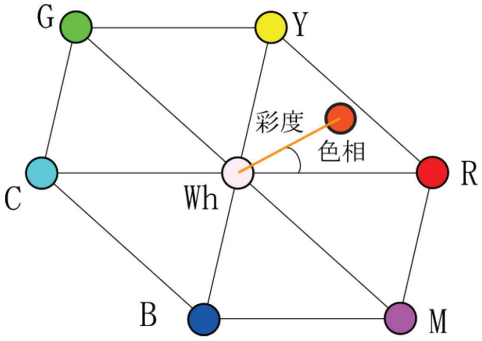


図５　彩度と色素の関係 z 方向から見た図

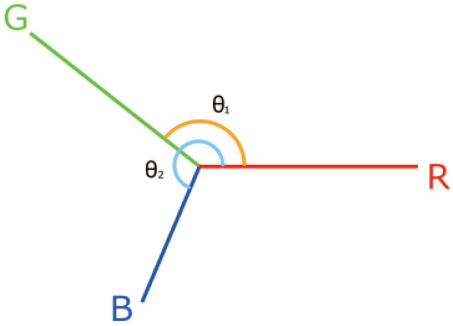


図６　RGB の色相関係

3.2 新しいカラーモデル(URS モデル)

従来モデルの問題点を解消し、白黒写真から得られる輝度情報から元の色を復元するために、輝度と色との関係を明確に示せる新しいカラーモデル Ueda Rectangular Solid model(URS モデル)を定義する。完成したものが図３である。

3.2.1 URS モデルの定義

一般に、色を数値で表すにはいくつかの方法がある。三原色 R、G、B の各強度を r,g,b とするとき、これを$\{r,g,b\}$と記すことにする。ただし、 $0 \le r,g,b \le 1$ である。

また、色は「輝度」、「彩度」、「色相」によって表される。この 3 つの自由度を表すためにURSモデルは3次元直交座標の位置(x,y,z)で色を表すことにする。

$\{r,g,b\}$、輝度、彩度、色相と URS モデルの座標(x,y,z)を次のようにして決定する。

［定義］

［輝度］輝度はモデル内の高さ z で表し、Bk の座標を(0,0,0)、Wh を(0,0,1)とする。三原色の強度が{r,g,b}の色の輝度は、一般にカラー画像を白黒化する際に用いられる式をそのまま使い、次式で定義する。

$$輝度 = 0.29891r + 0.58661g + 0.11448b \quad (1)$$

［彩度］彩度は z 軸からの距離で表す。

$$彩度 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

［色相］色相は x 軸から計った z 軸のまわりの回転角 θ で表す。ただし、R の色相は θ=0 とし、この向きを x 軸とする。また、G の方が B より θ が小さいとする。

［色と基準ベクトル］モデル内の Bk から R、G、B に引いたベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BkR}}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{BkG}}$ 、$\overrightarrow{\mathrm{BkB}}$ を基準ベクトルという。

色 P の成分を$\{r,g,b\}$とするとき、色 P の URS モデル内の座標は基準ベクトルを用いて次式で定義する。

$$\overrightarrow{\mathrm{BkP}} = r \cdot \overrightarrow{\mathrm{BkR}} + g \cdot \overrightarrow{\mathrm{BkG}} + b \cdot \overrightarrow{\mathrm{BkB}} \quad (3)$$

式(1)の輝度は、明るい色ほど URS モデルでは高い位置に座標をとり、また完全な赤、緑、青では、緑が最も高く青が最も低い位置に座標をとることを意味する。

式(2)の彩度は、Bk-Wh 軸(z 軸)上の色、つまり全てのグレーで 0 となり、色鮮やかなほど z 軸から離れた位置に座標をとることを意味する。

3.2.2 URS モデルの条件

以上の定義だけでは、3 原色 R、G、B およびそれらの補色 C、M、Y の URS モデル内の座標を計算することはできない。そこで、さらに条件を追加する。

［条件１］

URS モデルの形状は、色を簡単に 3 原色に分解できるようにするため、全ての色が $r \cdot \overrightarrow{BkR} + g \cdot \overrightarrow{BkG} + b \cdot \overrightarrow{BkB}$ の形で表せなければならない。つまり$\overrightarrow{BkR}, \overrightarrow{BkG}, \overrightarrow{BkB}$の 3 つのベクトルは一次独立であり、URS モデルはこれらのベクトルで各辺が表せる平行六面体でなければならない。以上は基準ベクトルの定義で保証されている。

［条件２］

基本の 6 色で補色関係にある色 R と C, G と M、B と Y の相対的な位置関係は等しく、それぞれの距離は Bk-Wh の距離 1 に等しいとする。まとめると、

$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{BkR}}, \vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{BkG}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BkB}}$ とおくとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{BkC}} = \vec{g} + \vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BkM}} = \vec{r} + \vec{b} \qquad (4)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BkY}} = \vec{r} + \vec{g}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BkWh}} = \vec{r} + \vec{g} + \vec{b}$$

［条件３］

URSモデルでの基本の６色は平行六面体の各頂点に位置し、それぞれ輝度 0.5 のグレー(0,0,0.5)から等距離にあり、距離は 0.5 とする。したがって、この平行六面体は、(0,0,0.5)を中心とする半径 0.5 の球面に内接する。

3.2.3 URS モデルの確定

以上の条件から、URS モデル内の基本の 6 色、つまり、平行六面体の各頂点の座標を決定した。

３原色 R、G、B の座標を $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z), \vec{g} = (g_x, g_y, g_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とおく。赤 R は{1,0,0}であるから、輝度の定義式(1)に代入すると、$r_z = 0.29891$ が求まる。同様にして、以下のようになる。

$$r_z = 0.29891$$
$$g_z = 0.58661 \qquad (5)$$
$$b_z = 0.11448$$

３原色 R、G、B の彩度をそれぞれ r_S, g_S b_Sとすると、条件３および式(5)より、

$$r_S = \sqrt{0.5^2 - (0.5 - r_z)^2} = 0.45778$$
$$g_S = \sqrt{0.5^2 - (0.5 - g_z)^2} = 0.49244 \qquad (6)$$
$$b_S = \sqrt{0.5^2 - (0.5 - b_z)^2} = 0.31839$$

G の色相を θ_1、B の色相を θ_2とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{BkWh}} = \vec{r} + \vec{g} + \vec{b}$ より、

$$r_S \cos 0 + g_S \cos\theta_1 + b_S \cos\theta_2 = 0$$
$$r_S \sin 0 + g_S \sin\theta_1 + b_S \sin\theta_2 = 0$$

これを解くと、

$$\theta_1 = 2.4620\,\mathrm{rad}$$
$$\theta_2 = 4.4740\,\mathrm{rad}$$

よって、

$$\vec{r} = (0.45778, 0.00000, 0.29891)$$
$$\vec{g} = (-0.38303, 0.30949, 0.58661)$$
$$\vec{b} = (-0.07475, -0.30949, 0.11448)$$

となり、他の頂点も式(4)から次のように求まる。

$$\mathrm{Bk} = (0,0,0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{Bk\,Wh}} = (0,0,1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BkC}} = (-0.45778, 0.00000, 0.70109)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BkM}} = (0.38303, -0.30949, 0.41339)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BkY}} = (-0.07475, 0.30949, 0.88552)$$

以上で新しいカラーモデル URS モデルが決定できた。

3.2.4 URS 座標への変換

RGB 色空間から URS モデルへの座標の変換は次式で定義する。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & g_x & b_x \\ r_y & g_y & b_y \\ r_z & g_z & b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \qquad (7)$$

逆に RGB 色空間への座標の変換は、

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & g_x & b_x \\ r_y & g_y & b_y \\ r_z & g_z & b_z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (8)$$

で計算できる。

RGB 各成分と輝度との関係が、URS モデルで用いた式(1)と異なる写真フィルムの場合でも、式(1)の定数を写真フィルムのものに変更し、それ以外の定数を計算し直せば、URS モデルはそのまま使うことができる。

3.3 光の挙動の計算

写真内の色の特徴を考える際、CG のレンダラの計算が参考になると考えた。そこで、実験用レンダラの製作と、写真内で色の決定に必要な条件の特定を行った。計算式には、物理ベースのレンダリング方程式に用いられる光の反射モデルの 1 つである BRDF の式を用いた。

BRDF では、反射する光の挙動を、物体が色に応じて吸収する拡散反射の成分と、視線の向きへそのまま反射する鏡面反射の成分に分けて考える。木の表面などざらざらした表面では拡散反射の性質が強くみられ、また鉄球や鏡では鏡面反射の性質が強くみられる。

図 7 の各ベクトルはすべて長さ 1 の単位ベクトルであり、$\vec{L}$ は物体の反射点 O から見た光源方向、$\vec{V}$ は視線方向、$\vec{N}$ は物体表面の法線方向である。また、∠LOV を二等分する方向を $\vec{H}$ とし、$\vec{H}$ に垂直な微小面を点線で表している。さらに、入射角∠LON を θ、∠HON を γ、光の波長を λ とする。

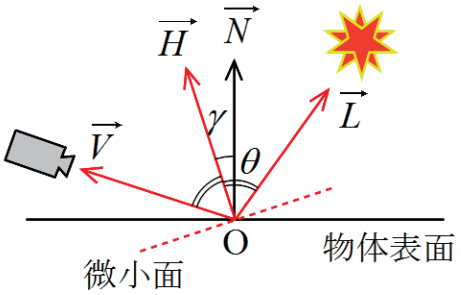


図 7　反射に関係するベクトル

まず拡散反射は、面が受け取った光を全ての向きに均等に再放射すると考えるので、面が光をどれだけ受け取れるかによって拡散反射の強度は変化する。その面が受け取る光の割合は、入射角角 θ が大きいほど小さくなり、ベクトル $\vec{L}$ とベクトル $\vec{N}$ の内積で与えられる。

次に鏡面反射は鏡で起こるような反射であり、$\vec{L}$ と $\vec{V}$ の二等分方向 $\vec{H}$ に垂直な微小面で起こると考えたときの反射である。物体表面が滑らかでなく、粗さを持っている場合は、そのような微小面が物体表面に存在すると考えるのである。その微小面の存在する割合を微小面勾配分布関数 D(γ)、その向きの微小面で反射した光が物体の凹凸によって遮られる割合を幾何学的減衰率 G、その向きにおいての鏡面反射係数 F(λ, θ) とおく。このとき、鏡面反射の輝度 I_{spec} は

$$I_{spec} = \frac{F(\lambda,\theta)D(\gamma)G}{\pi\cdot(\vec{N}\cdot\vec{V})(\vec{N}\cdot\vec{L})} \tag{9}$$

で与えられる。なお、式(9)から式(13)は参考文献[2]で与えられているものを引用する。

各項は次のようにして求められる。

まず鏡面反射係数 F(λ, θ)には、フレネルの方程式を用いる。入射角を θ、調べる光の波長を λ、その波長での屈折率を η_λ とおくと、

$$F(\lambda,\theta) = \frac{(g-c)^2}{2(g+c)^2}\left[1+\left\{\frac{c(g+c)-1}{c(g+c)+1}\right\}^2\right]$$

$$\text{ここで、} c = \cos\theta = \vec{V}\cdot\vec{H} \tag{10}$$

$$g^2 = \eta_\lambda{}^2 + c^2 - 1$$

で求められる。つまり、$\vec{V}$ と $\vec{H}$ と物体の質感から求めることができる。

微小面勾配分布関数 D(γ)は、いくつか手法があるが、今回はベックマン分布関数を用いた。ベクトル $\vec{H}$ と $\vec{N}$ のなす角を γ、表面の粗さを m と置くと、

$$D(\gamma) = \frac{1}{4m^2\cos^2\gamma}e^{-\left(\frac{\tan\gamma}{m}\right)^2} \tag{11}$$

で求められる。つまり、$\vec{H}$ と $\vec{N}$ と物体の質

感から求めることができる。

最後に、幾何学減衰関数 G である。微小面に当たる光は、周囲の微小面によって入射光または反射光の一部が遮られる。まず、入射光が遮られる場合の減衰率 Gb は、

$$G_b = \frac{2\left(\vec{N}\cdot\vec{H}\right)\left(\vec{N}\cdot\vec{L}\right)}{\left(\vec{V}\cdot\vec{H}\right)} \qquad (12)$$

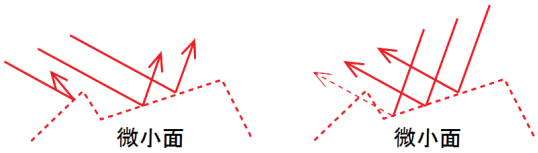
である。また、反射光が遮られる場合の減衰率 Gc は、

$$G_C = \frac{2\left(\vec{N}\cdot\vec{H}\right)\left(\vec{N}\cdot\vec{V}\right)}{\left(\vec{V}\cdot\vec{H}\right)} \qquad (13)$$

である。減衰は入射時または反射時のどちらかのみで起こり、減衰率 G は 0（完全にさえぎられる）～1（減衰なし）であるから、

$$G = \min\{1, G_b, G_c\}$$

である。つまり、$\vec{N}$、$\vec{V}$、$\vec{L}$、$\vec{H}$から求めることができる。



(反射光遮断)　　(入射光遮断)

図 8　微小面による幾何学減衰

よって、写真内で色を左右する要素は、ベクトル$\vec{N}$、$\vec{V}$、$\vec{L}$、$\vec{H}$と物体の質感である。

3.4　理想的なモデル

カラー化を考える際、最初から実際の写真のような複雑で多様な条件を考慮するのは困難である。そこで、実際の写真と似た特徴を持ち、かつ単純な画像があれば理想的であると考えた。光の挙動の計算式を基に、このような理想的なモデルを考案した。

写真に写る色は、法線ベクトル、視線方向、光源方向、光源を視線方向に反射可能な微小面の法線ベクトル、物体の質感の５つの要素によって変化する。このうち、まず光源は太陽光線と考えると平行光線であるため、写真に写るどの部分でも光源方向は変化しない。次に、視点が物体から十分に離れているとすると、平行投影に近づくため、写真内で視線方向は変化しないとみなすことができる。さらに、鏡面反射を起こす微小面の法線ベクトルは、視線方向ベクトルと光源方向ベクトルのハーフベクトルであるため、変化しないと言える。よって物体の質感が同じである範囲においては、写真の色の変化は法線ベクトルの変化によってのみ起こるといえる。

［仮説］

実際の写真において、ある程度広い範囲が撮られており、全ての方向に均等に法線ベクトルが分布している場合、写真内に映りうる色は、全ての向きに等しい割合で法線ベクトルをもつと考え、「球体」によってすべてを調べることができると考える。

この球体を「理想的なモデル」とし、条件を変えて映した球体の CG 画像を用いて、色を調べることにする。

3.5　理想的なモデルを用いた数値実験

球体の CG 画像(図９左)の各画素の色を URS モデルにプロットすると、図９右のようになる。

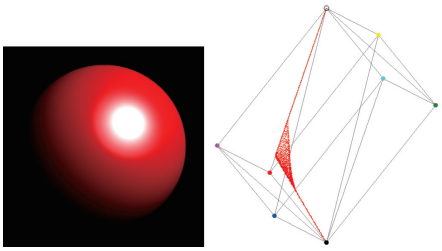


図 9　URS モデル内の色の分布

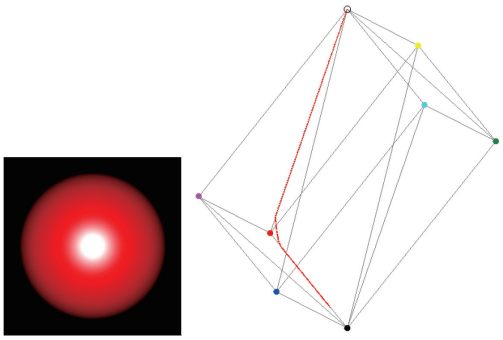
図９右のモデルでは、CG 画像に表した元の色である「少し明るい赤色」の点と白 Wh、黒 Bk を結んだ線上に、CG 画像内のほとんどの色がのっており、元の色の点の少し内側でそれぞれ折れ曲がり、さらにその囲まれた領域に散らばりを持っている。

そこで、CG で画像の条件を変えた際、URS モデルにプロットされた点の並びがどのように変化するかを調べる。

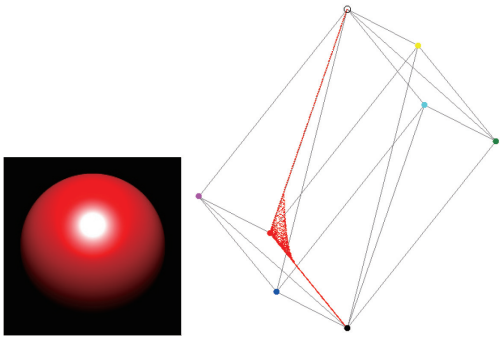
物体の色を(R,G,B)=(1, 0, 0)、反射率を 2.0、表面の粗さを 0.1、光源の強さを 15、光源を白色光、光源方向と視線方向のなす角を 0°、以上を基本条件とし、これらの一部を系統的に変化させたとき、URS モデル内の点の分布がどう変化するかを調べる。

［数値実験１：光源方向の影響］

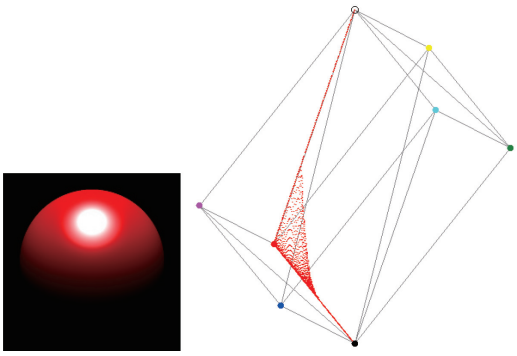
光源方向を x 軸の周りで視線方向から 0°、30°、60°、90°と変化させた際、色の並びがどう変化するかを調べる。



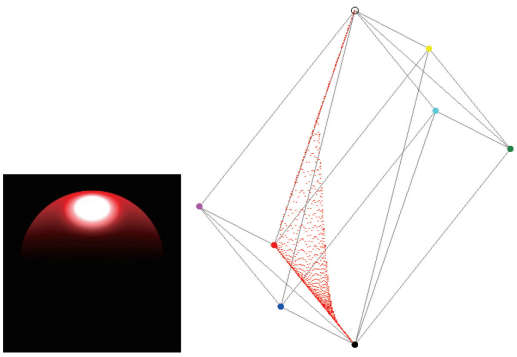
実験 1-1　光源方向を 0°回転



実験 1-2　光源方向を 30°回転



実験 1-3　光源方向を 60°回転

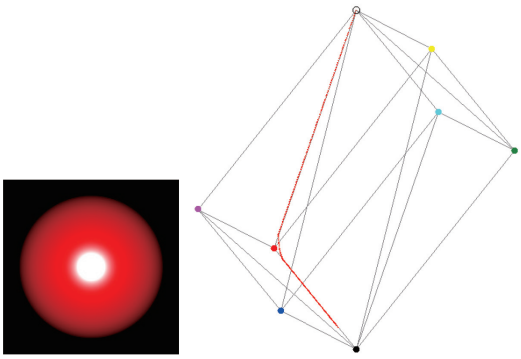


実験 1-4　光源方向を 90°回転

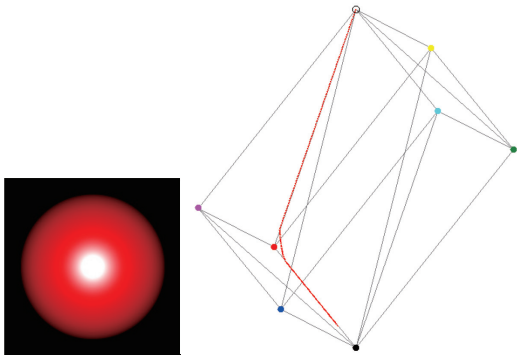
このように、光源方向を変化させた場合、視線方向となす角が広がるほど散らばりが強くなった。また、外側の主な線は変化しないことがわかった。

［数値実験２：表面の粗さ m の影響］

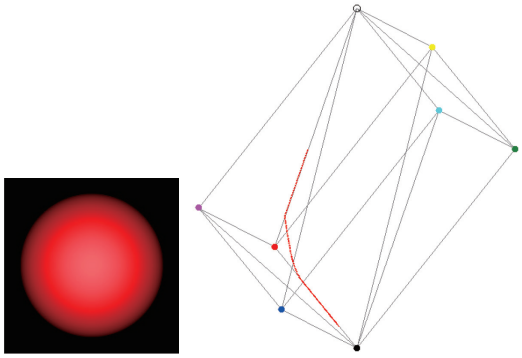
光源方向を 0°とし、物体の表面の粗さを変化させた際の色の分布を調べる。



実験 2-1　荒さ 0.0



実験 2-2　荒さ 0.1

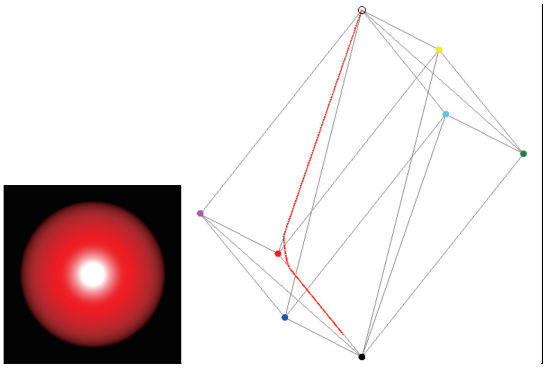


実験 2-3　荒さ 0.5

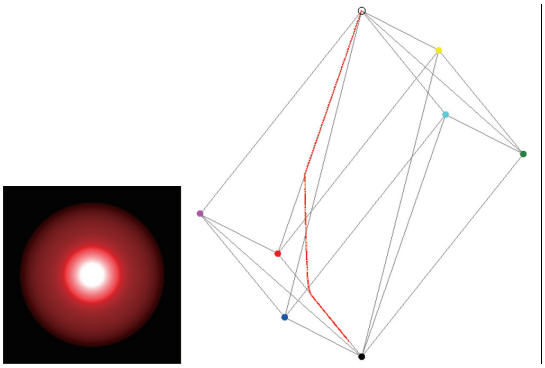
このように、粗さを変化させても Bk および Wh から折れ曲がり点までは変化はないが、荒さを上げるほど折れ曲がり点が Bk、Wh に近づくことがわかった。

［数値実験３：物体の色の濃さの影響］

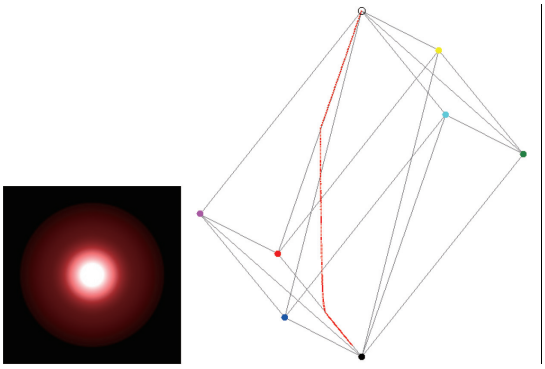
物体の色を(R,G,B)=(1.0, 0, 0)、(0.7, 0, 0)、(0.4, 0, 0)、(0.1, 0, 0) のように、色の濃さを変化させたときの色の分布を調べる。



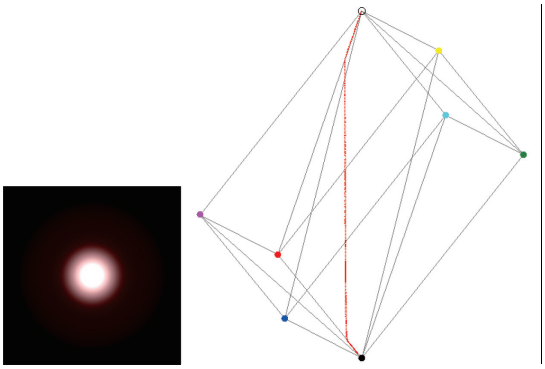
実験 3-1　物体の色(1.0, 0, 0)



実験 3-2　物体の色(0.7, 0, 0)



実験 3-3　物体の色(0.4, 0, 0)

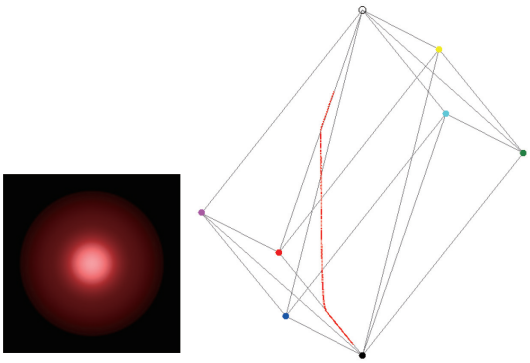


実験 3-4　物体の色(0.1, 0, 0)

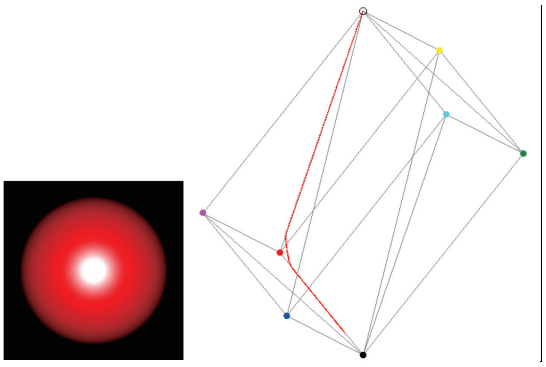
このように、物体の色の濃さを変化させても Bk および Wh から折れ曲がり点までは変化はないが、色が濃くなるほど折れ曲がり点が Bk、Wh に近づくことがわかった。

［数値実験４：光源の強さの影響］

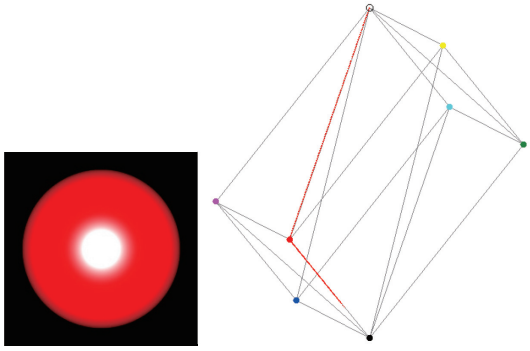
光源の強さを 10、20、30 と変化させた場合の色の分布を調べる。



実験 4-1　光源の強さ 10



実験 4-2　光源の強さ 20

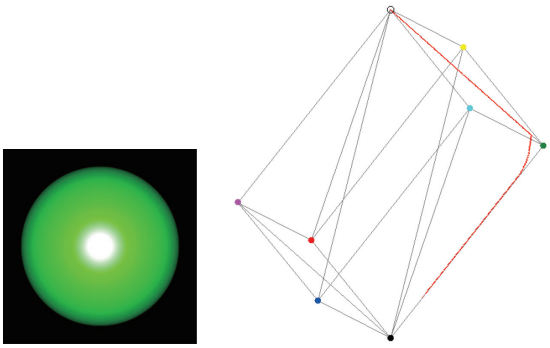


実験 4-3　光源の強さ 30

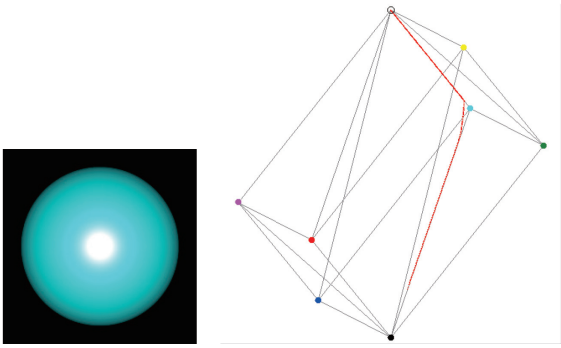
このように、光源の強さを変化させても Bk および Wh から折れ曲がり点までは変化はないが、光源が弱くなるほど折れ曲がり点が Bk、Wh に近づくことがわかった。

［数値実験５：物体の色相の影響］

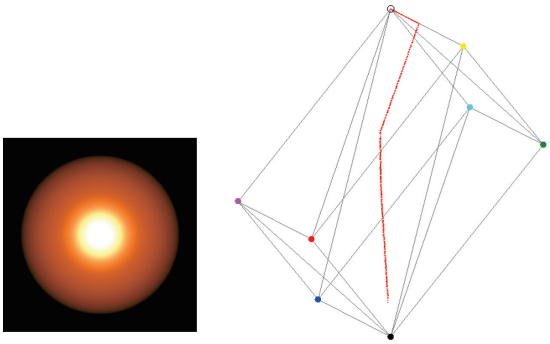
物体の色相を、他の基本色である G(0, 1.0, 0)や C(0, 1.0, 1.0)、また基本色以外の色として(1.0, 0.5, 0)や(0, 0.5, 1.0)にしたときの色の分布を調べる。



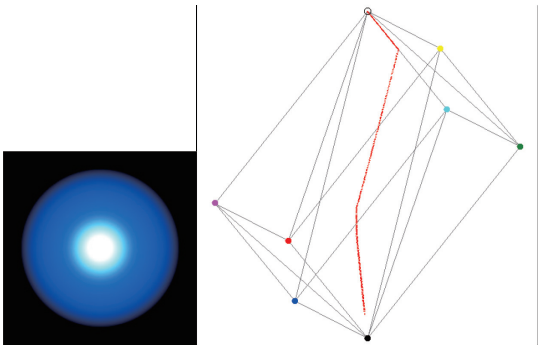
実験 5-1　物体の色(0, 1.0, 0)



実験 5-2　物体の色(0, 1.0, 1.0)



実験 5-3　物体の色(1.0, 0.5, 0)



実験 5-4　物体の色(0, 0.5, 1.0)

このように、他の基本の色でも、分布の外側の線は、その色と黒、白を繋いだ線になった。また、基本の 6 色でない色の場合の分布の外側の線は、黒とその色、その色と C,M,Y-Wh の軸上の点、軸上の点と白をそれぞれ結んだ線となった。

3.6　色の分布の近似

数値実験結果より、URS モデルにプロットされた点の並びは、物体の色などの条件によって、もっと簡単に表せるのではないかと考えた。そこで、色の分布の近似を考えた。

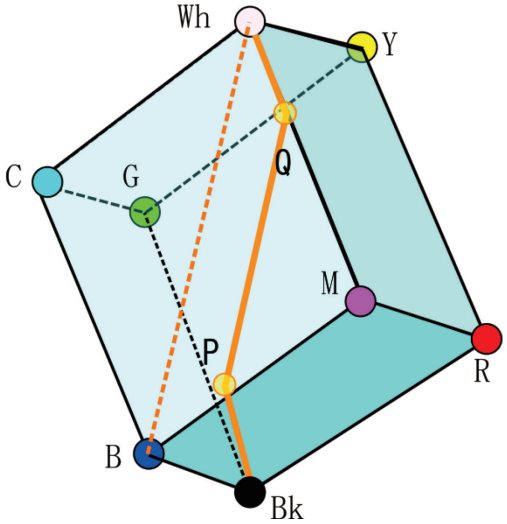


図 10　色の分布の近似 1

まず、光源が十分に強く、光源方向と視線方向が一致しているとき、基本色と Wh で構成される面上の点 P と、C,M,Y のいずれかと Wh を結んだ辺上の点 Q を用いて、外側の線を Bk-P-Q-Wh と表すことができる。

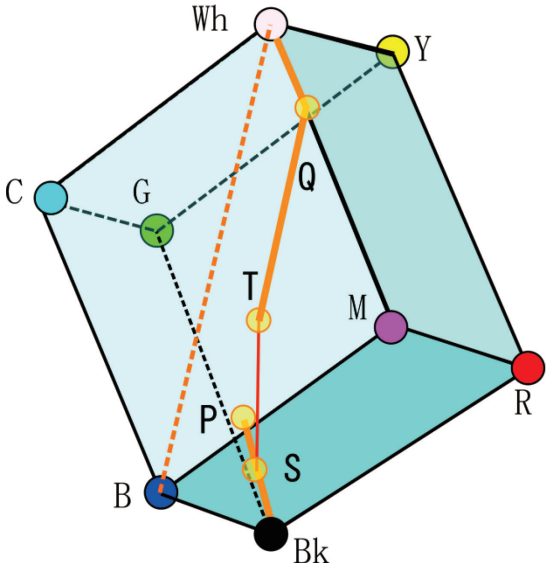


図 11　色の分布の近似 2

また、内側への折れ曲がりは、光が十分でなかったために拡散反射成分が P の輝度に達することができずに鏡面反射へと切り替わったと考えられる。光源色が白色のとき、Bk-P 上の点 S から線は真上に延び、モデルの上部の面との交点 T からは同様に Q、Wh とつながる。このとき、T-Q を結ぶ線は、最大値に達した R,G,B のどれかと Wh を結ぶ直線（図では B-Wh）と平行になる。つまり、Q は T が決まれば 1 つに定まる。またこの T も S の真上でありカラーモデルの面との交点であるため、S が決まれば 1 つに決まる。またこの S も、Bk-P 軸上にあるため、P が定まれば S の輝度の情報のみで 1 つに決まる。

この近似方法では、ある輝度を示す線上の点が 1 つであるため、白黒写真の各輝度の画素にそれぞれ相当する色を当てはめれば、写真の条件さえ合えばカラー化が可能である。つまり、条件のあった白黒写真のカラー化に必要な情報は、P の座標と S の輝度の情報のみである。

そこで、P を「基準色」、S を「屈折点」と呼ぶことにし、これらの特定を目指す。

3.7　実際の写真での近似の検証

球による理想的なモデルにおいて、色の分布の近似方法が、実際の写真でも成り立つかをつぎの手順で調べた。

① 元のカラー画像（図 12）をデジタル処理により一旦モノクロ画像に変換する。

② このモノクロ画像の色を URS モデルにプロットする。図 14 の赤い点がその分布である。

③ この赤い点の分布を図 14 の青い折れ線で近似する。

④ 青い線に従って、モノクロ画像の色を復元し、図 13 が得られる。

図 15～図 17 も同様である。

復元の精度の評価には、カラーモデル内での距離の平均を用いた。

図 12 の写真の復元での平均誤差は 0.0428、図 15 の写真の復元での平均誤差は 0.0274 となった。

このように、写真全体が似た色相である場合、近似式から元の色に大まかに復元することができることがわかった。

図 12　元画像

図 13　近似式からの復元画像

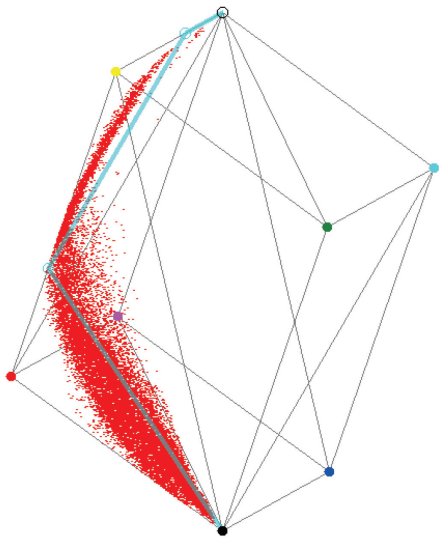


図 14　色分布(赤：元画像、青：近似式)

図 15　元画像

図 16　近似式による復元画像

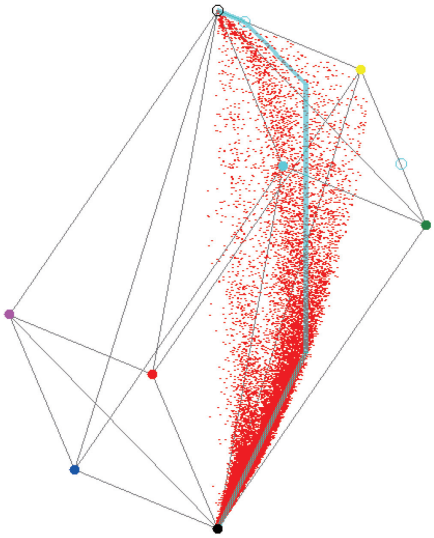


図 17　色分布

3.8　基準色、屈折点の輝度の特定

写真の条件を変えた際、写真全体の明るさや、隣どうしの画素を比べたとき鏡面反射等の明るさの差が大きくなる部分が変化した。そこで、写真全体でそれぞれの輝度を示す「画素数」および「輝度の変化量」を調べれば、基準色や屈折点などの特徴点の輝度が求まるのではないかと考えた。

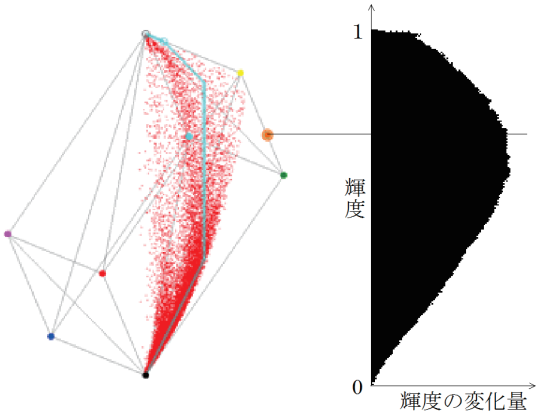
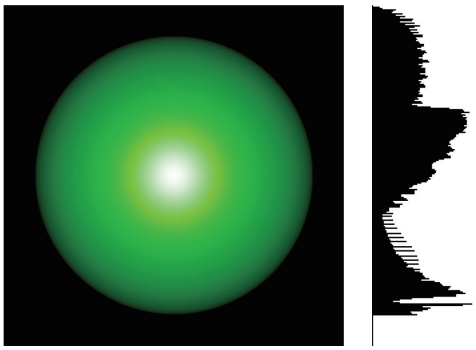


図 18　色分布（左）
各輝度における輝度の変化量（右）

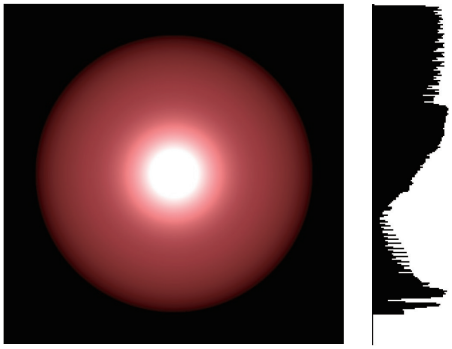
図 18 (右)のように、各輝度での輝度の変化量のヒストグラムでピークを示す輝度は、基準色の輝度と一致し、屈折点は輝度のヒストグラムの中央値と一致する。ただし、理想的なモデルでは輪郭の存在を考慮していないため、現時点では計算による証明はできていない。

3.9　色相の白黒写真への現れ方

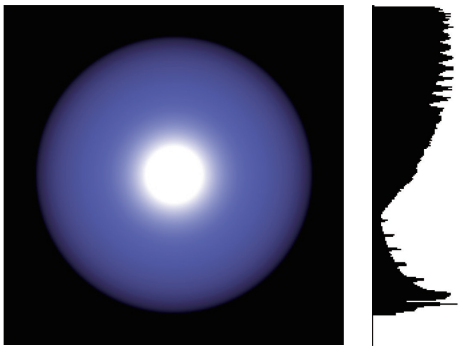
理想的なモデルにおいて、物体の色の基準色の輝度が同じで色相のみが違うとき、画像にどのような違いが現れるかを調べた。



実験 6-1



実験 6-2



実験 6-3

右側のグラフはそれぞれの画像についての、各輝度での輝度の変化量の平均値のグラフである。このように、色相の情報は、ヒストグラムの「形」に現れた。

3.10　同じ色分布の理想的なモデルの特定

色相の特定を行うためには、元の写真に写る物体の色が指定した色相のときの画像が必要であるが、それを得るためには映っている物体の形状を特定しなければならず、白黒写真から色相による差を調べられるほどの精度で立体化することは困難である。

しかし、理想的なモデルのように、単純な画像であれば、CG を用いて計算することは容易である。また、写真内に写る物体の法線ベクトルの分布が球体と同じであれば、光源の向き等の他の条件を合わせれば、色の分布、輝度の分布が元の写真と等しい球体の CG 画像、つまり写真の画素の位置を並び替えて作りえる球体の画像が作れることになる。

よって、このような画像に置き換えた時の、光源方向等の条件の特定を目指す。

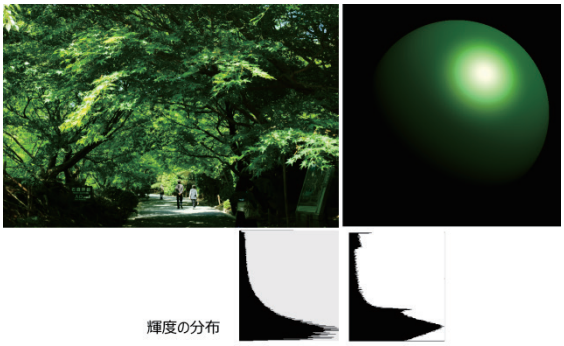


図 19 輝度分布が一致する理想的なモデル

まず、光源の方向についてである。光源の方向を変えると、光源方向が視線方向から離れるほど輝度分布が黒側に偏る。一般的な素材の材質では、鏡面反射の性質はそれほど広範囲では起こらないため、輝度のヒストグラムのピークは、普通、基準色の輝度よりも下、つまり拡散反射の性質の強い部分に現れる。また球体のように法線ベ

クトルの分布が一様な場合、法線ベクトルが視線方向ベクトルと一致する部分の色の面積が最も大きく映るはずである。

よって、輝度のヒストグラムで最大値を示すのは、光源方向と視線方向のなす角を θ とするとき、

(基準色の輝度)×(光源の強さ)×$\cos\theta$

である。また、屈折点について、

(屈折点の輝度)=(基準色の輝度)×(光源の強さ)

以上より、屈折点、基準色のそれぞれの輝度から光源の方向と強さと求めることができる。

3.11　色相の特定

写真から条件の一致する球体を作り、色相を変化させて「ある輝度での輝度の変化量」のヒストグラムを作り、どの色相で最も元の写真のヒストグラムに近づくかを調べる。

まず、理想的なモデルでは輪郭による輝度の変化を考慮していないため、写真から輪郭での変化を除去する。写真を取り込むときの大きさや映っている物体の大きさによって、全体的な変化量の大きさが変化してしまうため、輪郭部での輝度の変化量は写真によって異なる。そこで、輝度の変化量の度数分布表を作り、平均を下回る変化量の画素は $\left\{\frac{(\text{その画素での変化量})}{(\text{変化量の平均})}\right\}^2$、それ以外は1.0を輪郭以外の変化量の割合とし、全ての画素でこの値を記録する。ある輝度での輝度の変化量の平均値を求める際、各画素でのこの割合を用いて重み付き平均としたところ、輪郭部での変化量を除いた、理想的なモデルに近いヒストグラムとなった。

図 20　輪郭以外の変化量の割合

色相の絞り込みは、色相情報が輪につながり循環してしまっているため、簡単な式で値として出すことができない。そこで、基本の 6 色の色相でそれぞれ球体の CG 画像を作り、それぞれの画像と写真とで、輝度の変化量のヒストグラムを比較し、違いを各輝度での値の差の 2 乗値の平均として計算する。6 つのうち最もヒストグラムの形の近いものと、その両隣でより近いものとの間に正しい色相があるとする。これら 2 色を結んだ直線状で物体の色を変化させ、2 分法によって本来の色相の色を求める。

3.12　2 色以上の場合の特定

ここまでは写真全体での基準色が 1 つの場合を扱ってきたが、実際の写真では当然複数色用いられている場合が存在する。写真内の色が 2 色以上使われている場合、現実の色の近い部分ごとに画像を分割し、そ

れぞれで色を特定すればよいと考えた。

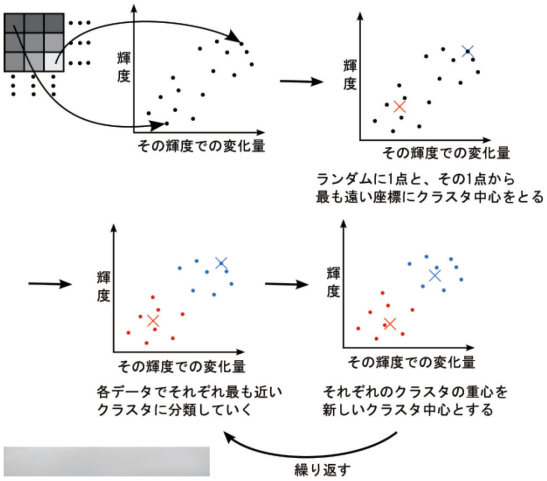


図 21　クラスタリング手順

ここまでの色の特定の際に、「輝度」と「各画素での輝度の変化量」の情報を用いていた。そこで、この 2 つの要素で 2 次元の座標をとれば、各画素が元の色ごとにかたより、分類できると考えた。分類方法には、クラスタリングを用いた。今回用いるクラスタリング手法は、K-means++法を元に高速化を図って独自に開発したものである。

まず、画像内の全画素について、x 軸を「各画素での輝度の変化量」、y 軸を「輝度」とする座標をとる。ランダムに一点をとり 1 つめのクラスタ中心とし、各データについてその点からの距離を計算する。この距離が最も遠い点を新しいクラスタ中心とし、各データをどちらに近いかで分類する。クラスタ中心を 3 点以上にする場合は同様に各データで最も近いクラスタ中心との距離を求め、その距離が最も遠いものを新しいクラスタ中心とした。

次に、各クラスタで属しているデータの座標の重心を求め、そのクラスタのクラスタ中心を重心に更新する。各データで更新されたクラスタ中心でのクラスタを振り直し、重心を求めなおす。この動作をクラスタの割り当てが変わらなくなるまで行う。

こうして求めたクラスタそれぞれに分割して基準の色を求めることで、写真の色分けが可能になった。

しかし、実際の写真では、色は急に変わるのではなく徐々に変わるため、間の色が存在する。そこで、それぞれのクラスタで一旦基準の色を推定し、各画素でそれぞれのクラスタ中心との距離を調べ、その比で色を混ぜることにより表せる。これにより、色の変化がなめらかになり、カラー化した結果が自然な色合いになった。

図 22　サンプル写真

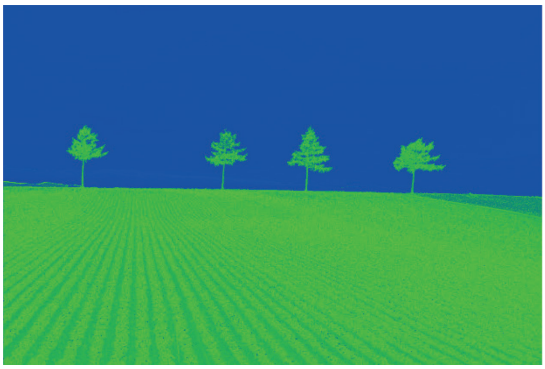


図 23　クラスタリング結果

それぞれのクラスタで基準色を求めると、クラスタ 1（図中の青い部分）が(0.298,0.298,1.0)、クラスタ 2（図中の緑の部分）が（0, 1.0, 0）となった。

図 24　カラー化結果

図 25　元画像

４．まとめと今後の課題

今回の研究では、カラー化に必要な情報を絞り込み、また写真を球体という簡単な形に置き換えることで、カラー化の基本の処理ができた。しかし、現時点ではカラー化の成功例が少なく、精度が低い。その原因として、理想的なモデルでの「法線ベクトルが全ての方向に均等に存在する」という条件を写真が十分に満たしていないのではないかと考えている。例えば建物等をとった際には、映っている「面」の向きの法線ベクトルが多くなってしまう。そこで今後は、球体だけでなく、直方体等の法線ベクトルに偏りのある立体も理想的なモデルとしていきたいと考えている。

また、実際の写真から条件の同じ理想的なモデルを求める際、現在は物体の質感を固定しているため、特殊な材質には対応できない。また、URS モデル内での色の分布の近似には、光源が白色光であるという条件があるため、夕焼け等の写真の再現が正確でない。今後は、このような写真が撮られた時の条件をもっと読み取ることで、より多くの写真に対応できるカラー化手法を開発したいと考えている。

５．参考文献

レンダラ関係

[1] memoRANDOM
「http://www35.atpages.jp/shocker/memoRANDOM/CG/contents/LTE1.html」

[2] BRDFレンダリングの方程式
「http://www.slideshare.net/todoroki/brdf-28983746」

画像処理関係

[3] イメージングソリューション
「http://imagingsolution.net/　」

６．謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の米田隆恒先生およびサイエンス研究会のメンバーには多大なご指導を賜りました。また、東北大学の阿部准教授及び「科学者の卵」メンターの方に多大なご意見、ご指摘を賜りました。この場を借りて、深く御礼申し上げます。

目線検出ソフトの作成

５年Ａ組　稲益　秀成
指導教員　米田　隆恒

１．要約

本研究では、目線の変化によってコンピュータを操作できるように、コンピュータを操作しているときの利用者の「黒目」の動きから目線を検出し、目線を使った入力装置となるソフトウェアを開発することを目的とする。

今回作成したソフトウェアは、Web カメラで利用者の顔を撮影し、その映像から目線を検出し、目線に合わせてマウスポインタを制御するものである。

キーワード　目、目線、目線検出、Web カメラ、OpenCV、Processing

２．研究の背景と目的

人間は他人の目を見ると、その目線と目線の先にあるものから、その人が何を見ているのかをおおまかに知ることができる。そこで私は、人間の目は視覚情報を得るだけでなく、自分がどこを見ているかを他人に知らせる役割も持っているのではないかと考えた。

今日幅広く普及しているコンピュータやスマートフォンなどが人間の目線を情報として取得できれば、これらの電子機器の使い方が広がるのではないだろうか。例えばコンピュータが利用者の見ているものを検出できれば、そこから利用者の興味のあるものを予測することができるかもしれない。

あるいは、マウスやタッチパネルの代わりに目線をポインティングデバイスとして使うことも考えられる。

これらの理由から、私はコンピュータを通じて利用者の目線を得る方法について考えていくことにした。

３．研究内容

まず、コンピュータが利用者の目線を取得する方法としては､Web カメラを用いた。Web カメラとは､Skype や FaceTime など、インターネットでテレビ電話を楽しむときに相手にリアルタイムで送信する、自分の顔を撮影するカメラのことである。最近のノートパソコンや一体型デスクトップパソコンには標準で搭載されていることが多く、外付けのものも安価で購入できる。(図１)

図１　Web カメラ

また、最近のスマートフォンや、タブレット端末などには同様な用途のカメラがほぼすべての機種に搭載されている。(図２)

図２　スマートフォン等のインカメラ

つまり、開発したソフトウェアをインストールするだけで、新たに専用の装置を追加しなくても、Web カメラさえあれば目線検出が行えるというメリットがある。

プログラミング言語はProcessingを使用した。これは、ソースコードを多少変更するだけで、Windows OS、Mac OS X、Linux、さらには Android OS でもソフトウェアを実行することができるため、幅広いデバイスで目線検出が行えると考えたからである。

今回開発したソフトウェアのプログラムの流れは以下の通りである。

①Web カメラから映像を取得する。

②取得した映像に対して OpenCV ライブラリによる顔検出を行う。

③OpenCV の顔検出結果から、映像中の顔の中心の位置、顔の肌の色を計算する。

④顔の位置と肌の色のデータを用いて映像中の顔の範囲を検出する。

⑤顔の範囲内の黒目の位置を検出する。

⑥黒目の位置に合わせてマウスポインタを動かす。

また、以降のフレームでは前フレームの顔の位置と肌の色を用いて顔の追尾処理を行うので、毎回 OpenCV での顔検出（①～③) を行わず、④から⑥のみの処理を行う。

なお、OpenCV については次で説明する。

（1） OpenCV を用いた顔検出

映像から黒目の位置を検出するために、まず映像中の顔の範囲を検出するべきだと考えた。これは、最初に映像全体から黒目を探す方法を試みたところ、黒目と形状が似通っているものが背景に映り込んでしまうと誤認識してしまい、実用的ではないと判断したからだ。そこで現在、写真管理ソフトや SNS の Facebook、その他いろいろな場面で実用化されている顔検出技術を使った後、その顔の範囲から黒目を探した方が、背景の影響を受けにくいと考えた。

顔検出方法としては、インテル株式会社が発表したオープンソースライブラリーである OpenCV を利用したパターン認識を使う方法を選んだ。

図３　顔検出におけるパターン認識の例
（参考文献[５]より引用）

これは、鼻筋の方がその隣の目のある部分の方より手前にあり、光が当たりやすいため明るくなる、というような顔の一部分と別の部分との色の違いの特徴をデータベースに持っておき、（図３参照） このデータをパターンとして映像の左上から１ピクセルごとにずらしながら、今調べている範囲の映像の特徴が、データベース上の顔の特徴と一致するかを調べていく方法である。

この顔の特徴のデータのひとつひとつでの認識率は低いものだが、２つの部分の色の違いを調べていくため、シンプルで計算量が少なくて済む。それらをたくさん用意することで認識率を高めていくことができる。

しかし今回、製作するプログラムは、リアルタイムに目線検出を行える必要があるため、すべての処理が軽いものでなくてはならない。

OpenCV による顔検出はシンプルであるとは言え、CPU に Corei５を搭載している現在一般的なパソコンでも一枚の FullHD サイズの画像の処理に１秒近くかかるほど処理が重いものである。そこで、この方法の顔検出はプログラムを開始した初回フレームのみにし、以降のフレームでは顔の肌の色の部分を追尾するようにした。この方法により、高精度の顔検出結果をリアルタイムに得ることができると考えたからである。

（２） 初回フレーム以降の顔の範囲の検出

初回フレームでの OpenCV の顔検出結果から顔の中心位置、そして顔の範囲内の色より、肌の色を取得したあと、これらのデータを用いて顔の位置を追尾し、顔検出を続ける方法をとった。

また、追尾をする処理もできる限り軽くするために、前のフレームの顔の範囲の中心の点の位置からまず上下に色を調べ初回に取得した肌の色の色相と比較し、肌の色でなくなるまで上下に範囲をのばして調べ続ける。その後上下にのばした範囲から左右に肌の色が続く範囲を調べていくことで顔の範囲を調べる方法をとった。(図４参照) 次回フレームではこの処理で計算した新たな顔の範囲から中心を計算して、同様の処理を行う。

肌の色か否かを判断するのに色相を用いたのは、たとえ顔に陰ができても、色相は値の変化が小さいため、光源による影響を受けにくいと考えたからである。

（３） 黒目の位置の検出

(2)の方法で検出した顔の範囲から、黒目の位置と、黒目の中心点の位置を調べる必要がある。

黒目を検出する処理としては、黒目にみられる、「黒い」「２つ横に並んでいる」「顔の上半分にある」「隣に白目の白色がある」という４つの特徴を利用することにした。

特に、「隣に白目の白色がある」という判定によって、比較的形状が似ている眉毛や鼻の穴などとの誤認識を大幅に減らすことができた。

プログラムの処理としては、以下のような順で行った。

① 顔の上半分の範囲の中で､白色と黒色が隣り合っている部分を探す。

②　黒色と白色が隣り合う部分が４カ所以上ある横方向の列をさがす。
③　②を満たす列が続いている範囲を目がある範囲とし、その中から黒い部分をさがす。
④　③の結果から二つの黒目の範囲を探し、その黒目の位置を点で表すために黒い部分の重心を計算する。

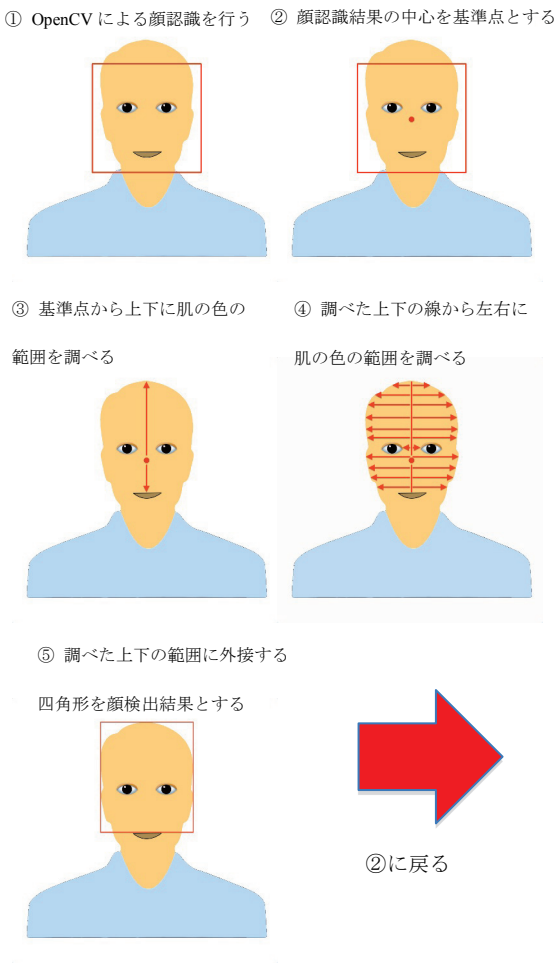


図４　顔認識の追尾の流れ

②において、４カ所としたのは、２つの黒目で白→黒と黒→白となる計４カ所あるはずだからである。

また、４カ所「以上」としたのは、図５のようにコンピュータのディスプレイの光で黒目の中央が白く反射してしまうときには４カ所より増えてしまうからである。

④において、黒目の点の計算に重心を用いたのは、図５のように黒目の中央がディスプレイの光で白く反射してしまっても、黒い部分の重心を計算することで、ある程度反射による誤差を減らすことができると考えたからである。

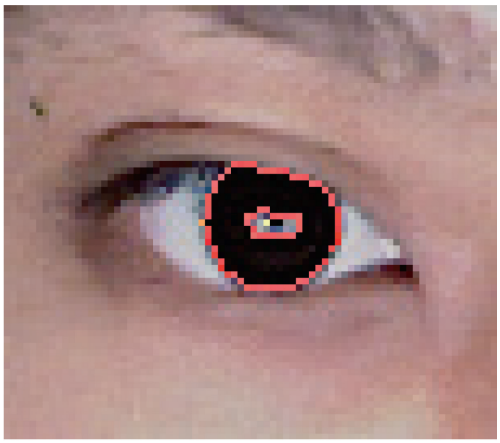


図５　黒目が反射している様子

（４）　マウスポインタの制御

ここまでの処理によって、映像中の顔の範囲の中心、黒目の位置を点で取得できたため、この２つの位置関係からマウスポインタの制御を行った。

マウスポインタの制御を開始する前に、利用者に画面の上下左右の端をみてもらい、そのときの黒目と顔の位置関係を保存する。そして保存した位置関係と黒目の点と顔の点の位置関係を比較することで、マウスポインタを制御した。

4. 結果

今回、Apple 社製 iMac Mid2011(画面サイズ 21.5 インチ、 CPU corei5 2.7GHz、メモリ 4GB)のモデルで本ソフトウェアを

実行した。顔と画面との距離は約 60cm である。

実際に目を動かしてからプログラムがその動きを認識するまでの遅延は約 0.2 秒であった。

1920×1080 ピクセルのサイズの Web カメラ映像からは、21.5 インチディスプレイを横に約 22 等分、縦に約 11 等分した細かさで見ている場所を示すことができた。

しかし、まだ顔の位置の変化に対応していないため、利用者の顔の位置が変わってしまうと目線検出を続けることはできない。

また、顔の範囲の検出において、眼鏡を使用した場合を考慮できていないため、眼鏡を使用した場合は目線検出を行えない。

5. 考察

今回のような方法を使えば Web カメラの映像から利用者の目線を検出し、おおまかに画面のどのあたりをみているのかを取得することができると分かった。また、目を動かしてから反応までの遅延は約 0.2 秒と、実用的な速度で目線検出を行えた。

現在目線検出デバイスとして存在する、頭にとりつけ目に近い位置にカメラを設置して目線を検出するタイプの装置に精度は劣るが、本研究の方法では、デバイスに標準装備されたもの、あるいは安価に市販されているものを使用するため、追加費用をかけず手軽に、多くの人が目線検出を行えるというメリットがある。

しかしながら現在は顔の位置の変化に対応しておらず、実際に実用化するためには顔の位置の変化に対応する必要がある。人は無意識に目線の変化に応じて首が動いてしまうため、顔の位置を動かさないように意識していても、どうしても顔の位置が変わってしまうのである。

6. 課題と展望

今回の研究において、Web カメラで撮影した映像から目線を検出し、短い遅延でマウスポインタを制御することに成功した。しかしながら、現在、顔の位置の変化には対応しておらず、コンピュータを使用する上で目線の変化による首の動きの変化が意識していても発生してしまうため、正しく見ている場所にマウスポインタを移動させるのはとても難しい。そのため、まず顔の位置の変化にソフトウェアが対応する必要がある。そのためには顔と画面の位置関係を立体的に把握しなければならない。顔の向きは鼻頭の位置の変化で読み取ることができると考えている。顔と画面の距離は映像中の顔の大きさの変化でよみとることができると考えている。

そして、将来の展望としては、マウスポインタにリンクさせることでコンピュータの操作をするだけでなく、マウスやタッチ操作の補助としてこの目線検出システムを活用したいと考えている。具体的な例としては、文書をよんでいるときに、目線認識で利用者がどこを読んでいるかを知ることで、自動スクロール、自動ページ送りができるのではないかと考えている。

また、これが完成すると、体の不自由な人でも目線の動きだけでコンピュータを操作できるようになるだろう。例えば、画面に「あいうえお…」といったような文字の表を表示しておき、それを一定時間見ることでその文字を選択したことにすれば、文章入力はもちろんだが、その文字を音声で

出力することで、体が不自由な人でも会話することができるようになる。このような社会貢献につながると考えられる。

さらに、別の考え方として、利用者がインターネットブラウザを使っているときに、Web サイトのどこを見ているかがわかると、その利用者が引きつけられた内容がわかり、そこからその利用者の興味がある内容を知り、どのような内容が読んでもらえるかを今まで以上に調べることができるようになるので、うまく使えば、Web サイトの質の向上にも繋がると考えられる。

６．参考文献

[1]　Processing Reference
「http://processing.org/reference/」
[2]　OpenCV ¥ Library
「http://ubaa.net/shared/processing/opencv/」
[3]　コンピュータビジョンのセカイ ・ 今そこにあるミライ
「http://news.mynavi.jp/series/computer_vision/008/index.html」
[4]　RGB から HSV への変換と復元
「http://hooktail.org/computer/index.php?RGB%A4%AB%A4%E9HSV%A4%D8%A4%CE%CA%D1%B4%B9%A4%C8%C9%FC%B8%B5」
[5]　OpenCV.jp
「http://opencv.jp/」

７．謝辞

今回の研究にあたり、サイエンス研究会物理班顧問の米田隆恒先生、藤野智美先生には、研究に関する助言や指導をしていただきました。また、同研究会のメンバーには研究のサポートをしていただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

車両挙動モデルの開発に向けて

5年A組　村田　宏暁

指導教員　米田　隆恒

１．要約

私は道路交通における交通渋滞の発生原理や性質について調べるため、JAVA 言語を用いてミクロ道路交通シミュレーターを開発し、研究を行っている。しかしこれまでに開発したシミュレーターは精度が不十分であったため、実際の車両の挙動データを測定し、そのデータを元に開発した車両挙動モデルを用いることで、精度の高いシミュレーターを開発しようと考えた。未だ測定には至っておらず、車両挙動の測定へ向けて準備している段階であるが、現状と今後の方針について述べる。

キーワード　　交通渋滞、シミュレーション、モデル、JAVA、OBD2

２．背景

現在、道路交通は移動や輸送において重要な役割を担っている。しかし、交通集中などによって渋滞が発生すると、所要時間の延伸や事故率の上昇など様々な問題が生じる。これを解決するためには渋滞の発生原理や性質を知ることが不可欠であるが、実際に実験を行うことは困難であるためシミュレーションによって擬似的に実験を行う必要がある。

私はこれまでにも独自に開発したシミュレーターを用いて道路交通についての研究を行ってきたが、用いていた車両の挙動モデルはシンプルなもので精度が不十分であった。私は実際の車両挙動のデータをモデル化することで精度の高い車両挙動モデルが開発できるのではないかと考え、車両の挙動を測定することにした。

３．研究内容

車両挙動を測定するためには、実際に測定する情報を決定する必要がある。今回は、運転者は車間距離、速度、前方車の速度の三つの要素を元に一定時間後の加速度を定めるものとして、これらの四つの値を測定することにした。以下でそれぞれの測定方法について述べる。

測定は車外から測定する方法と車内から測定する方法の二つが考えられるが、昨年度の論文で述べたように車外からの測定では精度を確保できないと考えられるため、車内から測定する方法を採る。

3.1 車間距離の測定

第一にレーザー距離計を用いることが考えられるが、市販のレーザー距離計は測量を目的としているため連続して測定することが困難であり、また、窓や黒い車体はレーザーを反射しにくく精度が悪くなってしまうため、車間距離の測定には適さない。そのため、二つのカメラ(カメラ A とカメラ B)で前方車を撮影し、車間距離を算出する。

通常、観測地点の違いによる画像のずれから距離を求める場合は特定の点についての視差から距離が算出されるが、二つのカメラから得られた画像の中から同一の点を見つけることは困難である。そこで「物体とカメラの位置と向き、及びカメラの画角が既知である場合、カメラに物体がどのように映るかを求めることができる」ことを利用し、前方車の後面をカメラ A の向きに垂直な平面と仮定して、次の①～⑤の処理を行うことで距離を求める方法を考えた。

① カメラ A の画像から前方車の後面を切り出す
② カメラ A と後面との距離を特定の値 a と仮定し、後面の位置を定める
③ カメラ B に写る画像をカメラ A の画像を元に算出する
④ ③で求めた画像と実際にカメラ B から得られた画像を比較し、一致度を算出する
⑤ a を変化させて②～④を繰返し、最も一致度の高くなる a を距離とする

しかし上記の方法をそのまま実装すると、計算量が多いため処理に時間がかかってしまう。上の方法ではカメラ B の向きや画角及び位置を一般化しているため計算式が複雑であるが、二つのカメラの向きと画角及び前方車の後面との距離と高さが等しいものとすると、カメラ A の画像の後面部分を距離に応じて左右に移動させるだけでカメラ B の計算上の画像の後面部分を求められ、処理時間が短くなるためこの方法を採用する。また、距離を定めて一致度を算出するのではなく、左右の移動量を b ピクセルと定めて一致度を算出し、最後に距離に変換することで処理を簡素化した。

なお、一致度は処理①で切り出した画像のピクセル数をnとして以下の式で算出する。

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{3}(256-|X_{k,l}-Y_{k,l}|)}{3\cdot 256\cdot n}$$

ただし、X_kは切り出した画像のk番目のピクセルを、Y_kは画像 B のX_kと重なるピクセルを表しており、$X_{k,1}, X_{k,2}, X_{k,3}$はそれぞれ$X_k$の色の R,G,B の成分を 0 以上 256 未満の整数で表したものである。$Y_{k,1}, Y_{k,2}, Y_{k,3}$も同様である。

しかし、この処理を行うにはカメラから得られた画像のどこに前方車が映っているのかが既知である必要があり、処理

の際に手動で設定するため誤差が生じる可能性がある。また、カメラの位置や向きが既知である必要があるため、エンジンによる振動などによってカメラの位置や向きがほとんど影響を受けないように固定する必要があるが難しく、未だ測定に至っていない。

3.2 速度の測定

GPS を用いる方法も考えられるが、データを得られる間隔が 1 秒程度と長く、連続測定には適さない。

そこで、OBD2 を用いる。OBD2 とは車両の自己故障診断のために ECU と呼ばれる車両内部のコンピュータと通信する際の通信規格であるが、故障情報の他にエンジンの回転数や速度などの情報を得ることもできる。車両に装備されている OBD2 コネクタに図 1 の機器を接続し、Android 端末と当該機器との間で Bluetooth を用いた通信を行うことで、間接的に車両と通信を行い、速度を得る。

図 1　ELM327 搭載の OBD2 アダプタ

ただし、得られる速度は車載の速度計と同じであり、速度計は実際の速度より大きな値を示すよう作られていることが多いため、系統誤差が発生する。また、得られる値は 1 km/h 単位である。

Android アプリを開発して通信を行い、速度が得られることは確認できた。しかし、受信したデータの中に意味の判明しないデータが含まれており、受信データから速度への変換を自動化できていない。

3.3 前方車の速度の測定

測定車の速度と、前方車の車間距離の変化率から前方車の速度を求める。

3.4 加速度の測定

加速度は、スマートフォン(Android)の加速度センサを用いて、独自に開発したアプリで測定、記録する。

しかし、測定に用いた Android 端末(ISW12HT)の加速度センサは重力と鉛直上向き方向の加速による慣性力とを区別できず、常に重力の影響を受ける。道路が水平であれば問題は発生しないが坂道である場合は実際の加速度と異なる値が得られるため、重力の影響を除去する必要がある。

3.5 後方車の挙動測定

車両の挙動は運転者によって変わる。特定の運転者の挙動に強く影響されたモ

デルでは実際の道路交通を再現できないため、運転者集団全体の特徴を反映したモデルが求められる。しかし、それを開発するには様々な運転者の挙動を測定する必要がある。ここまでで述べた測定方法は機器を搭載した測定車自身の挙動を測るものであり、運転者に協力していただく必要があるため、多くの運転者の挙動データを得ることは難しい。そこで、測定車の後方を走行している車両の挙動を測定することで、運転者に特別な協力をいただくことなくその挙動データを得ることを考えた。

後方車から見た「車間距離」は測定車と後方車との間の距離であるからカメラを後方に向けて設置することで、3.1 で述べたのと同様に測定することができ、「前方車の速度」は測定車の速度であるから 3.2 と同様に測定できる。また、後方車の「速度」は車間距離の変化率から相対速度を求めてそれに測定車の速度を加えることで得られる。後方車の「加速度」は 3.4 のように加速度センサを用いて直接測ることはできないが、相対速度の変化率に測定車の加速度を加えることで求められる。しかし、車間距離の測定方法を確立できていないため、未だ測定には至っていない。

４．今後の課題

まずは車間距離の測定を行い、誤差などを調べる必要がある。また、測定したデータからモデルを開発するためには加速度とその他のデータとの関連を調べる必要があるが、カメラの時計とスマートフォンの時計との間にずれがあると正確な関係を把握することができない。これらの時計を精密に同期させる方法を考える必要がある。

５．参考文献

[1]「交通工学」飯田恭敬 監修、北村隆一編著、オーム社 版(2008 年)

[2]「Java Platform, Standard Edition 6 API 仕様」
docs.oracle.com/javase/jp/6/api/

[3]「Android Developers」
developer.android.com/

[4]「ELM327 v2.1 data sheet」
www.elmelectronics.com/DSheets/ELM327DS.pdf

６．謝辞

この研究を行うにあたり、顧問の米田隆恒先生には多大なご指導を賜り、実験走行にも幾度もご協力いただきました。また、立命館大学の野間春生先生、近畿大学の多田昌裕先生にも多くの助言をいただきました。この場を借りて、深く御礼申し上げます。

建築模型を対象とした振動発生装置の製作

5年C組　青木　雅典
指導教員　米田　隆恒

１．要約

私は、2014年7月16日から一週間、私のほか3人のメンバーと共に香港サイエンスキャンプに参加した。このキャンプで私達は、日本の古代建築における耐震性について傾斜復元力と呼ばれる特性に注目し、建築模型に振動を与えることで、傾斜復元力がどのように影響するかを調べる実験を行った。そこで私は、実験に使用する振動発生装置、および建築模型の加速度検出モジュールを製作した。

キーワード　　振動発生装置、スライダクランク、加速度センサー

２．研究の背景と目的

奈良県だけでなく、日本には古代から残る建築物が数多く存在している。これらの建築物は、多くの自然災害に遭ったにも関わらずその姿を保ち続けている。特に、心柱等の耐震構造に関する研究が行われているように、地震に対する構造には多くの謎が秘められている。

私は、香港科技大学主催 Intercity Mathematics& Science Summer Camp for Talented Students（以下、香港サイエンスキャンプ）での研究活動において、ほかの３人のメンバーと共に、傾斜復元力特性に注目して、古代建築の耐震構造について研究を行った。そのなかの、柱の形状やそこに加わる力が耐震強度にどう影響するかを調べるための実験において、模型に対して振動を与え、その揺れを検出する必要があった。

本稿ではその実験のために製作した振動発生装置と模型の揺れを加速度として検出することが可能なモジュールについて記す。

３．研究内容

（１）研究事項

＜研究１＞

振動数および振幅を変化させることが可能な簡易型の振動発生装置を製作する。

＜研究２＞

建築模型の揺れを加速度として検出し、記録することが可能な計測用モジュールを製作する。

（２）研究内容

＜研究１＞

今回の実験では、建築模型を力学台車の上に載せて振動させる。そのため、製作する振動発生装置は、外部から力学台車を前後に直線運動させる必要がある。この装置はモーターを動力源としたいと考えたが、モーターは回転運動を行うため、そのままでは振動発生装置としては機能しない。そこで私は、この装置に「スライダクランク機構」と呼ばれる、回転運動を直線的な往

復運動に変換することができるリンク機構を組み込んだ。（図１）

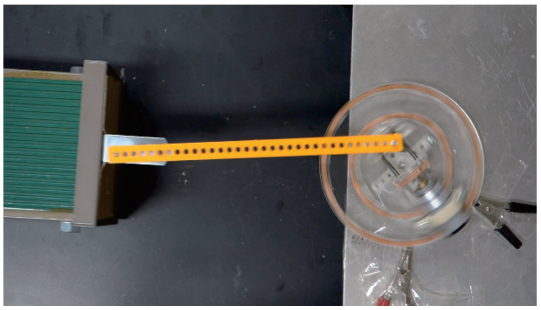


図１　製作したスライダクランク機構

スライダクランク機構では、回転軸からクランクピンまでの距離を大きくすると、往復運動の振幅も大きくなる。この仕組みを利用し、クランクピンの位置を実験者がモーターで自由に変えられるようにすることで、振幅が変化可能となった。しかし、この機構には主に二つの問題が存在した。

一つ目は、電力供給の問題である。回転板上のモーターを動かすには、当然電力が必要である。だが、そのままモーターと電源を導線で接続しただけでは、回転板を回転させた際に導線が絡まってしまう。この問題を解決するために、回転板の裏面に同心円状に二本のハンダ吸い取り線を取り付けた。そして、電源からの導線の先にバネを取り付け、それをハンダ吸い取り線に当てることで、バネがブラシとして機能し、回転板を回転させながら小型モーターに安定して電力供給を行うことができるようになった。（図２）

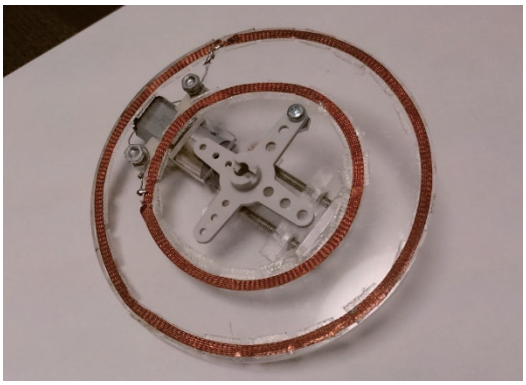


図２　回転板の裏面

二つ目の問題は、モーターの回転運動をどのように直線運動に変換するかである。回転板に載せるモーターは、回転軸のモーターと異なり、パワーの小さな小型の物である。そこで、小型モーターの先端にギアボックスを取り付け、モーターのトルクを上げる。さらに、ギアを通じてモーターの回転を２本のネジに伝え、クランクピンの取り付けられた板を移動させられる様にした。（図３）

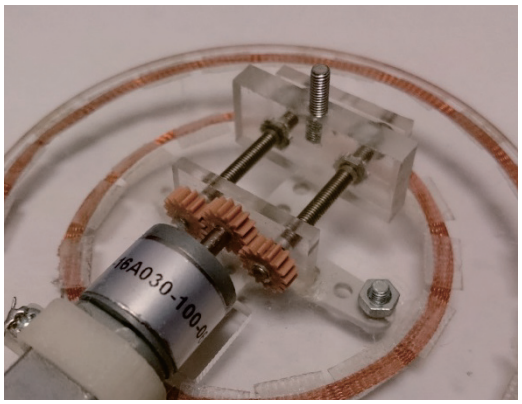


図３　可動式クランクピン

また、クランクピンと同じ高さのピンを力学台車に取り付け、それらを樹脂製の棒で接続して運動させた。

＜研究２＞

ここでは、模型の振動を計測するために、搭載したセンサーから情報を読み取り、加速度データを読み取る子機と、子機から送られてきたデータを受信し、コンピューター上のソフトウェアに引き渡す親機の二種類のモジュールを製作する。

今回は、加速度を計測するために、９軸センサーモジュール「MPU-9150」を利用した。（図４）このセンサーは、３軸方向の加速度センサーに加え、３軸方向のジャイロ、コンパスセンサーを備えている。そのため、このモジュールを建築模型の柱等に取り付けることで、模型の加速度だけでなく、柱の傾き具合なども検知することが可能となる。

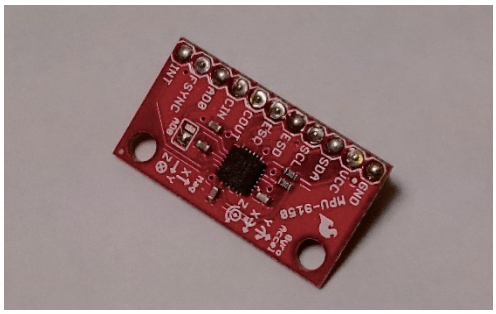


図４　９軸センサー「MPU-9150」

模型は力学台車の上で振動させるため、親機と子機は無線接続されていることが好ましい。そこで、無線通信モジュール「Xbee」を用いて近距離無線通信を行い、ワイヤレスでリアルタイムに模型の状態を把握出来るようにした。

９軸センサーや無線送受信モジュールは、単体では動作しないため、これらの周辺機器を制御し、連携させなければならない。そこで、ここでは「PIC24FJ64GA002」と呼ばれるマイクロコンピュータを用いて、情報処理を行った。また、子機から受信したデータを実験者が確認できるようにするため、プログラミング言語「Processing」で専用ソフトウェアを制作した。親機から受け取ったデータは、加速度、ジャイロ、コンパスの３つのセンサーすべてのデータが入っている。このデータをソフトウェアで読み込み、リアルタイムでグラフ描画することで、実験者が模型の振動状態をより観測しやすくなり、かつ振動状態の記録が可能となる。

４．研究結果

＜研究１＞

目標としていた、振動数及び振幅を変化させることが可能な振動発生装置を製作することができた。

ただし、実験者は加える電圧を変化させることで装置を制御するため、実験中に振動数や振幅を装置から確認することはできない。また、回転軸に使用したモーターがパワー不足だったため、振幅をある一定以上大きくすると負荷がかかり、振動周期が不安定になり、振動させることができなくなった。

＜研究２＞

模型の振動状態を検出し、加速度のデータを記録、およびリアルタイムでグラフ描画することに成功した。

しかし、受信している加速度データはセンサーからのデジタルデータをそのまま処理しているだけで、実際の加速度に変換しているわけではない。そのため、ここで計測した加速度を他の計算に利用することが

このままではできない。さらに、今回製作したモジュールは未だ試作段階であり、モジュール全体が大きく重いため、模型の振動に大きく影響してしまう。

５．考察

今回製作した振動発生装置に取り入れたスライダクランク機構は、回転運動を往復運動に変換する際、実際には往復運動の直線方向から少し傾いた方向に力がかかる。そのため、力学台車の進行方向と違った方向にも力がかかり、振動実験を続けると力学台車が徐々にずれ、結果として正しく振動しなくなってしまう。腕からの余分な力を打ち消せるような構造を作るか、もしくはスライダクランク構造以外の方法で、回転運動を往復運動に変換することを考える必要がある。また、加速度センサーからのデータを収集する間隔が長すぎると短時間の模型の変位が計測できない。データ収集の間隔をより短くする方法を探るか、加速度以外のデータから模型の動きを検知する方法を考える必要がある。さらに、今回の測定方法では、正確には模型の動きではなく、力学台車と模型の動きを一緒に検知してしまう。模型の動きを正しく測定するには、力学台車自身の変位も測定し、その差分を求めなくてはならない。

６．今後の課題

傾斜復元力特性に注目して行った今回の耐震強度実験では、傾斜復元力によって、建築物の倒壊がある程度防がれていることが確認できた。しかし、与えた振動が不安定な場合が多く、実際に計測された数値が不正確であることなどから、細かな計測実験等は行えなかった。

今後は、振動発生装置や計測モジュールの安定性および正確さを高めていくことを念頭に置き、より利用しやすい装置を製作していきたいと考えている。

７．参考文献

[1] PIC24F リファレンスマニュアル
www.microchip.co.jp/download.html

[2] MPU-9150 データシート
strawberry-linux.com/pub/MPU-9150_DataSheet_V4%203.pdf

８．謝辞

今回の研究にあたり、サイエンス研究会物理班顧問の米田隆恒先生には、日頃からご指導、ご助言をしていただきました。さらに、本校サイエンス研究会の先輩および同級生にも多大なご協力をいただきました。この場をお借りして、御礼申し上げます。

無線通信機能を備えた機器の製作

5年A組　船井　遼太朗
指導教員　米田　隆恒

１．概要

私は現在、装置を空中に浮遊させる技術と、装置の制御を無線で行う技術とを合わせることで、無線で操作できるホバークラフトを製作することを目標としている。今回は、ホバークラフトを無線で操作するためにXbee PRO S2B(以下Xbeeと表記する)という無線モジュールを用いてデータを送受信する装置を製作した。ここではその経過を報告する。

キーワード　無線通信、Xbee、AVRマイコン、ATTiny2313

２．研究の背景と目的

近年、宙に浮くスケートボードであるホバーボードなどのホバークラフトに注目が集まっている。私は、ホバークラフトが浮遊する原理についての研究発表を聞き、空中に浮遊する装置を製作したいと考えた。ホバークラフトは機体の内部と外部との圧力差により上向きの力を生じさせるため、底面を除いた他の面を囲まなければならない。ゆえに、有線で制御を行うことが困難となり、無線通信の技術が必要となる。そこで今回無線通信を行う装置を製作した。

３．研究内容

今回この機器を製作するにあたってAVRマイコンシリーズのATtiny2313というマイクロコンピュータ(以下マイコン)を使用した。このマイコンはDIPという、基盤に挿し込んで利用できる形状であるため実験に利用しやすく、かつ安価であるため今回使用した。しかし、無線での通信機能が搭載されていないため、無線通信を行う際、専用の機器が必要となる。無線資格を所有していなくても使用可能な機器の一つにXbeeというモジュールがある。このXbeeは1台ごとにシリアルナンバーが登録されており、その番号から通信相手を判別する。Xbeeの初期設定を比較的手軽に行える、X-CTUという環境がある。X-CTUは無償で提供されており、通信相手となるXbeeの指定やXbeeが持つGPIOピンの設定などが行える。ゆえに今回私はXbeeという無線通信機器を用い、Xbee 2台の間で無線通信を行うことにした。Xbeeには3台以上のXbeeを使用することに適したAPIモードと呼ばれる、APIフレームデータとしてデータの送受信を行うモードと、ATコマンドモードというXbeeのシリアル入出力を利用してマイコン等からのデータをそのまま送受信できリモコンのような使い方ができるモードの2種類の機能が存在する。今回は1対1で通信することを目標としているためATコマンドモードで通信する方法を選択した。また、Xbeeは変換器を用いてパソコンと接続することができる。この時ATコマンドモードであればATコマンドという機能で通信相手のXbeeの情報を得ることができる。

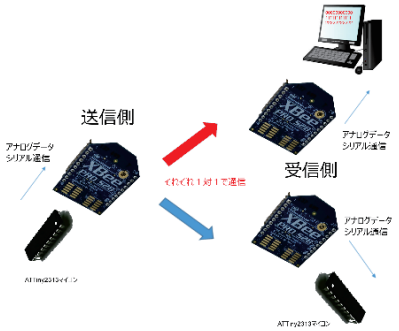


図１

Xbee の DIN と ATtiny2313 の TX ピン（送信ピン）、DOUT と RX ピン（受信ピン）をそれぞれ接続し、リモコン（送信側）と、リモコンに入力された情報によって LED が動作する回路を製作した。リモコンにはタクトスイッチを 3 つ搭載しており、それぞれ別々に押すと、0、1、2 の数字が押したスイッチに対応して送信されるようになっている。受信側がパソコンの場合、シリアル通信のターミナルの画面に押したスイッチと対応した数字が押した長さに応じて表示され(図２)LED 回路を受信側としたときは、0、2 を受信した時は消灯したままで、1 を受信したときは LED が点滅するようにした（図３）。

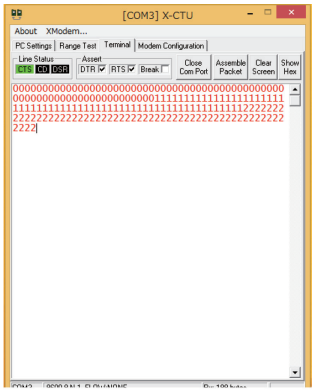


図２

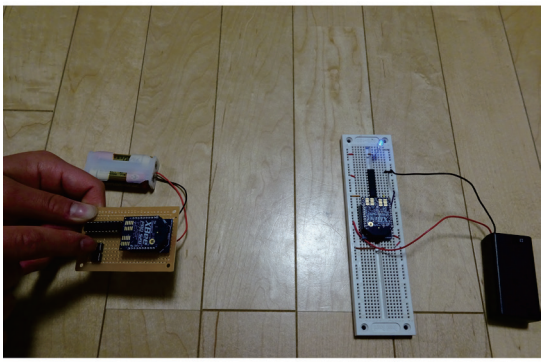


図３

４．今後の課題

今回私は Xbee の AT コマンドモードを用いて無線のシリアル通信を行うことに成功した。この技術を応用し、無線通信によって制御を行うことができるホバークラフトの製作をしたいと思う。

５．参考文献

[1]「試しながら学ぶ AVR 入門」土井滋貴著 CQ 出版社版(2010)

[2] Xbee Documentation User Manuals「http://www.digi.com/support/productdetail?pid=4549&type=documentation」

[3] Xbee Pro S2B 自己総集編「http://www.inetclub.gr.jp/Total_collection_volume.htm」

６．謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ多くの先生、先輩方に多大なご指導をいただきました。この場で深く感謝申し上げます。

コラッツ予想について

2年C組　小椋　晃一
指導教諭　川口　慎二

１．　要約

サイエンス研究会数学班2年生はコラッツ予想について学習している。今回はコラッツ予想の性質を発見することを目的とした。その過程において、コラッツ予想に関する考察をすることができたので紹介する。

キーワード　コラッツ予想、$3n+1$、$4a-1$、偶奇、整数論

２．　研究の背景と目的

「**コラッツ予想**」とは、自然数nが偶数であるときは $\frac{1}{2}n$ の値を計算し、奇数であるときは $3n+1$ の値を計算するという操作をm回繰り返すと、値が1になるmが必ず存在するという予想である。例えば、$n=3$のときを考える。なお、本稿では、計算の過程を以下のように表記することにする。

$$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

計算の回数(＝$\to$の数)より、$m=7$である。私は、この操作に興味を持ったので考察した。本稿ではその結果をまとめる。

３．　研究内容

3.1　定義

■合同式

$p,q,r \in Z$として、$p-q$がrの倍数となるとき、$p \equiv q \pmod{r}$と表せる。この式を**合同式**という。このとき、pとqはr**を法として合同**であるという。

また、$p \equiv q \pmod{r}$であることは、$p \div r$の余りと$q \div r$の余りが等しいことと同値である。

■操作

本稿では、$\frac{1}{2}n$を計算することを操作A, $3n+1$を計算することを操作Bとする。また、値が1になるまでの操作回数をm回とする。

3.2　操作をして増える数

さまざまな数にこの操作を施してみると、$n=4a+3$の場合は操作回数が多くなるのではないだろうかと推測した。

■$n=4a+3$となる場合

命題１

$a \equiv 1 \pmod{2}$のとき、$n=4a+3$に2回操作した値をbとすると$b \equiv 3 \pmod{4}$となる。

(証明) $4a+3$ に操作を施すと、$4a+3$ は奇数なので、操作 B により

$$3(4a+3)+1=12a+10.$$

次は偶数なので、操作 A により、

$$\frac{1}{2}(12a+10)=6a+5.$$

つまり、$4a+3 \to 12a+10 \to 6a+5$ となり、$b=6a+5$.

$a \equiv 1 \pmod 2$ より、ある $x \in Z$ を用いて、$a=2x-1$ と表すことができる。そこで、$a=2x-1$ を $b=6a+5$ に代入すると、

$$b=6a+5=6(2x-1)+5=12x-1$$

4 を法として考えると、

$$12x-1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4.$$

したがって、$b \equiv 3 \pmod 4$. (Q. E. D.)

■ $n=16y-1$ の場合

命題２

$a \equiv 3 \pmod 4$ のとき、$n=4a+3$ に 4 回操作した値を c とすると $c \equiv 3 \pmod 4$ となる。

(証明)

$a \equiv 3 \pmod 4$ より、ある $y \in Z$ を用いて $a=4y-1$ とおける。そこで、$4a+3$ に代入すると、

$$n=4a+3=(16y-4)+3=16y-1.$$

各回の値の偶奇に注意して操作すると、

$$16y-1 \to 48y-2 \to 24y-1 \to 72y-2 \to 36y-1$$

となるから、$c=36y-1$。ここで、$36y$ は 4 で割り切れるので、4 を法として、

$$36y-1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4.$$

したがって、$c \equiv 3 \pmod 4$. (Q. E. D.)

命題 2 は、$16y-1$ を 4 回操作したら、4 を法として合同になることを示している。またこのとき、2 回連続では操作 A をしていない。

■ $n=64z-1$ の場合

$n=64z-1$ に 12 回操作したとき、以下のようになる。

$$64z-1 \to 192z-2 \to 96z-1 \to 288z-2 \to 144z-1 \to 432z-2 \to 216z-1 \to 648z-2 \to 324z-1 \to 972z-2 \to 486z-1 \to 1458z-2 \to 729z-1$$

このとき、操作 A を 2 回連続では実行していない。12 回の操作の間では、z の係数の値が大きくなっていく。そのため $64z-1$ 以外の場合と操作回数を比べようと考えた。$64z-1$ の操作回数は以下のとおりである。

$z=1$ のとき　操作回数：107 回
$z=2$ のとき　操作回数：46 回
$z=3$ のとき　操作回数：44 回
$z=4$ のとき　操作回数：47 回
$z=5$ のとき　操作回数：55 回
$z=6$ のとき　操作回数：45 回
$z=7$ のとき　操作回数：97 回

いくつかの数について、操作回数を調べてみたが、それらに比べて、これらは比較的操作回数が多いように思えた。

3.3　コラッツ予想が成り立つ自然数 n について

命題３

$q \in Z$ を m 回操作すると 1 になるとする。このとき、$k \in N$ に対して、$2^k q$ は $k+m$ 回操作すると 1 になる。

なぜならば、2^k は2で k 回割ることができるので、$2^k q$ に操作Aを k 回施すと値は q となる。また仮定より、q 自身は m 回操作すると1になることから、命題3が成り立つ。

■コラッツ予想が成り立つ自然数 n

$s \in N$ として、$1, 2, 3, \cdots, s$ のすべてに対してコラッツ予想が成り立つとき、それぞれを2倍した2から $2s$ までの偶数に対してもコラッツ予想が成立する。また、逆も成り立つ。

なぜならば命題3と仮定より、$1\times 2, 2\times 2, 3\times 2, \cdots, 2s$ もコラッツ予想が成立する。逆も同様の考えである。また、この考え方から、すべての自然数に対してコラッツ予想が成り立つことと、すべての偶数に対して予想が成立すること、あるいはすべての奇数に対して予想が成立することは、すべて同値となる。

3.4　4の倍数の場合

命題４

$b \in N$ のとき、$\dfrac{4^b-1}{3} \in N$.

(証明)　数学的帰納法を用いて証明する。

①$b=1$ のとき、$\dfrac{4^1-1}{3}=1$ より、命題は成り立つ。

②$b=k$ のとき、命題が成り立つとする。つまり、$\dfrac{4^k-1}{3} \in N$ とする。

$b=k+1$ のとき、

$$\frac{4^{k+1}-1}{3}=\frac{3\times 4^k+4^k-1}{3}=4^k+\frac{4^k-1}{3}$$

より、$\dfrac{4^{k+1}-1}{3} \in N$. よって、命題が成り立つ。

したがって、①, ②より、すべての $b \in N$ に対して命題が正しいことが示された。

(Q. E. D.)

ちなみに、同様にして $\dfrac{4^b-1}{3} \equiv 1 \pmod 4$ であることを示すことができる。

命題５

$b \in N$ のとき、$\dfrac{4^b-1}{3} \equiv 1 \pmod 4$.

(証明) 4を法として、$4^b-1 \equiv -1 \equiv 3$ より、$c \in N$ を用いて、$4^b-1=4c+3$ と表すことができる。すると、

$$\frac{4^b-1}{3}=\frac{4c+3}{3}=\frac{4}{3}c+1$$

であり、命題 4 より 4^b-1 は3で割り切れるので、$\dfrac{4}{3}c+1 \in N$. いま、$c \in N$ より $\dfrac{4}{3}c$ は4の倍数である。ゆえに、

$$\frac{4}{3}c+1 \equiv 1 \pmod 4$$

なので、$\dfrac{4^b-1}{3} \equiv 1 \pmod 4$.　(Q. E. D.)

命題６

m が5以上の奇数であるとき、操作回数が m 回となる自然数 n は2個以上存在する。

(証明)

命題 3 より、2^m の操作は m 回である。仮定より m は奇数なので、$\frac{m-1}{2} \in N$.

すると、命題 5 より、$\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3} \equiv 1 \pmod 4$

なので、$\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3}$ は奇数である。ゆえに操作 B を行うと $\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3} \times 3 + 1 = 4^{\frac{m-1}{2}} = 2^{m-1}$.

ここで、命題 3 より、2^{m-1} の操作回数は $m-1$ 回であるので、$\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3}$ の操作回数は $1+(m-1)=m$ (回)である。すると、

$$\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3} = \frac{1}{3}(2^{m-1}-1) = \frac{1}{6} \times 2(2^{m-1}-1)$$

$$= \frac{1}{6}(2^m - 2)$$

より、$2^m \neq \frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3}$.

したがって、操作回数が m 回となる自然数 n は、少なくとも $n = 2^m, \frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{3}$ の 2 個は存在する。 (Q. E. D.)

４． 今後の課題

今回、n が $4a+3$ や $16y-1$，$64z-1$ の場合のコラッツの予想について考察することができた。しかし、それら以外の場合や、コラッツの予想の本筋である、m が必ず存在することに関してはあまり考察を深めることができなかった。今後はそれらについても挑戦していきたい。

５．参考文献

[1] web ページ「未解決問題」
http://math.a.la9.jp/amikai.htm

６． 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方にも助言をいただくことができました。ありがとうございました。

正五角形と黄金比Ⅱ

２年Ｃ組　古宮　昌典
指導教員　川口　慎二

１. 要約

サイエンス研究会数学班 2 年生は図形の性質について研究している。今回は自分で考えた図形の性質をとらえることを目標とし、その性質の証明のために三角比に関する定理を利用した。

キーワード　正五角形、黄金比、三角比、円と円の交点、正多角形

２．研究の背景と目的

正五角形の一辺の長さと対角線の長さの比が黄金比になっているということは、広く知られていることである。他にもそのような関係があるのかと考え、その例として、独自に発見したことについて本稿にまとめることにした。また、その考察も紹介する。

３．研究内容

３－１．基本的な定義と定理

■黄金比

黄金比とは比１：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$のことであり、$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$をϕで表すことが多い。このϕは、$\phi^2+1=\phi+1$，$\dfrac{1}{\phi}=\phi-1$という不思議な性質をもっている。

■三角比

図１のような AB を斜辺とする直角三角形 ABC において、∠ABC をθとする。このとき、

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}},\quad \cos\theta=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}},\quad \tan\theta=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$

と定義する。

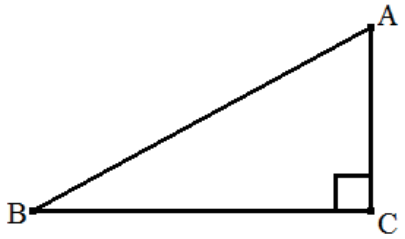


図１

定理１（ピタゴラスの定理）

直角三角形 ABC において、AB を斜辺とする。このとき、$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$が成り立つ。

(証明)

図２において、AB＝z，AC＝x，BC＝yとする。このとき、4 つの直角三角形はすべて合同である。すると、△ABC の面積は$\dfrac{1}{2}xy$ と表すことができる。しかし、zを用いて、$\dfrac{1}{4}\left\{(x+y)^2-z^2\right\}$ とも表すことができる。

よって、$\dfrac{1}{4}\left\{(x+y)^2-z^2\right\}=\dfrac{1}{2}xy$.

この等式を変形させて、

$$x^2+2xy+y^2-z^2=2xy.$$

したがって、$x^2+y^2=z^2$.　(Q. E. D.)

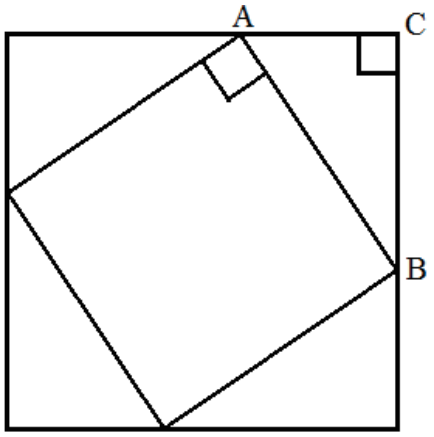


図２

定理２　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

(証明)

直角三角形 ABC で、AB を斜辺(つまり、∠C＝90°)として、∠ABC＝θとする。また、AB＝1 とすると、

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{AC}}{1}=\mathrm{AC},\ \cos\theta=\frac{\mathrm{BC}}{1}=\mathrm{BC}.$$

定理１より、$1^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2$.

よって、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.　(Q. E. D.)

定理３（加法定理）

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(証明)

(1) 図３の四角形 ACDF は長方形で、∠BGD＝90°, ∠BDG＝β, ∠GDF＝α, ∠BGA＝γとする。また、点 B は弧と辺 AC との交点である。いま、BD の長さを 1 とすると、α＋∠GFD＝∠AGD,　γ＋∠BGD＝∠AGD より、α＋90°＝γ＋90°. ゆえに、$\alpha=\gamma$.

また、$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}=\mathrm{BE}=\mathrm{AF}$ より、AF の長さが$\sin(\alpha+\beta)$となる。一方、GB＝$\sin\beta$より、$\cos\gamma=\dfrac{\mathrm{AG}}{\mathrm{BG}}=\dfrac{\mathrm{AG}}{\sin\beta}$.

ゆえに、AG＝$\cos\gamma\sin\beta$.

また、DG＝$\cos\beta$より、$\sin\alpha=\dfrac{\mathrm{GF}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{\mathrm{GF}}{\cos\beta}$. ゆえに、GF＝$\sin\alpha\cos\beta$.

よって、

BE＝AG＋GF

$=\cos\gamma\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$.

$\alpha=\gamma$なので、

BE＝$\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$.

したがって、

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

(Q. E. D.)

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DB}}=\mathrm{DE}$より DE の長さが$\cos(\alpha+\beta)$となる。まず、DG＝$\cos\beta$より、$\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{\mathrm{DF}}{\cos\beta}$. ゆえに、DF＝$\cos\alpha\cos\beta$.

また、BG＝$\sin\beta$より、$\sin\gamma=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BG}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\sin\beta}$. ゆえに、DF＝$\sin\gamma\sin\beta$.

よって、

DE＝DF－BA

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\gamma\sin\beta$.

$\alpha=\gamma$なので、

DE＝$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

したがって、

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

(Q. E. D.)

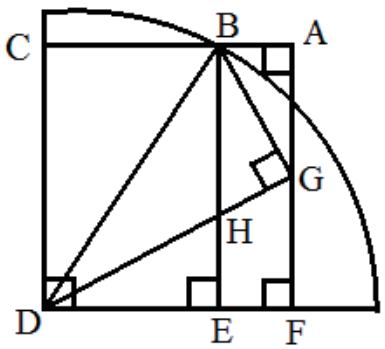


図３

定理４　（2 倍角の定理）

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

(証明)

定理３(1)より、

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

この式に、$\beta=\alpha$を代入すると、

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

が得られる。また、定理３(2)に$\beta=\alpha$を代入することで、

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

が得られる。(Q. E. D.)

定理５

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

(証明)

定理２と定理４より、

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \left(1-\sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \left(1-\cos^2\alpha\right) \\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

(Q. E. D.)

定理６　(余弦定理)

△ABC について、BC＝a，CA＝b，AB＝c，∠BAC＝θとする。このとき、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$

が成り立つ。

(証明)

図４のように、点 C から AB に降ろした垂線の足を H_1 とする。$\sin\theta = \dfrac{CH_1}{b}$ より、$CH_1 = b\sin\theta$ …①. また、$\cos\theta = \dfrac{AH_1}{b}$ より、$AH_1 = b\cos\theta$．ゆえに、

$BH_1 = c - AH_1 = c - b\cos\theta$ …②.

すると、①，②および定理１より、

$$\begin{aligned}a^2 &= CH_1^2 + BH_1^2 \\ &= (b\sin\theta)^2 + (c - b\cos\theta)^2 \\ &= b^2\sin^2\theta + c^2 - 2bc\cos\theta + b^2\cos^2\theta \\ &= c^2 + b^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) - 2bc\cos\theta\end{aligned}$$

ここで定理２より、

$$\begin{aligned}a^2 &= c^2 + b^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) - 2bc\cos\theta \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.\end{aligned}$$

(Q. E. D.)

３－２．正五角形と黄金比

正五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ について、各頂点を中心とし、この正五角形に外接する円の半径を半径とする円をそれぞれ描き、正五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の外接円の中心 O から等距離にある円の交点を結ぶと最初の正五角形以外に 2 つ正五角形を作ることができる。

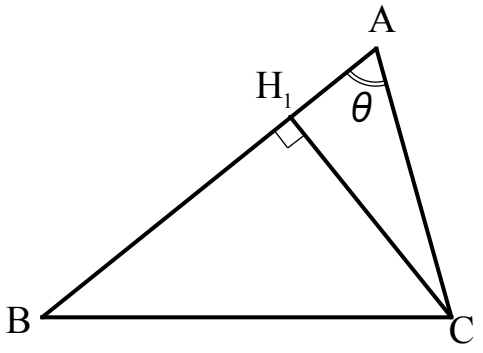


図４

そして、正五角形の中心から一番近い正五角形を $B_1B_2B_3B_4B_5$, 一番遠い正五角形を $C_1C_2C_3C_4C_5$ とする。図５を見よ。このとき、これらの図形は、次の 2 つの性質をもつ。ここで、円の半径はすべて r とする。

命題１

(1) $OA_i : OC_j = 1 : \phi \quad (1 \leqq i,\ j \leqq 5)$

(2) 4 点 C_5, B_1, B_2, C_2 は一直線上にある。

(証明)

(1)　△C_1OA_2 は二等辺三角形である。いま、四角形 $OA_1C_1A_2$ はひし形なので、対角線 A_1A_2 と OC_1 は互いの中点で直交する。ゆえに、A_1A_2 と OC_1 の交点を H_2 とすると、∠A_2OC_1＝36°　なので、

$$\cos 36^\circ = \frac{OH_2}{OA_2} = \frac{OH_2}{r} = \frac{OC_1}{2r} \text{ より、}$$

$$OC_1 = 2r\cos 36^\circ = 2r \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}r$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}OA_1 : OC_1 &= r : \frac{1+\sqrt{5}}{2}r = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 : \phi\end{aligned}$$

(Q. E. D.)

(2) この図形は直線 OC_1 を対称の軸として線対称である。よって、点 O から B_1B_2 に下ろした垂線の足を H_3, 点 O から C_5C_2 に下ろした垂線の足を H_4 とし、OH_3＝OH_4 を証明すれば十分である。まず、B1, B2 はそれぞれ OA_1, OA_2 上にあるため、明らかに H_3 は OC $_1$ 上にある。さらに、C_1C_2=C_1C_5 より、H_4 も明らかに OC_1 上にある。

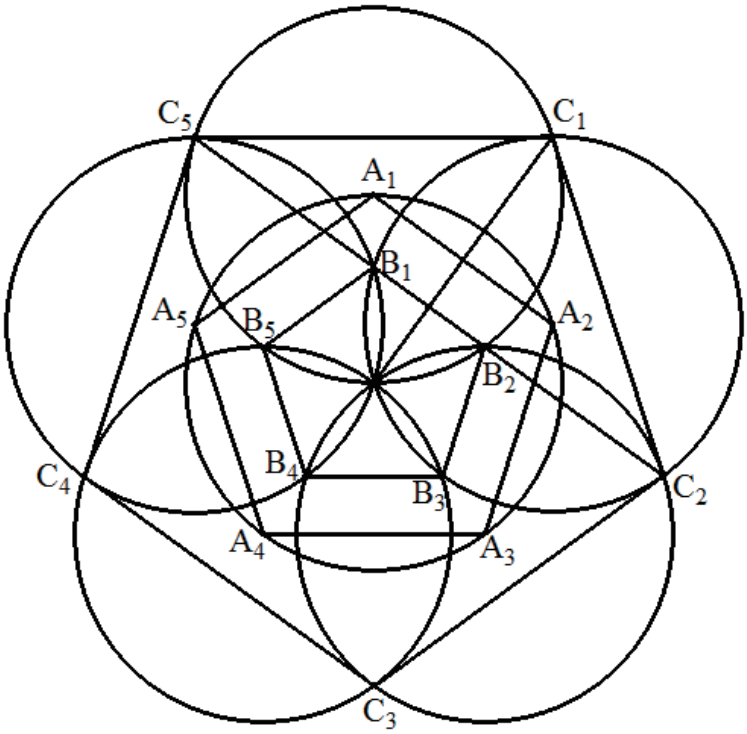


図５

まず、$A_2B_1=A_2O$ より、$\triangle A_2B_1O$ は二等辺三角形である。よって、この二等辺三角形の底角は $\angle A_2OB_1=72^\circ$ であるから、頂角は $\angle OA_2B_1=180^\circ-(72^\circ\times 2)=36^\circ$ である。ゆえに、余弦定理(定理６)より、

B_1O^2

$=A_2B_1^2+A_2O^2-2\times A_2B_1\times A_2O\times\cos 36^\circ$

$=2r^2-2r^2\cos 36^\circ$

$=2r^2(1-\cos 36^\circ)$.

ゆえに、$B_1O>0$ より、

$B_1O=\sqrt{2r^2(1-\cos 36^\circ)}=r\sqrt{2(1-\cos 36^\circ)}$.

ここで、定理５より、

$\cos 36^\circ=\cos(2\times 18^\circ)=2\cos^2 18^\circ-1$

より、

$$\begin{aligned}B_1O&=r\sqrt{2(1-\cos 36^\circ)}\\&=r\sqrt{2\{1-(2\cos^2 18^\circ-1)\}}\\&=r\sqrt{2(2-2\cos^2 18^\circ)}\\&=r\sqrt{4(1-\cos^2 18^\circ)}=r\sqrt{4\sin^2 18^\circ}\\&=2r\sin 18^\circ.\end{aligned}$$

$\triangle B_1OH_3$ は直角三角形なので、

$$\cos 36^\circ=\frac{H_3O}{B_1O}=\frac{H_3O}{2r\sin 18^\circ}.$$

ゆえに、$OH_3=2r\sin 18^\circ\cos 36^\circ$ …①

一方、A_1 から OC_5 に下ろした垂線の足を H_5 とする。$\triangle A_1C_5O$ は二等辺三角形なので、$\triangle A_1OH_5$ は直角三角形となり、$C_5H_5=OH_5$ である。よって、図６より、

$$\cos 36^\circ=\cos\angle H_5OA_1=\frac{OH_5}{r}$$

ゆえに、$OC_5=2OH_5=2r\cos 36^\circ$ …②

$\triangle OC_5H_4$ は直角三角形であり、また、

$\angle OC_5H_4=90^\circ-\angle C_1OC_5=90^\circ-72^\circ$

$=18^\circ$

であるから、$\sin 18^\circ=\dfrac{OH_4}{OC_5}$.

ここで、②より、

$$\sin 18^\circ=\frac{OH_4}{OC_5}=\frac{OH_4}{2r\cos 36^\circ}.$$

よって、$OH_4=2r\sin 18^\circ\cos 36^\circ$ …③

したがって、①，③より、$OH_3=OH_4$ なので、４点 C_5, B_1, B_2, C_2 は一直線上に並ぶことが示された。（Q. E. D.）

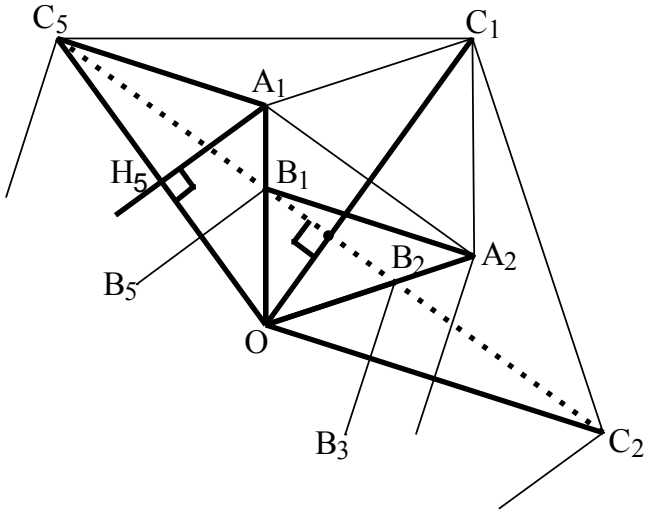


図６

３－３．一般化

ここで、先ほどの図形を正 n 角形に対して考えてみた。すると、6 つの性質を発見することができた。ただし、もとの正 n 角形を $A_1A_2A_3\cdots A_n$，中心から一番近い正 n 角形を $B_1B_2B_3\cdots B_n$，中心から一番遠い正 n 角形を $C_1C_2C_3\cdots C_n$，中心から二番目に遠い正 n 角形を $D_1D_2D_3\cdots D_n$ とする。また、点 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ を中心とする円をそれぞれ $O_1, O_2, O_3, \cdots, O_n$ とする。ここで、円の半径はすべて r とする。図７は $n=7$ の場合を、図８は $n=10$ の場合をそれぞれ表している。

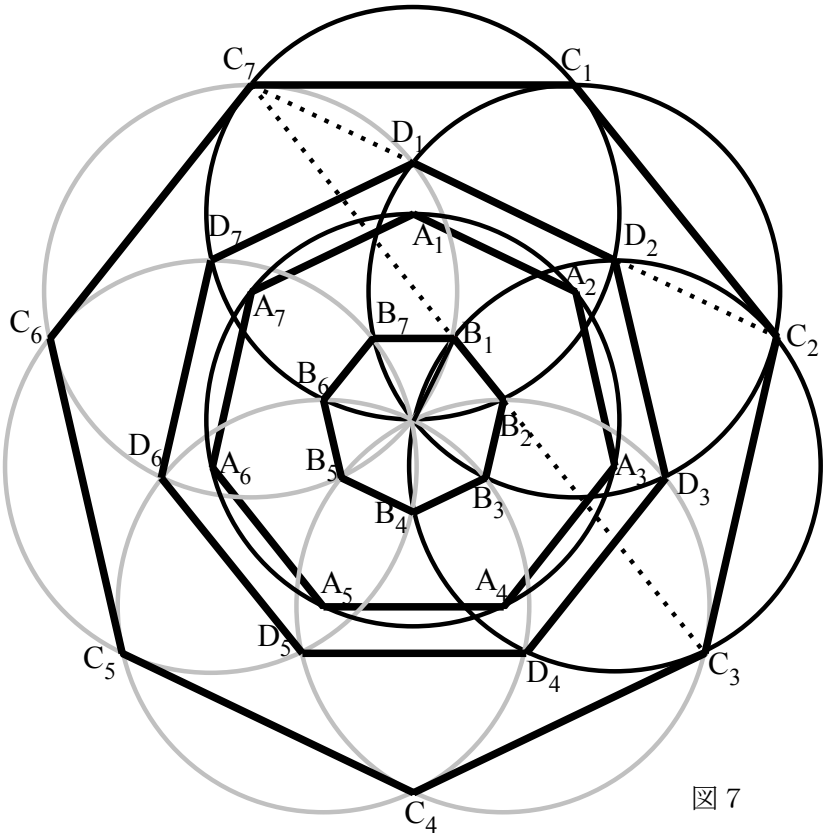


図７

命題２

円の交点を結んでできる正n角形は、

① nが偶数のとき、$\dfrac{n-2}{2}$個,

② nが奇数のとき、$\dfrac{n-1}{2}$個

できる。

(証明)

①nが偶数のとき

円O_iの反対側には、円O_iと点O以外の交点をもたない円$\mathrm{O}_{i+\frac{n}{2}}$が存在する。逆に、それ以外の円は$\mathrm{O}_i$と O 以外の交点をもつので、1 つの円につき、他の円と$n-2$(個)の交点をもつ。n個の円すべてで同じことがいえるので、全部で$n(n-2)$個。しかし、そのうち 2 つずつ交点が重複するので、円と円の交点の総数は$\dfrac{n(n-2)}{2}$個である。

よって、正n角形の個数は、

$$\frac{n(n-2)}{2}\times\frac{1}{n}=\frac{n-2}{2}\ \text{(個)}$$

である。

②nが奇数の場合

偶数の場合とは異なり、円O_iの反対側に点O以外の交点をもたない円は存在しない。よって、1 つの円につき、他の円と$n-1$(個)の交点をもつ。先程と同様に考えると、正n角形の個数は、

$$\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{n}=\frac{n-1}{2}\ \text{(個)}$$

である。 (Q. E. D.)

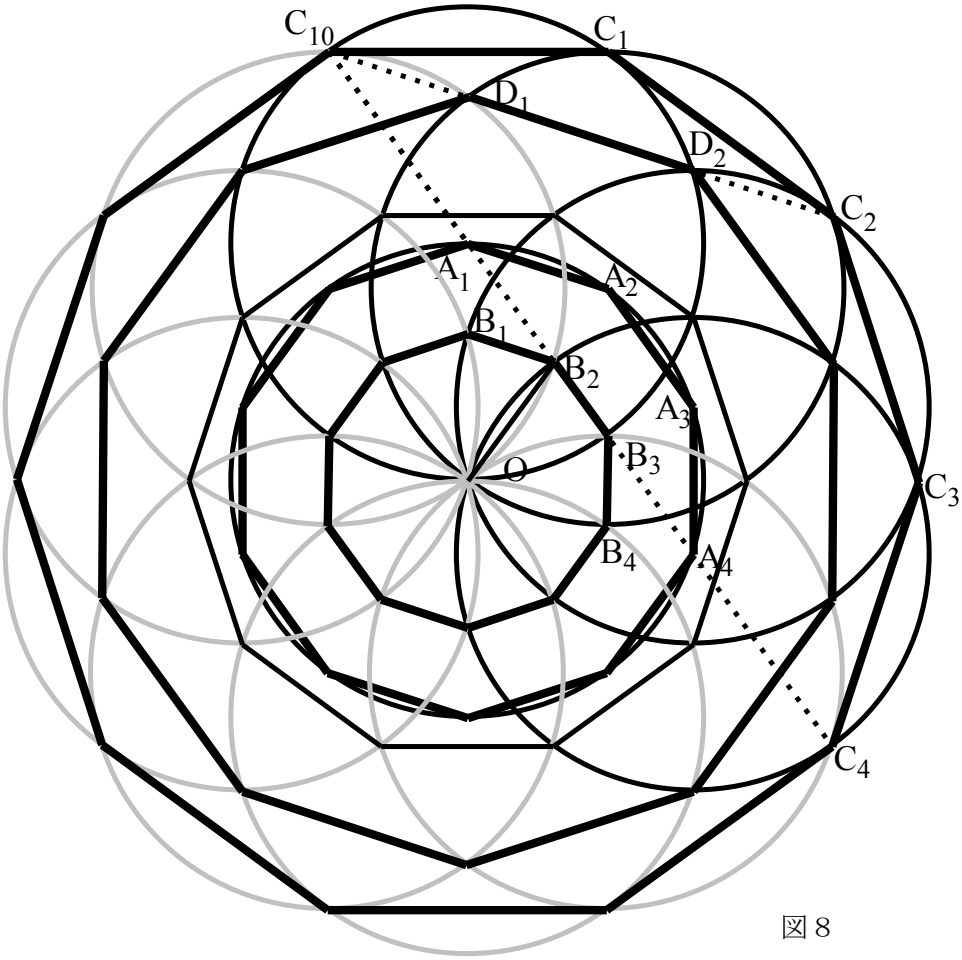


図８

命題３

n が奇数 $n=2k+1$ であるとする。

(1) k が奇数のとき

4 点 $\mathrm{C}_n, \mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}, \mathrm{B}_{\frac{k+1}{2}}, \mathrm{C}_k$ は一直線上にある。

(2) k が偶数のとき

4 点 $\mathrm{C}_n, \mathrm{B}_{\frac{k}{2}}, \mathrm{B}_{\frac{k}{2}+1}, \mathrm{C}_k$ は一直線上にある。

(証明)

(1) k が奇数のとき

点 O から、$\mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{B}_{\frac{k+1}{2}}$ へ下ろした垂線の足を H_5, 点 O から $\mathrm{C}_n\mathrm{C}_k$ へ下ろした垂線の足を H_6 とする。図形の対称性から、$\mathrm{OH}_5=\mathrm{OH}_6$ を証明すれば十分である。

さらに、点 $\mathrm{A}_{\frac{k+3}{2}}$ から $\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}$ へ下ろした垂線の足を H_7 とすると、$\triangle \mathrm{OA}_{\frac{k+3}{2}}\mathrm{H}_7$ は直角三角形であり、$\mathrm{OA}_{\frac{k+3}{2}}=r$,

$\angle \mathrm{A}_{\frac{k+3}{2}}\mathrm{OH}_7=\dfrac{540^\circ}{n}$ より、

$$\cos\frac{540^\circ}{n}=\frac{\mathrm{OH}_7}{\mathrm{OA}_{\frac{k+3}{2}}}=\frac{\mathrm{OH}_7}{r}$$

ゆえ、$\mathrm{OH}_7=r\cos\dfrac{540^\circ}{n}$.

よって、$\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}=2\mathrm{OH}_7=2r\cos\dfrac{540^\circ}{n}$.

$\angle \mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{OH}_5=\dfrac{180^\circ}{n}$ より、

$$\cos\frac{180^\circ}{n}=\frac{\mathrm{OH}_5}{\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}}=\frac{\mathrm{OH}_5}{2r\cos\frac{540^\circ}{n}}.$$

よって、$\mathrm{OH}_5=2r\cos\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{540^\circ}{n}$ …①

また、点 $\mathrm{A}_{\frac{k-1}{2}}$ から OC_n へ下ろした垂線の足を H_8 とする。$\triangle \mathrm{OA}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{H}_8$ は直角三角形であり、$\angle \mathrm{A}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{OH}_8=\dfrac{180^\circ}{n}$ なので、

$\mathrm{OH}_8=r\cos\dfrac{180^\circ}{n}$. よって、

$$\mathrm{OC}_n=2\mathrm{OH}_8=2r\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

さらに、$\angle \mathrm{C}_n\mathrm{OH}_6=\dfrac{540^\circ}{n}$ より、

$\cos\dfrac{540^\circ}{n}=\dfrac{\mathrm{OH}_6}{2r\cos\frac{180^\circ}{n}}$ であるから、

$$\mathrm{OH}_6=2r\cos\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{540^\circ}{n} \quad \cdots②$$

①, ②より、$\mathrm{OH}_5=\mathrm{OH}_6$. (Q. E. D.)

(2) k が偶数のときも同様に証明できる。

命題４

n が偶数 $n=2k$ であるとする。

(1) k が奇数のとき

4 点 $\mathrm{C}_n, \mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}, \mathrm{B}_{\frac{k+1}{2}}, \mathrm{C}_{k-1}$ は一直線上にある。

(2) k が偶数のとき

4 点 $\mathrm{C}_n, \mathrm{B}_{\frac{n}{4}-1}, \mathrm{B}_{\frac{n}{4}}, \mathrm{C}_{\frac{n}{2}-1}$ は一直線上にある。

(証明)

(1) k が奇数のとき (図９参照)

点 O から $\mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{B}_{\frac{k+1}{2}}$ へ下ろした垂線の足を H_9, $\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{k-1}$ へ下ろした垂線の足を H_{10} とする。図形の対称性から、$\mathrm{OH}_9=\mathrm{OH}_{10}$ を証明すればよい。点 $A_{\frac{k+3}{2}}$ から $\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}$ へ下ろした垂線を H_{11} とすると、

$$\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}=2\mathrm{OH}_{11}=2r\cos\angle \mathrm{A}_{\frac{k+1}{2}}\mathrm{OH}_{11}.$$

$\angle \mathrm{A}_{\frac{k+3}{2}}\mathrm{OH}_{11}=\dfrac{720^\circ}{n}$ であるから、

$$\mathrm{OB}_{\frac{k+1}{2}}=\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}=2r\cos\frac{720^\circ}{n}.$$

したがって、$\angle \mathrm{B}_{\frac{k-1}{2}}\mathrm{OH}_9=\dfrac{180^\circ}{n}$ より、

$$\cos\frac{180°}{n}=\frac{\mathrm{OH}_9}{\mathrm{OB}_{\frac{k-1}{2}}}=\frac{\mathrm{OH}_9}{2r\cos\frac{720°}{n}}$$

よって、$\mathrm{OH}_9=2r\cos\frac{180°}{n}\cos\frac{720°}{n}$ …①

また、点$\mathrm{A}_{\frac{k-3}{2}}$から$\mathrm{OC}_n$へ下ろした垂線の足を$\mathrm{H}_{12}$とする。$\triangle\mathrm{A}_{\frac{k-3}{2}}\mathrm{OH}_{12}$は直角三角形であるから、$\cos\frac{180°}{n}=\frac{\mathrm{OH}_{12}}{\mathrm{OA}_{\frac{k-3}{2}}}=\frac{\mathrm{OH}_{12}}{r}$.

ゆえに、$\mathrm{OH}_{12}=r\cos\frac{180°}{n}$ であり、

$\mathrm{OC}_n=2\mathrm{OH}_{12}=2r\cos\frac{180°}{n}$.

いま、$\cos\angle\mathrm{C}_n\mathrm{OH}_{10}=\frac{720°}{n}$ なので、

$$\cos\frac{720°}{n}=\frac{\mathrm{OH}_{10}}{\mathrm{OC}_n}=\frac{\mathrm{OH}_{10}}{2r\cos\frac{180°}{n}}.$$

よって、$\mathrm{OH}_{10}=2r\cos\frac{180°}{n}\cos\frac{720°}{n}$ …②

①，②より、$\mathrm{OH}_9=\mathrm{OH}_{10}$.

(2) kが偶数のときも同様に証明できる。

(Q. E. D.)

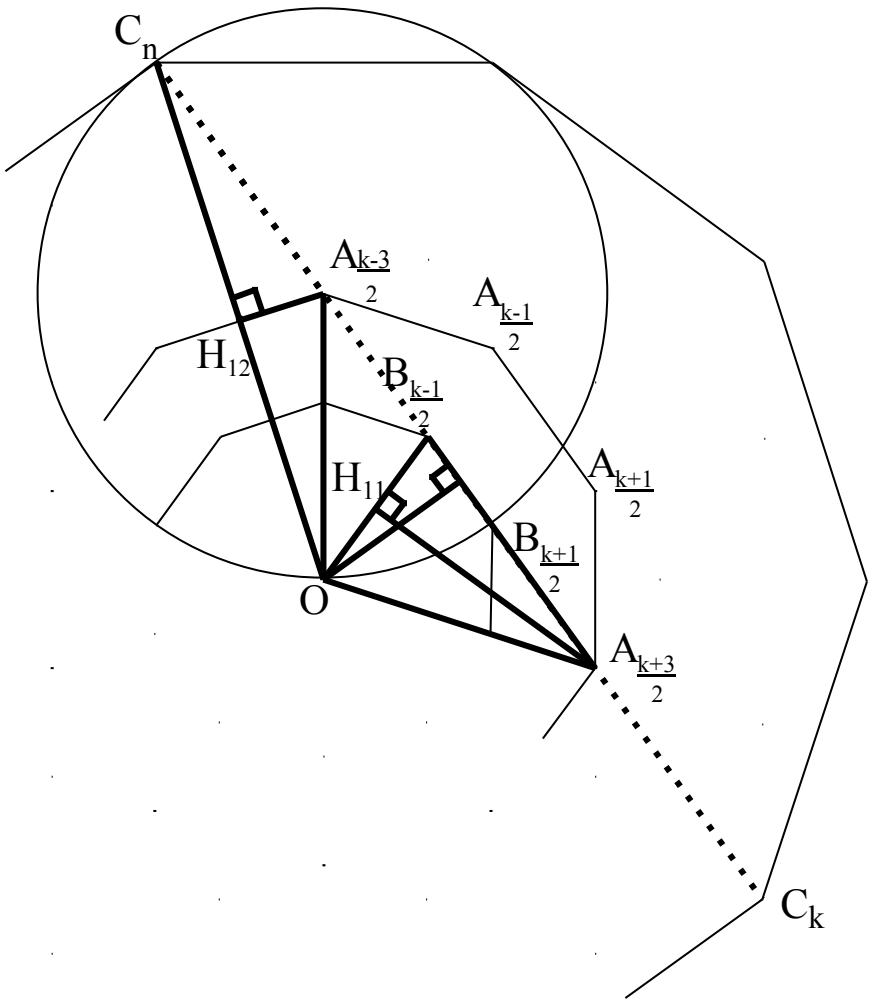


図 9

命題５

4 点 C_n, D_1, D_2, C_2 は一直線上にある。

(証明) (図 10 参照)

点 O から D_1D_2 に下ろした垂線の足を H_{13}, C_nC_2 に下ろした垂線の足を H_{14} とする。これから $OH_{13}=OH_{14}$ を示せばよいことがわかる。$\triangle OA_2D_1$ は二等辺三角形なので、点 A_2 から OD_1 に下ろした垂線の足を H_{15} とすると、H_{15} は線分 OD_1 を二等分する。

よって、$\angle A_2OH_{15}=\dfrac{360°}{n}$ より、

$$\cos\frac{360°}{n}=\frac{OH_{15}}{OA_2}=\frac{OH_{15}}{r}.$$

ゆえに、$OD_1=2OH_{15}=2r\cos\dfrac{360°}{n}$.

また、$\triangle OD_1H_{13}$ は直角三角形であり、

$\angle D_1OH_{13}=\dfrac{180°}{n}$ だから、

$$\cos\frac{180°}{n}=\frac{OH_{13}}{OD_1}=\frac{OH_{13}}{2r\cos\frac{360°}{n}}.$$

ゆえに、$OH_{13}=2r\cos\dfrac{180°}{n}\cos\dfrac{360°}{n}$ …①

さらに、点 A_1 から OC_n へ下ろした垂線の足を H_{16} とする。$\triangle OA_1C_n$ は二等辺三角形であるから、H_{16} は線分 OC_n を二等分する。また、$\triangle OA_1H_{16}$ は直角三角形であり、

$\angle A_1OH_{16}=\dfrac{180°}{n}$ だから、

$$\cos\frac{180°}{n}=\frac{OH_{16}}{OA_1}=\frac{OC_{16}}{r}.$$

よって、$OC_n=2OH_{16}=2r\cos\dfrac{180°}{n}$.

$\triangle H_{14}OC_n$ は直角三角形であり、

$\angle H_{14}OC_n=\dfrac{360°}{n}$ なので、

$$\cos\frac{360°}{n}=\frac{OH_{14}}{OC_n}=\frac{OH_{14}}{2r\cos\frac{180°}{n}}.$$

よって、$OH_{14}=2r\cos\dfrac{180°}{n}\cos\dfrac{360°}{n}$ …②

①，②より、$OH_{13}=OH_{14}$ (Q. E. D.)

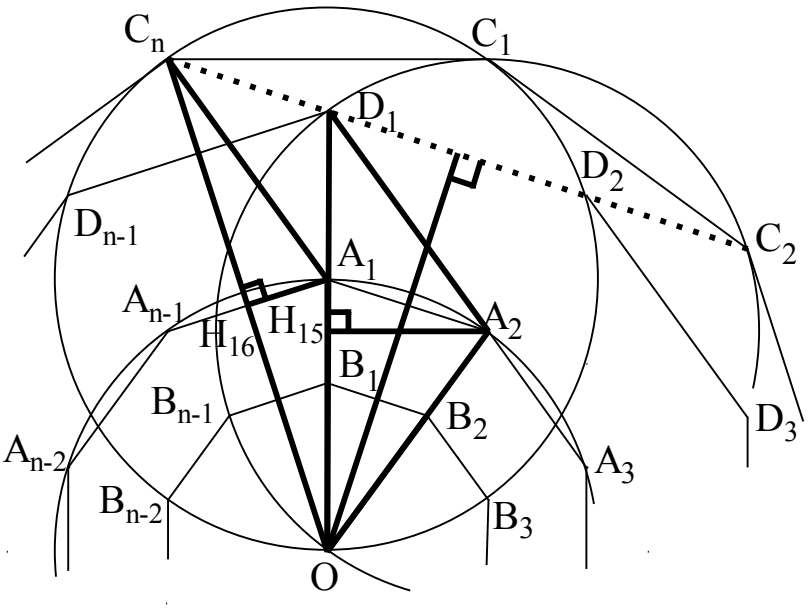


図 10

命題６

n が偶数 $n=2k$ であるとする。

(1) k が奇数のとき

4 点 A_1, $B_{\frac{k-1}{2}}$, $B_{\frac{k+1}{2}}$, A_{k-1} は一直線上にある。

(2) k が偶数のとき

4 点 $A_1, B_{\frac{k-1}{2}}, B_{\frac{k}{2}}, A_{k-1}$ は一直線上にある。

(証明)

(1) 点 O から線分 A_1A_{k-1} へ下ろした垂線の足を H_{17}，点 O から線分 $B_{\frac{k-1}{2}}B_{\frac{k+1}{2}}$ へ下ろした垂線の足を H_{18} とする。これから $OH_{17}=OH_{18}$ を証明すればよい。

点 A_{k-1} から $OB_{\frac{k-1}{2}}$ へ下ろした垂線を H_{19} とすると、

$$OB_{\frac{k-1}{2}}=2OH_{19}=2r\cos\angle A_{k-1}OH_{19}.$$

$$\angle A_{k-1}OH_{19}=\frac{360°}{n}\times\left(k-1-\frac{k+1}{2}\right)+\frac{360°}{n}$$
$$=\frac{k-1}{n}\times 180°.$$

であるから、

$$OB_{\frac{k+1}{2}}=2r\cos\left(\frac{k-1}{n}\times 180°\right).$$

したがって、$\angle B_{\frac{k-1}{2}}OH_{18}=\dfrac{180°}{n}$ より、

$$OH_{18}=OB_{\frac{k-1}{2}}\cos\angle B_{\frac{k-1}{2}}OH_{18}$$
$$=2r\cos\left(\frac{k-1}{n}\times 180°\right)\cos\frac{180°}{n}\cdots①$$

また、$\triangle A_1OH_{17}$ は直角三角形であるから、

$$OH_{17}=2r\cos\angle A_1OH_{17}.$$

$$\angle A_1OH_{17}=\frac{360°}{n}\times\left(\frac{k-1}{2}-1\right)+\frac{180°}{n}$$
$$=\frac{k-2}{n}\times 180°.$$

であるから、

$$OH_{17}=r\cos\left(\frac{k-2}{n}\times 180°\right)\cdots②.$$

ここで、積和公式より、

$$2\cos\left(\frac{k-1}{n}\times 180°\right)\cos\frac{180°}{n}$$
$$=\cos\left\{\left(\frac{k-1}{n}\times 180°\right)+\frac{180°}{n}\right\}$$
$$+\cos\left\{\left(\frac{k-1}{n}\times 180°\right)-\frac{180°}{n}\right\}$$
$$=\cos\left(\frac{k}{n}\times 180°\right)+\cos\left(\frac{k-2}{n}\times 180°\right).$$

すると、$n=2k$ より、

$$\cos\left(\frac{k}{n}\times 180°\right)=\cos\left(\frac{k}{2k}\times 180°\right)$$
$$=\cos 90°=0.$$

したがって、

$$OH_{18}=2r\cos\left(\frac{k-2}{n}\times 180°\right).$$

①，②より、$OH_{17}=OH_{18}$.

(2) k が偶数のときも同様に証明できる。

(Q. E. D.)

４．今後の課題

今回は、正多角形で操作をしたが、正多角形以外の図形についても、どのような性質をもつのか調べてみたい。また、正多角形の各頂点を中心とする円の半径の長さを変えて性質を調べることも今後の課題である。さらに、星形正多角形との関係も調べていきたい。

５．参考文献

[1] 「図解雑学　フーリエ変換」，佐藤敏明，ナツメ社

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。

カプレカー変換に関する考察(2)

3年B組　市田　美玲
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 3 年生はカプレカー変換について学習している。今回は 6 桁のカプレカー変換について考察した。また、4, 5, 6 桁における、収束または循環までの過程をまとめたので紹介する。

キーワード　カプレカー変換、カプレカー定数、収束、循環

２．研究の背景と目的

カプレカー変換とは自然数において、各桁の数字を並びかえて作ることのできる最大の数から最小の数を引く操作のことである。この変換を続けると 1 つの値に収束するか、複数の値で循環することが知られている。しかし、どのような場合に収束あるいは循環が表れるのか、どのような値を経て収束、循環にたどりつくのかは明らかになっていない。そこで、今回は 6 桁のカプレカー変換と 4, 5, 6 桁における、収束、循環の過程をまとめた。なお、2, 3 桁の場合については、参考文献[1]にまとめている。

３．研究内容

3.1 基本事項

■ソート

各桁の数字を並びかえて、最大の数にする操作をいう。

■カプレカー定数

１回の変換によって、値が変化しない自然数のことをいう。

ただし、ぞろ目は最初の変換で 0 になるので、除いて考える。また、n 桁の変換を考える際に変換により 1 桁減ってしまったとしても、n 桁とみなして考える。

3.2　6 桁のカプレカー変換

■6 桁のカプレカー定数を求める

<u>命題１</u>

6 桁のカプレカー定数は存在する。

[証明]

6 桁のカプレカー定数のソート後の値を

$$100000a+10000b+1000c+100d+10e+f$$

とおき、$\langle abcdef \rangle$ と表記する。

（ただし、$9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f \geq 0$, $a,b,c,d,e,f \in Z$）

同様に変換後の値を $\langle pqrstu \rangle$ とおく。中央の数、つまり、$c=d$ のときと $c>d$ のときで場合分けして、繰り下がりに注意して変換を筆算で行うと次のようになる。

[1] $c=d$ のとき

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
- & f & e & d & c & b & a \\
\hline
 & a-f & b-e-1 & 9 & 9 & e-b+9 & f-a+10
\end{array}
$$

筆算 1

$\langle abcdef \rangle$ はカプレカー定数をソートしたものであり、$a \geq b \geq c = d \geq e \geq f$ から、$a=b=r=s=9$ であるとわかる。すると、$t=e-b+9=e$ より $e=t$.

また、$u=f+1>f$ である。

さらに、$p=f$ と仮定すると、
$p=a-f=9-f=f$ ゆえ、
$f=4.5$ となり、適さない。

したがって、$f \neq p,r,s,t,u$.

よって、変換後の値 $\langle pqrstu \rangle$ に当てはまる $\langle abcdef \rangle$ は $\langle cfabed \rangle, \langle dfabec \rangle$ の 2 通りとなる。それぞれの連立方程式を解くと、

$$\langle pqrstu \rangle = \langle cfabed \rangle = \langle dfabec \rangle = 549945$$

となる。よって、6 桁のカプレカー定数は 549945 である。

[2] $c>d$ のとき

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
- & f & e & d & c & b & a \\
\hline
 & a-f & b-e & c-d-1 & d-c+9 & e-b+9 & f-a+10
\end{array}
$$

筆算 2

$a-f \geq b-e \geq c-d$ より $p \geq q > r$

また、$c=r$ と仮定すると、
$r=c-d-1=c$ なので $d=-1$ となり、適さない。ゆえに、$c \neq r$.

加えて、$9 \geq a$ より $-a+10 \geq 1$ であるから、$f-a+10 \geq f+1 > f$ となり $f \neq u$.

さらに $\langle pqrstu \rangle$ に当てはまる $\langle abcdef \rangle$ を限定する。

〈$d \neq s$ でないことの証明〉

$d=s$ と仮定する。$s=d-c+9=d$ より $c=9$. $a \geq b \geq c$ より、$a=b=c=9$.
よって、

$$
\begin{cases}
a=b=c=9 \\
p=9-f \\
q=9-e \\
r=8-d \\
s=d \\
t=e \\
u=f+1
\end{cases}
$$

となる。

$a=b=c=9$ より、p, q, r, s, t, u のうちの 3 つは値が 9 である必要がある。
$r=9$ と仮定すると、$d=-1$ となり $r \neq 9$.
$c>d \geq e \geq f$ より $e, f \neq 9$. したがって、$p=q=u=9$.

このとき、$p=9-f=9$ より $f=0$ である。ところが、$u=f+1=9$ より $f=8$ であり、矛盾が生じる。よって、$d \neq s$. ∎

〈$e \neq t$ でないことの証明〉

$e=t$ と仮定する。$t=e-b+9=e$ より、$b=9$. $a \geq b$ より $a=b=9$.

よって、

$$\begin{cases} a=b=9 \\ p=9-f \\ q=9-e \\ r=c-d-1 \\ s=d-c+9 \\ t=e \\ u=f+1 \end{cases}$$

となる。

$a=b=9$ より、p, q, r, s, t, u のうちの 2 つは値が 9 である必要がある。

$r=9$ と仮定すると、$r=c-d-1=9$ より $c-d=10$ となり、適さないから $r \neq 9$.

$s=9$ と仮定すると、$s=d-c+9=9$ より $c-d=0$ となるが、$c>d$ より適さないから、$s \neq 9$.

$t=9$ と仮定すると、$t=e=9$ および $c>d \geq e$ より、$c \geq 10$ となり、適さないから $t \neq 9$.

$u=9$ と仮定すると、$u=f+1=9$ より、$f=8$.

ここで、a, b, c, d, e, f の大小関係より、$a=b=c=9, d=e=f=8$ となる。したがって、p, q, r, s, t, u のうちの 3 つは値が 9, 他の 3 つは値が 8 である必要がある。p を求めると、$p=9-f=9-8=1$ となり、矛盾が生じるから $u \neq 9$.

以上から、$p=q=9$ であるとわかる。すると、$p=9-f=9$ より、$f=0$. また、$q=9-e=9$ より $e=0$ である。さらに、$e=f=0$ より、p, q, r, s, t, u のうちの 2 つは値が 0 である必要がある。

ここで、$t=e=0$ より $t=0$ である。また、$p=q=9$ より $p \neq 0,\ q \neq 0$. $s=0$ と仮定すると、$s=d-c+9=0$ より、$c-d=9$ となり、適さないから $s \neq 0$.

最後に、$u=f+1=1$ より $u \neq 0$.

以上から、$r=0, t=0$ である。よって、$r=c-d-1=0$ より、$c-d=1$.

このとき、$s=d-c+9=8$ となる。

これらを整理すると、

$$p=q=a=b=9$$
$$r=t=e=f=0$$
$$s=8, u=1$$

となる。

$c>d$ より $s=c=8, u=d=1$ と決まる。

このとき、$c-d=8-1=7$ となり矛盾が生じる。

よって、$e \neq t$ である。∎

以上から、$d \neq s,\ e \neq t$ であることがわかった。ここで、$p=a$ のときを考える。

$q>r,\ c \neq r, d \neq s, e \neq t, f \neq u$ より、$\langle pqrstu \rangle$ に当てはまる $\langle abcdef \rangle$ は 15 通りとなる。それぞれについて、a, b, c, d, e, f に関する連立方程式を解くと、解として適するものがない。ゆえに、$p=a$ のときカプレカー定数は存在しない。

同様に、$p=b$ のとき 37 通りとなり、それぞれの連立方程式を解くと、

$$\langle pqrstu \rangle = \langle befacd \rangle = 631764$$

だけが解として適する。

ここで、$b=q$ と仮定すると、$q=b-e$, $e \geq f$ より $f=0$ となり $a=p$ となる。$p=a$ のときにはカプレカー定数は存在しないから、$b \neq q$ であるといえる。

同様に $p=c, d, e, f$ のとき、$p \geq q > r$, $b \neq q,\ c \neq r,\ d \neq s,\ e \neq t, f \neq u$ より、条件を満たす $\langle abcdef \rangle$ の並びはそれぞれ 23,

6, 6, 6 通りとなる。それぞれの連立方程式を解くと、

$$\langle pqrstu \rangle = \langle cefabd \rangle = 631764$$

だけが解として適する。

よって、6 桁のカプレカー定数は 631764 である。　(Q. E. D.)

■変換を続けるとどうなるのか

［考察］

6 桁のカプレカー定数が 549945, 631764 であることが示されたが、任意の 6 桁の数 $\langle abcdef \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのかを考える。

$\langle abcdef \rangle$ を変換すると筆算 2 より、

$$99999(a-f)+9990(b-e)+900(c-d)$$

となる。

ここから、変換後の値は $a-f$，$b-e$，$c-d$ の値によって決まることがわかる(ただし、$a-f \geq b-e \geq c-d$)。そこで、この値によって場合分けし、変換を繰り返し行った。

すると、6 桁の自然数は変換を繰り返していくと、次の 3 パターンのいずれかで循環または収束することがわかった。

① 420876→851742→750843→840852→860832→862632→642654→420876→ …

② 631764

③ 549945

さらに、①は最大で 13 回の変換で循環に入り、②は最大で 4 回、③は最大で 1 回の変換で収束するということが明らかになった。

3.3　収束、循環の過程

4, 5, 6 桁の収束、循環の過程を文末の樹形図に表した。ある自然数を 1 回変換すると、樹形図中のいずれかの数になる。さらに、その数を変換すると線でつながれている右側の数になる。

例えば、「950841 ━ 970821」は 950841 を 1 回変換すると、970821 に変換されることを表している。

４．今後の課題

今回、6 桁のカプレカー変換について、自ら考察することができた。しかし、収束、循環の過程の値についての考察は十分にはできなかった。また、今回は手計算で行ったが、手計算と並行して計算機を用いて計算していく必要がある。今後は過程の値には規則性はあるのかということを詳しく考察していきたい。

５．参考文献

[1] 「カプレカー変換に関する考察」，市田美玲，2013 年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集

６．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩、後輩の方々にもご協力いただきました。ありがとうございました。

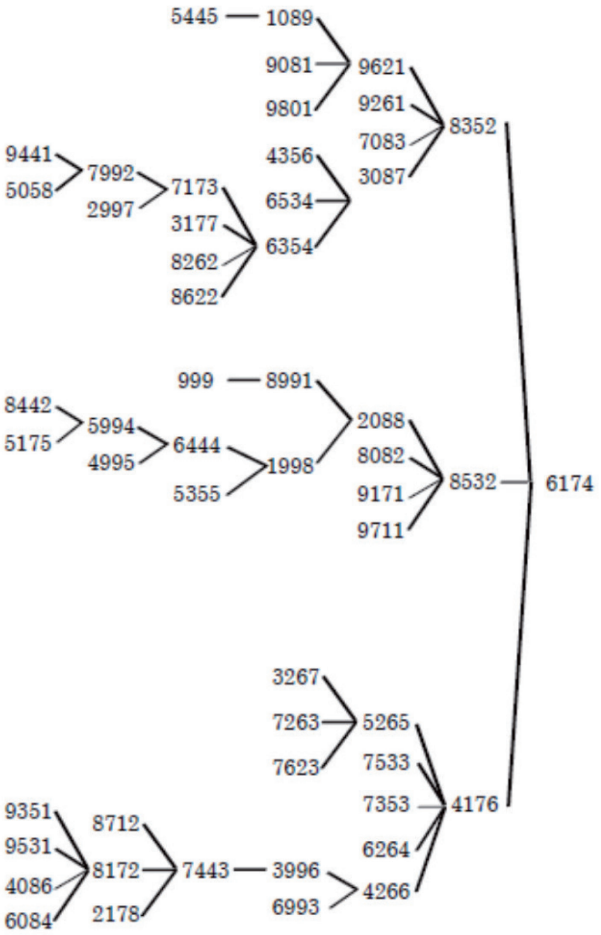


図１　４桁の場合

●4 桁の場合

すべての 4 桁の自然数は変換を繰り返すと 6174 なる。さらに、それに辿り着くまでに最大で 7 回の変換が必要である。

●5 桁の場合

すべての 5 桁の自然数は変換を繰り返すと次の 3 パターンのいずれかで循環する。

① **74943→62964→71973→83952**

② **75933→63954→61974→82962**

③ **59994→53955**

さらに、①, ②は最大で 6 回の変換を行うと循環に入り、③は最大で 2 回の変換を行うと循環に入る。

4 桁あるいは 5 桁の場合の詳細については、参考文献[1]を参照されたい。

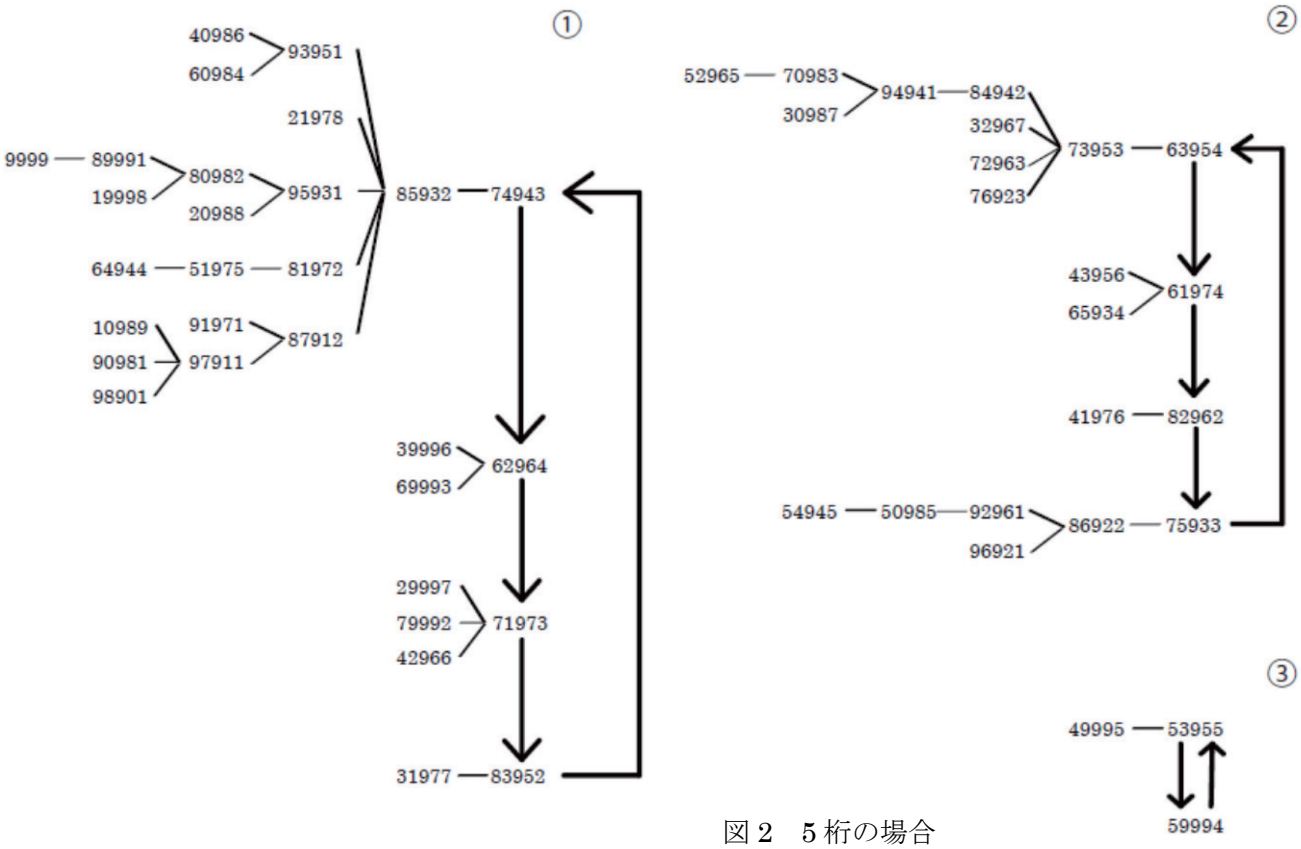


図２　５桁の場合

図３　６桁の場合Ⅰ

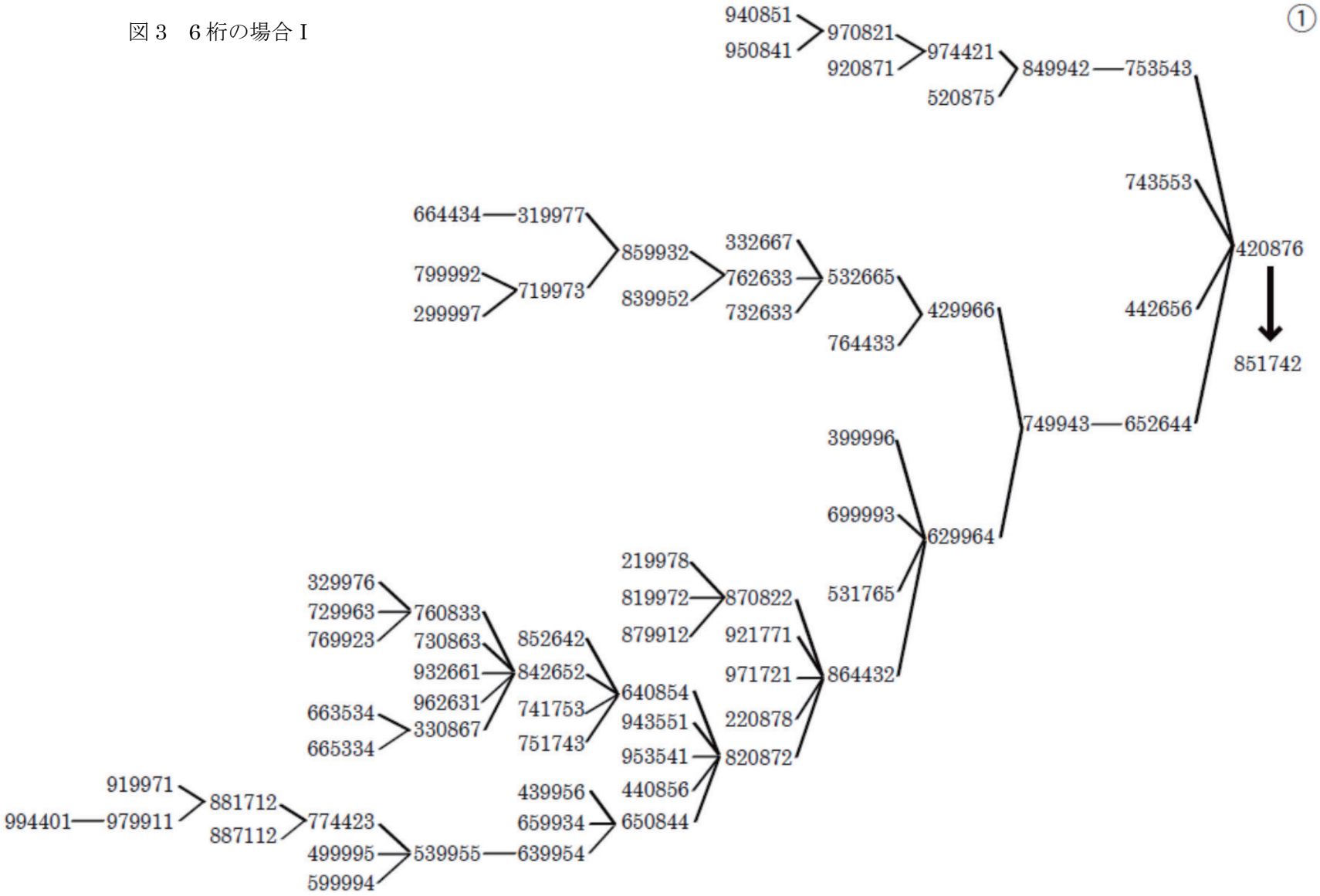
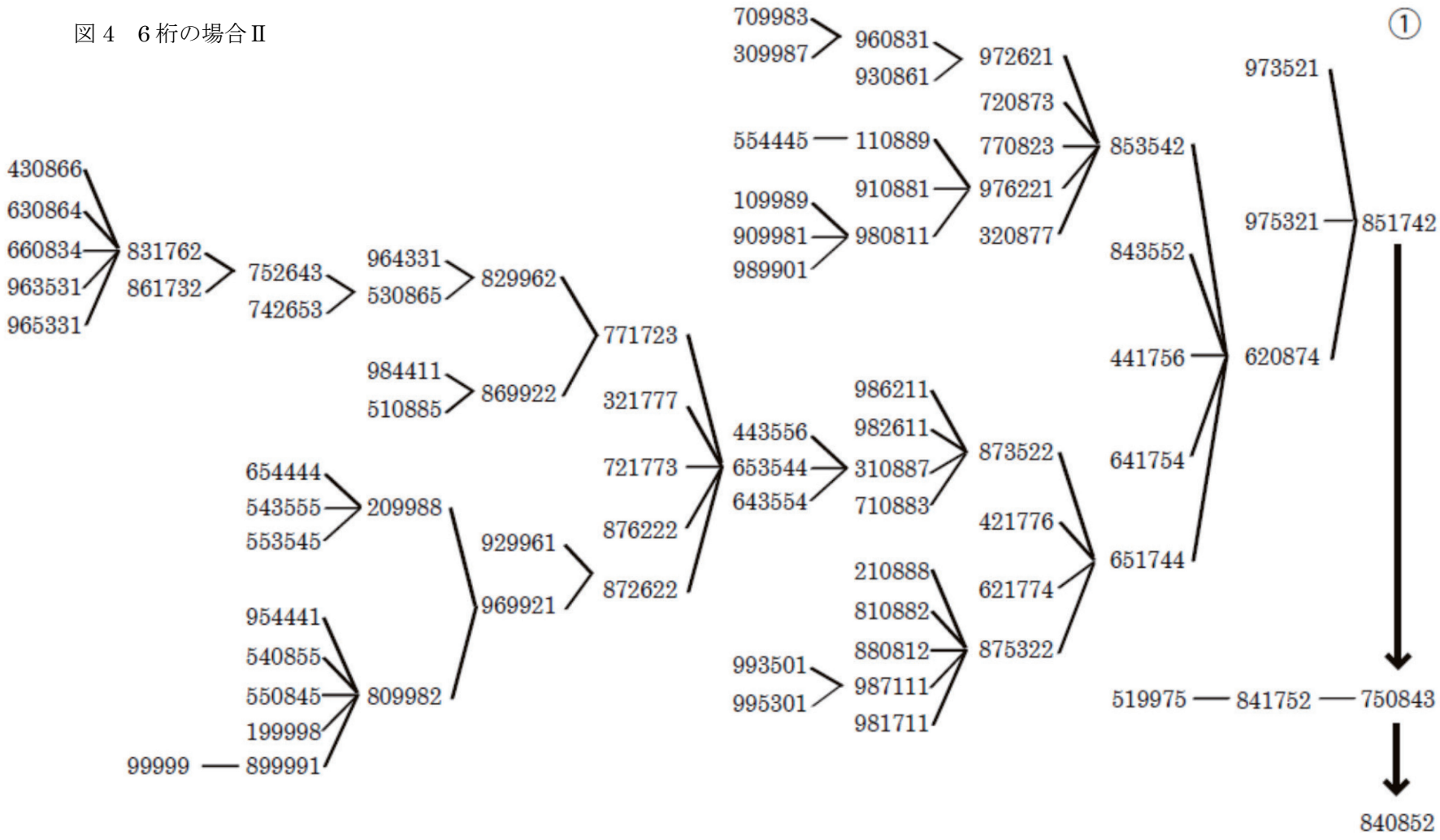

①
940851
950841
970821
920871
974421
520875
849942
753543
743553
442656
652644
420876
851742
664434
319977
799992
719973
299997
859932
839952
332667
762633
732633
532665
764433
429966
749943
399996
699993
531765
629964
219978
819972
879912
870822
921771
971721
220878
864432
329976
729963
769923
760833
730863
932661
962631
330867
663534
665334
852642
842652
741753
751743
640854
943551
953541
440856
820872
919971
994401
979911
881712
887112
774423
499995
599994
539955
439956
659934
639954
650844

図４　６桁の場合Ⅱ


①
430866
630864
660834
963531
965331
831762
861732
752643
742653
964331
530865
984411
510885
829962
869922
771723
321777
721773
876222
872622
654444
543555
553545
209988
954441
540855
550845
199998
99999
899991
809982
929961
969921
709983
309987
960831
930861
554445
110889
910881
109989
909981
989901
980811
972621
720873
770823
976221
320877
853542
843552
441756
641754
651744
986211
982611
443556
653544
643554
310887
710883
873522
421776
621774
210888
810882
880812
993501
995301
987111
981711
875322
973521
975321
620874
851742
519975
841752
750843
840852

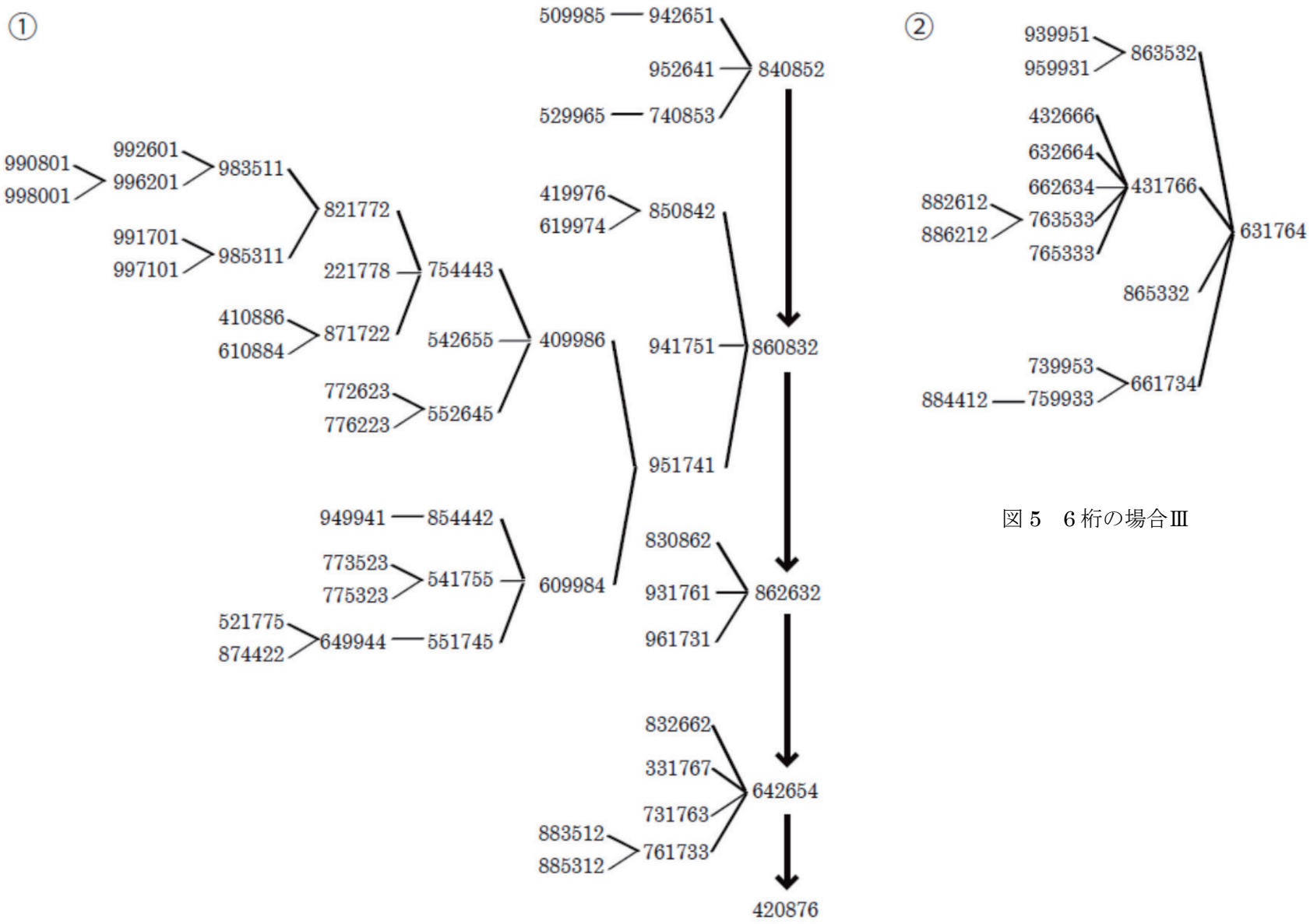

①
990801
998001
992601
996201
983511
991701
997101
985311
821772
221778
754443
410886
610884
871722
542655
409986
772623
776223
552645
949941
854442
773523
775323
541755
609984
521775
874422
649944
551745
509985
942651
952641
840852
529965
740853
419976
619974
850842
941751
860832
951741
830862
931761
862632
961731
832662
331767
642654
731763
883512
885312
761733
420876
②
939951
959931
863532
432666
632664
662634
431766
882612
886212
763533
765333
631764
865332
739953
884412
759933
661734

図５　６桁の場合Ⅲ

塔の美しさは数式のままに

5年B組　田村　拓也
指導教員　川口　慎二

１．要約

学校への通学路で見ることができる興福寺の五重塔は非常に美しいと感じた。また、薬師寺の三重塔は裳階を持ち、アメリカの東洋美術史家のフェノロサは「凍れる音楽」と評したほどである。この美しさはどこからくるものなのかを明らかにしたいと思った。

キーワード　五重塔、貴金属比(黄金比、白銀比)、漸化式、平行投影、透視投影

２．研究の背景と目的

古都奈良には様々な建築物が残っている。特にお寺や神社が多数存在し、独特の美しさを持っている。この美しさはどこから来るものなのかを研究した。

３．研究内容

■黄金比

自然界に存在する数列としてフィボナッチ数列が有名である。これは以下の漸化式から導かれる数列で松毬や向日葵に見ることができる。

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

このフィボナッチ数の隣接二項の比の極限を考える。

$$\phi = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{F_n / F_{n-1}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\phi}$$

ここで得られた方程式$\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$を$\phi > 0$の範囲で解くことで黄金数$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$が得られ、1：$\phi$の比率を黄金比という。

■貴金属比

フィボナッチ数列を導く漸化式を以下のように自然数nを用いて拡張する。

$$M_0 = 0, M_1 = 1,\ M_{k+2} = nM_{k+1} + M_k$$

同様に隣接二項比の極限を取り、方程式を解くと自然数nに対する関数μ_nが得られる。

$$\mu_n = \lim_{k\to\infty}\frac{M_{k+1}}{M_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{nM_k + M_{k-1}}{M_k}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(n + \frac{1}{M_k / M_{k-1}}\right)$$

$$= n + \frac{1}{\mu_n}$$

より、$\mu_n = \dfrac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$.

特に、$n = 1$のときを黄金数、$n = 2$のときを白銀数、$n = 3$のときを青銅数と呼ぶ。ここで、1 と白銀数の比として得られる白銀比は1：$\left(1 + \sqrt{2}\right)$である。一方、一般的に

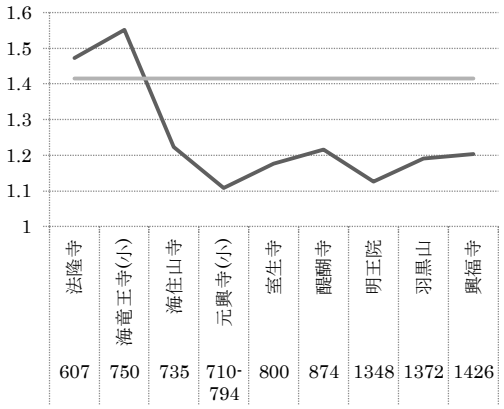
は $1:\sqrt{2}$ が白銀比とされている。両者の違いは見た目の美しさとして似たものと考え、今回はどちらも同様に考慮した。

■法隆寺

法隆寺は、推古天皇 15 年(607 年)に建立された世界最古の木造建築物である。

この法隆寺にある五重塔の屋根の最上層と最下層の長さの比(以下、これを層長比という)が $1:\sqrt{2}$ であることは有名である。そこで法隆寺以降、日本に建てられた多くの五重塔のうち断面図が手に入ったものについて層長比を測定した。

■日本に存在する五重塔の屋根の長さの比



※（小）は小塔を意味する。

※　興福寺は再建時の記録を用いた。

※　時間軸の間隔は考えていない。

寺院建築が伝来して間もない時期に建てられた法隆寺は白銀比に近い比を持っているが、それ以降の仏塔には白銀比が見られない。

■平行投影と透視投影

設計図と我々が見た景色の違いは様々あるが、投影方法の違いは比を考える上で非常に重要である。次の図 1 の左側が平行投影、右側が透視投影を用いており、それぞれの層長比は 1：1.48 と 1：1.96 のように顕著に差が現れる。今回は透視投影を用いて考察を行った。

平行投影　　透視投影

図 1

■各投影方法における座標計算

平行投影を用いて、ある点 (x, y, z) を xz 平面上の点 (x', y', z') に投影するとき、$(x', y', z') = (x, 0, z)$ と簡単に計算できる。

透視投影を用いて、ある点 (x, y, z) を距離 R だけ離れた焦点をもつ、焦点距離 k の投影面上の点 (x', y', z') に投影すると、

$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

■計算実験 1 とその効率化

【目的】

塔と投影面の距離を変えながら透視投影を用いて層長比を求め、貴金属比になる距離を見つける。

【方法】

設計図から五重塔を 3 次元座標空間上で

モデルを作成し、投影面を動かしながら逐次座標計算を行う。しかし、この方法は膨大な時間がかかってしまうので効率化をする必要がある。

【効率化の方法】

インターネットでは Google が提供する、Google Earth という、地球上の様々な地形図や建物の立体図を見ることができるソフトウェアがある。ここから種々の五重塔の 3D モデルをダウンロードし、3DCG アニメーションソフトウェアである Blender を用いて人間の視界をモデル化した動画を作成する。今回は、五重塔から 100m 離れた地点から焦点距離 35mm，視野角 135°の人間が見た視界をモデル化した。次に同研究班に所属する目線認識ソフトウェアを開発している稲益秀成君に開発してもらった、五重塔の層認識ソフトウェアを用いて長さを測定する。最後に表計算ソフト Excel を用いて層長比を算出した。

【結果】

（イ）法隆寺；40m 地点／白銀比

（ロ）興福寺；57m 地点／黄金比

（ハ）薬師寺；40m 地点／白銀比

詳細は次ページのグラフ 1 を参照されたい。

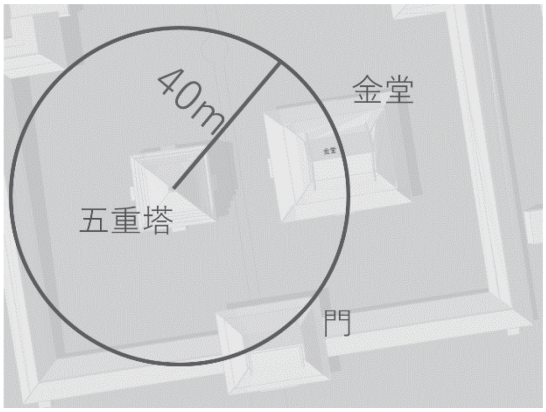


図２　法隆寺境内

【考察】

今回用いた三塔はすべて、白銀比、黄金比を見ることができた距離の位置に金堂と門が存在した。ただし、金堂の中から塔を見ることはできないため、ここでは門を採用する。

【結論】

この三塔は、設計図の上では層長比に貴金属比は見られないが、境内に入って最初に塔を見ることができる場所である門から見ることによって貴金属比になることがわかる。

■計算実験２―実例検証―

実例を検証するには人々が撮った五重塔の写真上で層長比を測るのが良い。

【目的】

実際に人々は塔の美しさを白銀比に関連付けて見ているのかについて調べる。

【方法】

Google 画像検索を用い上位 10 枚の写真を用いて層長比を計算する。ただし、一枚の写真に 2 基以上の塔や堂が含まれていた場合は平均値を用いる。

【結果】 1：1.40

【考察】

写真の中で門から撮られたものはなかったが、結果は非常に白銀比に近い比になった。すなわち、日本人は無意識に白銀比を構図に取り入れた写真を撮ることがわかる。

■計算実験３―国による差異―

今回用いた Google 画像検索は Google Japan によるものであるため、基本的に日本人による写真である。そこで、同様の計算実験 2 を日本に比較的近い韓国の Google Korea、比較的遠くにあるフランス

の Google French の画像検索で行ってみた。

【結果】

Google Japan　1：1.40

Google Korea　1：1.39

Google French　1：1.49

【考察】

日本と韓国では白銀比に近い値をとり、フランスではそれより大きい値をとった。美しいと感じる比に地域差があるとすると、フランス人が日本の建築物を撮ったとき、黄金比寄りの白銀比になったという可能性が考えられる。またこの逆も十分に考えられるので、調査する写真数や建築物数、その所在地を変えて研究する余地があると思われる。

４．今後の課題

計算実験１での層長比のグラフ１は動画からの算出であり、誤差が生じやすかった。ゆえに設計図から動画を介さずに計算するソフトウェア必要がある。これは現在 Visual C#を用いて開発中である。

また、計算に用いた建築物の数は３つと非常に少ないため増やす必要がある。

５．参考文献

[1]「雪月花の数学」，桜井進，祥伝社

６．謝辞

今回の研究にご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の稲益秀成君にもご協力いただきました。ありがとうございました。

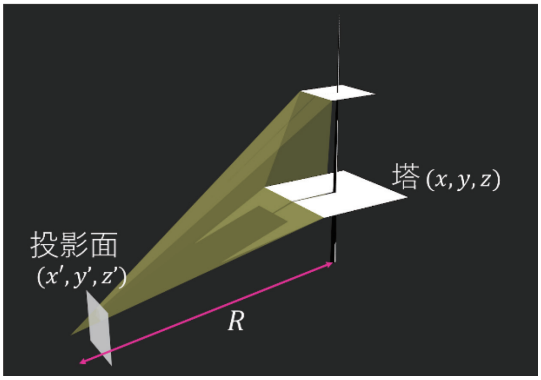
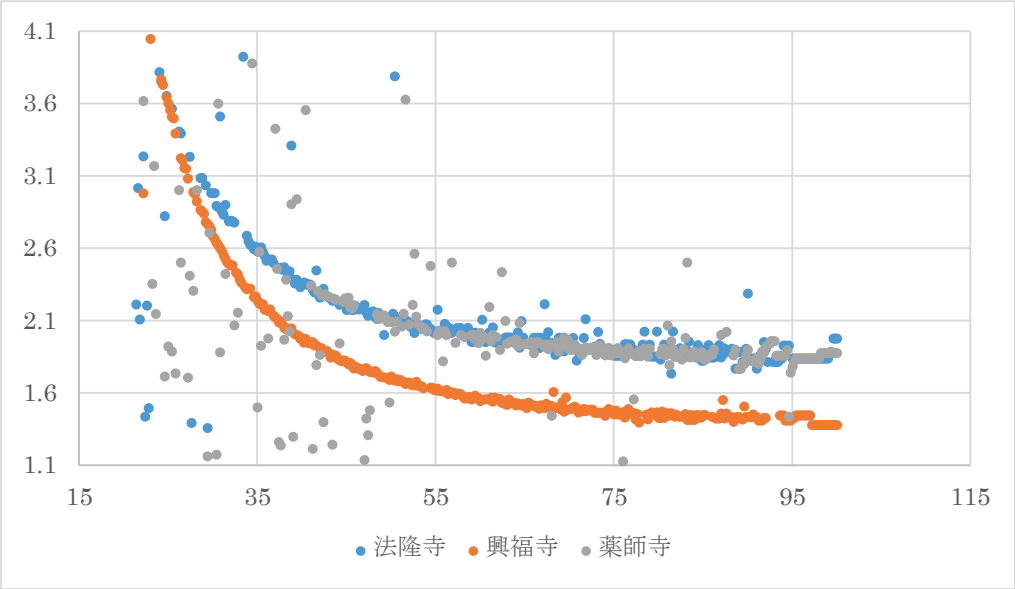


図３　透視投影の座標計



グラフ１　計算実験１の結果

有機色素増感型太陽電池の作成

4年A組 西本 有里
4年B組 稲石 大義
4年C組 大森 一生
4年C組 荻野 史菜
4年C組 新元 美晴
4年C組 藤田 奈緒
指導教員 武曾 朋子

１．要約

私たちは有機色素増感型太陽電池の小型化と軽量化を目標として実験を行った。有機色素増感型太陽電池は低コストで作成でき、また、作成時の条件の自由度が高く、多用途に使用可能だからだ。今回は、発電量を左右するであろう焼き付け時の温度や導電性ガラスにのせる酸化チタン(TiO_2)ペーストの厚みといった条件とガラスに焼き付いたTiO_2微結晶の状態との関係性を調べた。また、これらを電極として作成した電池の起電力を測定することで、TiO_2微結晶の状態と起電力の関係性を調べた。これら二種類の対照実験を行ったので、以下に報告する。

キーワード　有機色素増感型太陽電池　色素　焼き付け温度　TiO_2ペースト　TiO_2微結晶　起電力　PEG　太陽光　LED光

２．研究の背景と目的

東日本大震災以降、安全性の問題で日本の原子力発電所は停止され、多くの地域では電力供給量に余裕がない状態が続いている。そのための新しいエネルギーの確保が急がれている昨今、私たちは解決策として太陽電池に着目した。太陽電池は半永久的に発電が可能であり、設備を整えれば地球上のほぼどの地域でも発電できる。また火力発電や原子力発電とは異なり、発電時に排出するものがないため環境にも優しい。一方で、現行の太陽電池では建物の耐震性などの条件を満たしていなければ設置が危険であるとされるため、一部の建物や古くからある木造の日本家屋などで設置ができない。加えて、色が濃く目立ってしまうため設置場所を選ぶ。そこで私たちは小型で軽量、さらに透明な電池を作成できれば現在よりももっと多くの発電量が見込めると考えた。透明であれば、建物の屋根だけでなく窓や壁にも設置ができるからである。これらの目的を達成できる太陽電池の１つに、今回私たちが研究した有機色素増感型太陽電池が挙げられる。有機色素増感型太陽電池は、希少価値の高い物質を多く必要とせず、低価格で作成でき、また基盤にプラスチックの使用が可能なため従来の半導体を用いたものに比べて軽量化・小型化ができるメリットを持つ。そのメリットを生かすと、現在は設置できない場所にも設置

が可能になる。さらに基盤を半透明にしたり、吸着させる色素を変えたりすることで電池自身の色を変えることも可能なので、デザイン性を求めた研究も実際に行なわれている。例えば、透明な太陽電池を作成すれば、窓に張り付けて使用することも可能になる。今回私たちは「どのような条件下で有機色素増感型太陽電池の発電効率が良くなるのか」について研究を行った。焼きつけ後のTiO_2微結晶が多孔質構造となり色素が吸着する表面積が増える状態が最適である。今回、高分子素材の一種であるポリエチレングリコール2000(以下、PEG)をTiO_2ペーストに混ぜることにした。

３. 発電原理

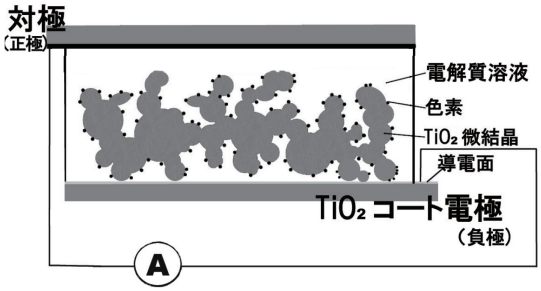


図１

図１のように、有機色素増感型太陽電池は透明電極(TCO 電極)、可視光を吸収する役割を持つ有機色素、その有機色素が化学的に結合している TiO_2 微結晶、ヨウ化物イオンを含む電解質溶液、黒鉛でコートした触媒機能を持つ対極から構成されている。

この有機色素増感型太陽電池の発電原理は次のようになっている[1]。

① 有機色素が可視光を吸収することで色素内部の電子が励起し、TiO_2 コート電極へ注入される。

② 透明電極へ達した電子は外部の回路を通って対極へと移動する。

③ 電解質溶液中の三ヨウ化物イオン(I_3^-)が対極に達した電子を受け取り、ヨウ化物イオン（I^-）に変わる。

④ 一方で、電子を失い酸化した有機色素は電解質中の I^-から電子を受け取って再生される。

①～④の反応が連続的に起こることにより、正極から負極への直流電流が生じる。このように、有機色素増感型太陽電池は光エネルギーを電気エネルギーへ変換する電池である。

４. 研究内容

私たちは、発電に最適な TiO_2 微結晶の状態をまず知る必要がある。その理想とする TiO_2 微結晶の作成方法を確立した後、異なる色素の比較実験などに発展させるのが適当であると考えた。今回は、TiO_2 ペーストを焼き付ける際の火力と、TiO_2 ペーストを透明電極にコーティングする厚みを変化させることで、透明電極に形成された TiO_2 微結晶を比較すると同時に、発電実験を行った。

実験Ⅰ ～作成方法の違いによる TiO_2 微結晶の状態の比較～

(１)この実験の目的と概要

導電性ガラスにコーティングするTiO_2ペーストの厚み、および焼き付けを行う際の火力を変化させて対照実験を行い、形成されたTiO_2微結晶の状態を調べた。TiO_2ペーストの厚みはメンディングテープの枚数を1枚、2枚、3枚の三段階、火力は強・弱の二段階で比較を行った。なお、焼き付け時の温度について測定を試みたが、確証のある

データが取れなかった。なお現在の方法では450～600℃の高温の状態で焼き付ける方法が主流だが、なるべく少ないエネルギーで作成するという目標ももって実験を行っているため、今回は100℃前後の比較的低温の状態で焼き付けをしている。

（２）仮説

高温で急激に加熱すると亀裂が多く発生する。また、TiO_2ペーストの厚みが薄いほど均一に熱が加わり、焼き付けた後のTiO_2微結晶の厚みのムラや亀裂は少ない。

（３）TiO_2ペーストの焼き付け方法

［材料］

TiO_2 粉末（8g）・PEG（4g）・純水（16g）・台所用洗剤（42%の界面活性剤を含む）・エタノール

［手順］

実験前に、小分けにしたPEGをホットバスで温め、融かしておいた。

<u>TiO_2ペーストの作成</u>

① 20%PEG水溶液10gを作成した。

② TiO_2パウダー8gと20%PEG水溶液10gを30分間撹拌した。そのとき、ビーカーの口をサランラップで覆うことで液体の蒸発を防いだ。

③ 液体状のペーストをスポイトで取り、保管容器へ入れた。

<u>導電性ガラスの洗浄</u>

① 以下の三種の液体をビーカーに用意した。

a）台所用洗剤の５倍希釈水溶液

b）純水

c）エタノール

② 導電性ガラスをピンセットで持ち、a）→b）→c）の容器内で揺らすことで洗浄した。このとき導電面に付着した水分がエタノールとともに蒸発することを確認した。

③ ①②と同手順でガラス棒とピンセットを洗浄した。

<u>導電性ガラスへのTiO_2ペーストの塗布</u>

① 洗浄後の導電性ガラスの導電面を上にし、図２の斜線部にメンディングテープを貼った。このとき、ピンセットを使用することで、指の皮脂が導電面に付着しないようにした。

図２

② ペーストの入った保管容器をよく振るってから導電性ガラスの端にTiO_2ペーストをのせた。

③ 洗浄したガラス棒を横にしてガラスの上を軽く滑らせて、気泡が入らないようTiO_2ペーストを均一に広げた。

<u>TiO_2ペーストの焼き付け</u>

① TiO_2ペースト膜を塗布した導電性ガラスを、火が直接当たらないようステンレス板（厚さ：2mm）の上に置いた。また、加熱部分の熱が逃げないよう風防を設置した。

② ガスバーナーで20分間加熱した。

③ 高温のガラスを、約15分間かけてゆっくり室温まで冷却した。

（４）比較実験について

図３に示すように、「TiO_2ペーストの塗布」の手順①においてメンディングテープの枚数を変えることでTiO_2ペーストの厚み変化させたものと、「焼き付け」の手順②において火力を変化させたもので、６個の

焼き付けを実施し、出来上がった TiO_2 微結晶の状態を観察した。

温度 ＼ メンディング（枚）		1	2	3
	低温	A	C	E
	高温	B	D	F

図３

（５）結果

自然乾燥と焼き付けをするに従って、亀裂がすべての条件で発生した。その大きさと状態を光学顕微鏡で観察した。TiO_2 微結晶のスケッチを図４、亀裂の大きさを測定した結果を図 5 に示す。

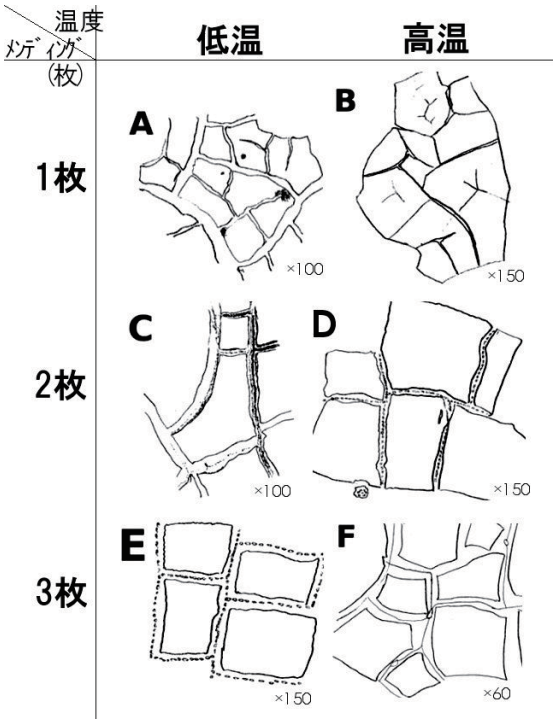


図４

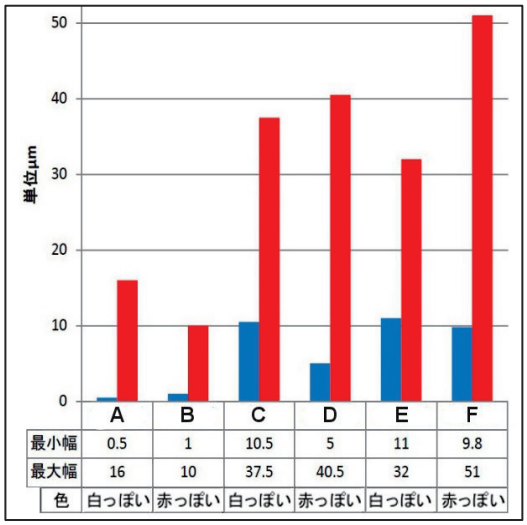


図５

これらの結果から、TiO_2 ペーストの厚みが薄いほど亀裂が小さくなる傾向にあることがわかった。しかし、E はこの傾向に反し、亀裂は小さ目であった。また、温度と亀裂の大きさの関係は、厚みが最も薄い A、B を除いて低温のほうが小さくなっている。高温のほうが亀裂の大きさにばらつきがみられた。

（６）考察

亀裂の発生原因については、焼き付け面に TiO_2 ペーストの収縮したような跡があったことから、TiO_2 が結晶化する際、ペースト中に含まれる水分や PEG が蒸発することでペーストが収縮し、亀裂が生じたのではないかと考えられる。TiO_2 が結晶化するためだと考えられる。そのため、塗布したペーストが薄いほどペースト内で蒸発した物質の総量は少なくなり、亀裂が小さくなった。また、ガラス棒を使用しペースト塗布する方法では、厚みを均一にするのが困難であった。そのため E では予期せずペーストの厚みが薄くなり、亀裂が小さ目になったと考えられる。

温度と亀裂の大きさの関係については、温度が高いほど水分が完全に蒸発することで、ペーストがより収縮し、亀裂が大きくなったと考えられる。それに対し TiO_2 ペーストの厚みが薄い A,B では低温でも十分に水分が蒸発し、高温・低温の温度差による蒸発量に変化がなく、亀裂の大きさの傾向が入れ替わったと考えられる。

実験Ⅱ ～PEG の性質について～

（１）この実験の目的と概要

本田健二氏らによる「酢酸を用いたペーストによる色素増感型太陽電池に関する研究」によると常温では粘度の高い PEG には、熱すると蒸散する[5]。この性質を確認し、TiO_2 ペーストにおける PEG の役割を検討するため、次の実験を行った。

（２）仮説

PEG は加熱すると熱分解し、空気中へ拡散していく。

（３） 実験方法

蒸発皿に PEG を 0.5mL とり、ガスバーナーで熱して変化をみた。

（４）結果

20 分間加熱すると液体の PEG はなくなり、炭素とみられる濃い茶色の物体が残っていた。さらに加熱を続けると、その黒い固体も徐々に消えていった。

（５）考察

ある一定の温度で加熱し続けると PEG は分解することが分かった。

また、実験 I の結果と照らし合わせると、PEG を添加した TiO_2 ペーストを熱したことによって PEG は分解し、PEG があった場所には孔が生じていると考えられる。つまり、PEG は TiO_2 微結晶の表面に孔を形成する役割をもち TiO_2 微結晶は多孔質な構造となった可能性が高い。

実験Ⅲ ～太陽電池と発電実験～

（１）この実験の目的と概要

実験 I の６条件で作成した TiO_2 コート電極をもとに太陽電池 A～E を作成し、発電実験を行った。作成したものが電池として発電することを確認したのち、TiO_2 微結晶の厚みや焼き付け時の温度、焼き付け時に発生した TiO_2 微結晶の亀裂により起電力にどのような違いが生じるか調べた。

（２）仮説

作成した電池に光を当てなければ起電力は 0mV のままであり、光を当てると黒鉛塗布側が正極となって起電力が発生する。また、最も亀裂が小さかった A,B で作成した電池 A,B が、最も起電力が大きくなる。さらに、光が当たると TiO_2 は導電体となるため、抵抗値は下がる。

（３）電池の作成・発電実験

電池の作成

［材料］

マローブルー花弁（0.5g）・純水 20mL・ヨウ化物イオンを含む電解質溶液（数滴）・鉛筆(6B)

［手順］

色素の抽出

① マローブルーの花弁 0.5g に水 20mL を加え、サランラップで落し蓋をし、10 分間放置した。

② 花びらを絞りながら取り出した。

色素の吸着

色素の抽出で作成した色素抽出液をスポ

イトで取り、TiO_2コートのガラスの上へ３，４滴かけて 10 分間放置した。

対極の作成

導電ガラスをピンセットで抑えながら、導電面全体に鉛筆で塗ることで黒鉛を塗布した。

太陽電池の組み立て

① 色素を吸着させた TiO_2 コートガラスの上に、黒鉛を塗布したガラスをのせた。
② その一端をクリップで止めた。
③ もう一端から電解質溶液を数滴加え、クリップで止めた。

発電実験

［方法］

電池１つ１つで測定したものからは、この太陽電池の特性について、また同日同時刻にペアで測定したものからは、条件によって発電にどんな違いが出たかを知ることができる。

①電池 A～F を個別に測定

光を照射しない状態と LED を一定の距離から当てた状態、太陽光が当たった状態でそれぞれ電池 A～F の起電力と抵抗を測定した。

②電池 AB,CD,EF のペアで測定

太陽光での測定は、同日同時刻での測定が難しかったため、電池 AB,CD,EF のペアでそれぞれ別の時刻に測定した。また、電池 CD については、本来太陽光を当てる側とは逆側から光を当てた測定も行った。

電池 A,B,C,D は電解質溶液を電池に注入してから数時間以内に実験を行った。一方、電池 E,F は３日前に電解質溶液を注入し実験で使用して保管していたため、溶液は乾燥しており改めて溶液を注入後、実験を行った。

（４）結果　電池Ａ～Ｆを個別に測定

下の表は、個別に電池 A～F の起電力と抵抗を測定した結果である。抵抗値が安定しなかったため最大値・最小値を記録しており、左側が最小値、右側が最大値である。

測定日時

電池 A～D：2014/12/25 12:30（曇）

電池 E,F　：2014/12/22 15:30

A	起電力(mV)
暗	0.9
LED	1.1
太陽光	11.6

B	起電力(mV)	抵抗(kΩ)	
		最少	最大
暗	0.0	0.844	0.874
LED	0.0	0.816	0.821
太陽光	0.3	0.771	0.784

C	起電力(mV)	抵抗(kΩ)	
暗	0.0	14.51	15.54
LED	−0.80	13.83	14.40

D	起電力(mV)	抵抗(kΩ)	
暗	0.0	105.7	107.6
LED	−3.7	104.9	105.5
太陽光	18.2	100.2	101.2

E	起電力(mV)
暗	5.0
LED	6.8

F	起電力(mV)
暗	33.9
LED	19.5

光を当てないときに起電力が 0mV に近くなるものが多かった。一方で電池 F のみ値が 0mV から大きくかけ離れていた。

また、LED 光を当てると、正極が黒鉛側

から TiO_2 コート側に変化したものが多い。一方で、太陽光を当てると黒鉛側が正極となった。LED 光が当たると電池自体の内部抵抗は極わずかだが小さくなり、太陽光が当たると抵抗値は大きく減少した。

（５）結果　同日同時刻に比較　　測定日時　2014/12/25 14:45～（曇）

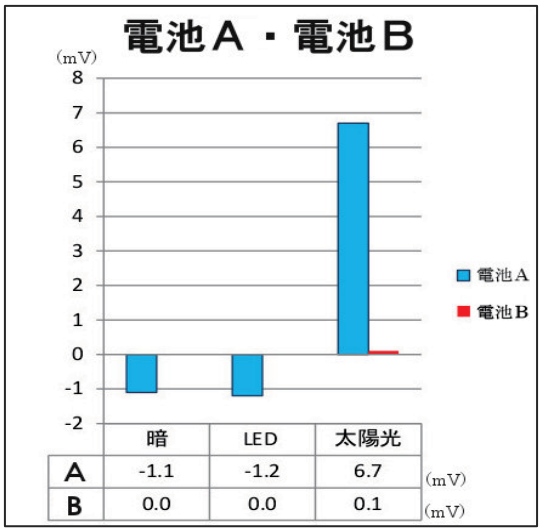


図６

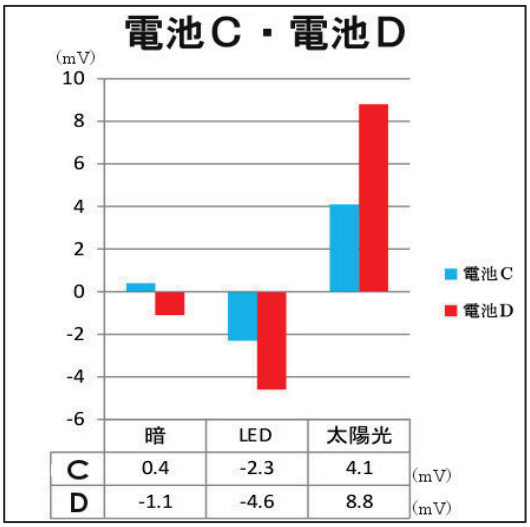


図７

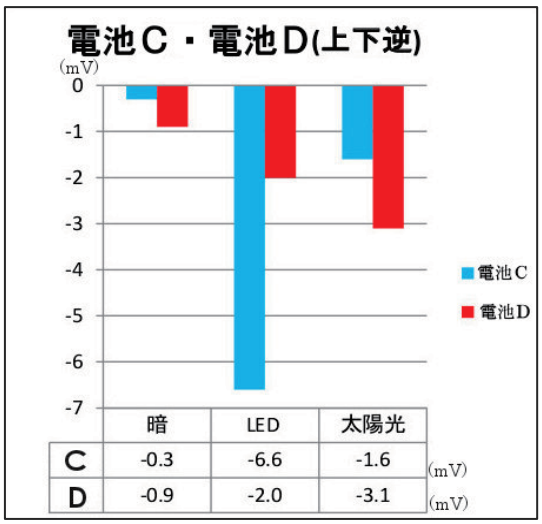


図８

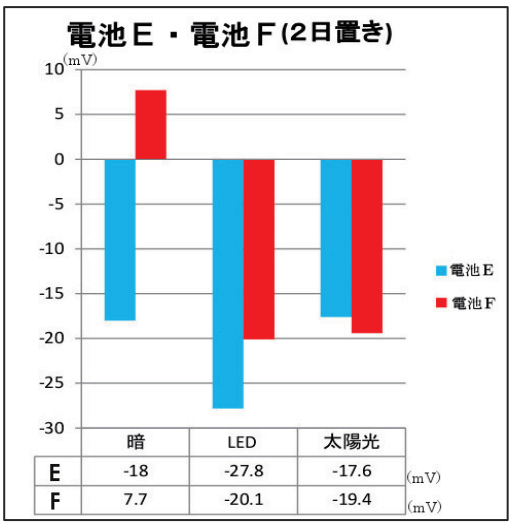


図９

上の図６～９は、電池 AB,CD,EF のペアでそれぞれ同日同時刻に測定した結果をまとめたものである。電池 A,B の場合、電池 B(高温焼き付け)はほとんど発電しないが、電池 A（低温焼き付け）は発電していた(図６)。電池 C,D ではどちらも起電力を生じ、電池 D（高温焼き付け）の方が高い値となった（図７)。また、実験 I の亀裂の大きさを鑑みると、亀裂が大きいほど大きな起電力が発生していた。さらに、光を黒鉛側か

ら当てると正極が本来とは逆になり TiO_2 コート側となった（図８）。電池 E,F では光が当たらない状態の起電力が 0mV と大きくかけ離れていた（図９）。また、電池内の液体の電解質溶液とテスターの先端がふれると値が大きく変化することを確認した。

（６）考察

電池の内部抵抗については、（４）結果より太陽光が当たると大きく減少することがわかった。TiO_2 は紫外線が当たると導電性をもつ半導体であるためだと考えられる[2]。

また、実験 I の TiO_2 微結晶上に発生した亀裂と起電力の大きさの関係については、亀裂が大きいほど大きな起電力が生じている（図５、図６～７）。亀裂が大きいということは、PEG および水分が多く蒸発し、TiO_2 微結晶の表面積が大きくなっていることを示す。それにより、多くの色素が吸着したためにこのような結果となったのではないかと考えられる。

LED 光の照射時に発電原理とは逆向きの起電力が生じた現象については、太陽光と LED 光の違いが関係していると考えられる。太陽光には紫外線が含まれるが、今回用いた LED 光には含まれない。そのため、LED 光では TiO_2 が導電性を持たず、３．発電原理の①、②の反応が起きなかったと考えられる。LED 光を照射した時、すべての電池において正極・負極が発電原理とは逆向きとなった原因追究は今後の研究課題となるが、この太陽電池から電流を取り出すためには、紫外線を含む光を照射しなければならないということが確認できた。

５. 今後の課題

今回の研究で作成した太陽電池は、時間が経つと電解質溶液の乾燥により機能しなくなるため、同時刻での比較が難しいという問題があった。よって、今後の研究では電解質層の改善が課題となる。この改善により太陽電池の劣化速度が抑えられ、同時刻の太陽光での実験が容易になり、より正確な性能比較ができるようになるだろう。

また、私たちが作成した太陽電池は光が当たらない状態でも起電力を生じた。発電原理では説明できないこの問題についてもさらに考察を深める必要がある。

６. 参考文献、資料

[1] 「太陽電池技術ハンドブック」、小長井誠、植田譲著、株式会社オーム社(2013)

[2] 「光触媒」、佐藤しんり著, 株式会社ナツメ社

[3] 「電池が一番わかる」、京極一樹著、株式会社技術評論社(2010)

[4] 「知っておきたい太陽電池の基礎知識」、斉藤勝裕著、ソフトバンククリエイティブ株式会社

[5] 「酢酸を用いた TiO_2 ペーストによる色素増感太陽電池に関する研究」、本田健二、古矢賢志、松浦秀治著、http://www.osakac.ac.jp/labs/matsuura/PDF/DyeSenstizedSolarCell/03denkikankeiHondaOHP.pdf

７. 謝辞

サイエンス研究会化学班の活動において、顧問の武曾先生、米田先生には丁寧なご指導をしていただきました。また、櫻井先生、矢野先生にも顕微鏡を使った検証について多くのアドバイスをいただきました。この場をお借りして深く感謝申し上げます。

黄金比と植物

３年Ｃ組　山田莉彩　出水明日香　古川紗帆
指導教員　櫻井　昭

１．要約

植物と黄金比との関連性を調べようと、キク科の頭状花序の花の並びとセイタカアワダチソウの葉のつき方を調べた。当初は黄金比との関連性について調べていたが、キク科の頭状花序の花の並びに関連性は見られたものの、セイタカアワダチソウには見られないことが分かった。

キーワード　　フィボナッチ数列　黄金比　黄金角　セイタカアワダチソウ

２．研究背景

私たちは、黄金比やフィボナッチ数列という値が、植物の形態に見ることができるということを本で読んで知り、興味を抱いた。そこで、植物に対して実際にどのように利用されているのか、自分たちの手で確認することとした。

これまでの研究で、頭状花序でキク科のものは、花のつき方にフィボナッチ数列の螺旋がみられた。これにより、少ない面積に、より多く花をつけることで子孫を残す確率を高められるため、進化の過程でも生き残ってきたのではないかということが分かった。また、セイタカアワダチソウの葉の付き方(葉序)の回転角に黄金角がみられるのではないかということを検証するため、2 年間で 3 回にわたって採集および計測を続けてきた。しかし、過去 3 回のデータでは調査個体数が少なく、誤差が大きかったため、再度セイタカアワダチソウの葉序の回転角の計測を行った。また、今までの計測結果をまとめ、黄金角に近似しているのかを再考察することにした。

３．研究内容

3.1　基本事項

●黄金比・黄金角

黄金比 1：φは人類が最も美しいと感じる比率であるとされている。例として、パルテノン神殿や、様々な絵画などの長方形の比率に使われている。この黄金比は、自然界によく見られる値である。その比は

$1:\phi=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　で表すことができる。

黄金角とは、円周 360°を 1：φに分けた角度の 1 に当たる部分のことで、約 137.5°になる。(図 1)

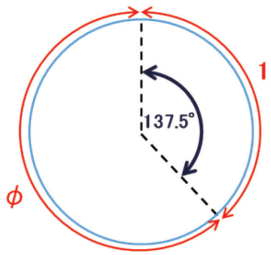


図１：黄金比と黄金角の関係

●フィボナッチ数列

また黄金比に関連性の深いフィボナッチ数列という数列があり、それは次のような

数列のことである。

0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144…

この数列は、

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$

という漸化式で表すことができ、数列上のある数の直前の２つを足すとその数になるという規則性がある。

この数列の前項と次項の比は、

1:1　1:2　2:3　3:5　5:8　8:13…

となり、黄金比 1:φに収束するという性質がある。

3.2　仮説

基本事項を踏まえ、葉の配列には黄金角が最も適していると考えた。ゆえに、セイタカアワダチソウの茎に対する葉のつき方は、黄金角に従っていると考えられる。

3.3　方法

標本

平城宮跡のセイタカアワダチソウを採集

1 回目　2012 年 10 月～　2 本

2 回目　2013 年 4 月～　3 本

3 回目　2013 年 10 月～　7 本

4 回目　2014 年 5 月～　15 本

方法

セイタカアワダチソウを採取し、葉の付け根を残して葉を切る。その後、1 つ目と 2 つ目の付け根に、針を葉の中心に沿うように刺す。 次に、茎の真上から写真撮影を行う。以上の操作を、全ての葉の付け根に対して繰り返す(図 2)。撮影した写真を使って、葉と葉の間の角を計測する。

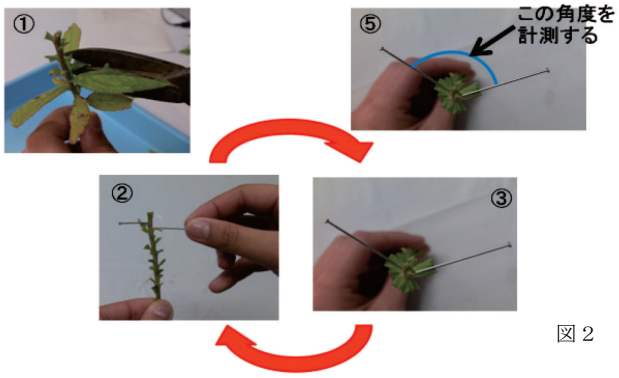
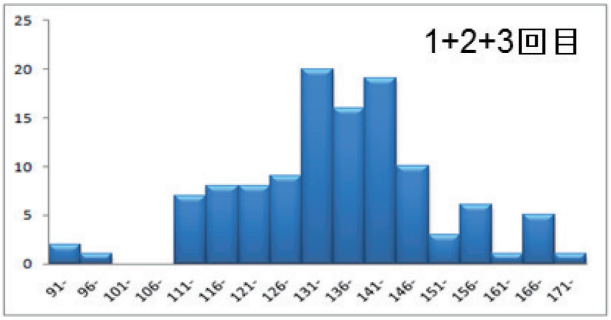
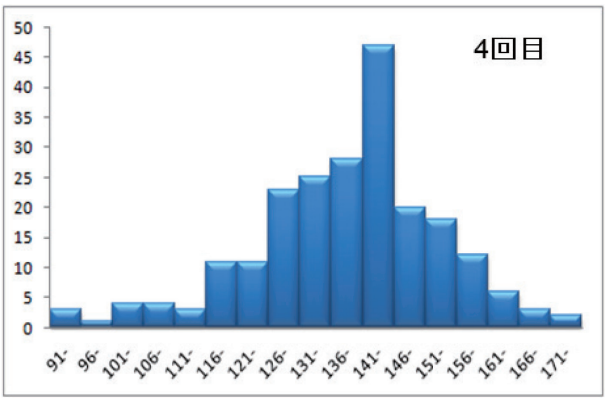


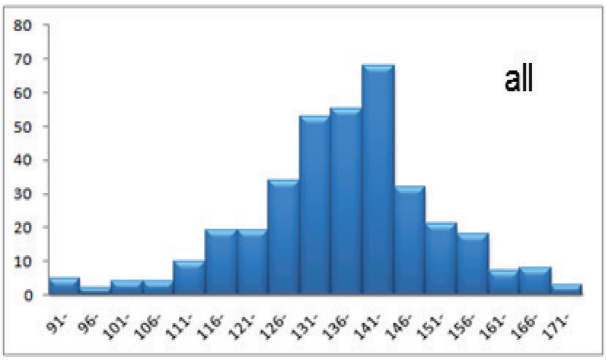
図 2

3.4　実験結果

以下のグラフは、縦軸は調べた葉と葉の間の数、横軸は角度を表している。







4 回目：平均値 138.14°　中央値 140°

4．考察

以前は、「セイタカアワダチソウの葉のつ

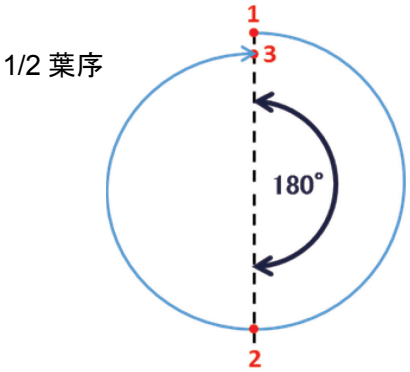
き方は黄金角に従っている」と考察で結論付けていた。

しかしこの研究の間、黄金比と植物に関する本やソースを調べているうちに、セイタカアワダチソウの葉と葉の間の角は、黄金角よりも「フィボナッチ数列に関する葉序」の方がより近いのではないかと思われるようになった。

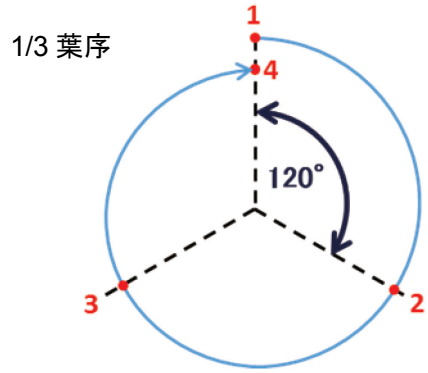
ここで、フィボナッチ数列に関する葉序について説明する。

このフィボナッチ数列に関する葉序は、葉序の配列がフィボナッチ数列に出現する数によって成り立っている。

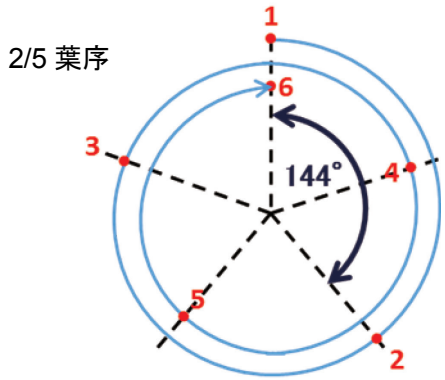
例として、1/2 葉序、1/3 葉序、2/5 葉序、3/8 葉序、5/13 葉序などがあげられる。



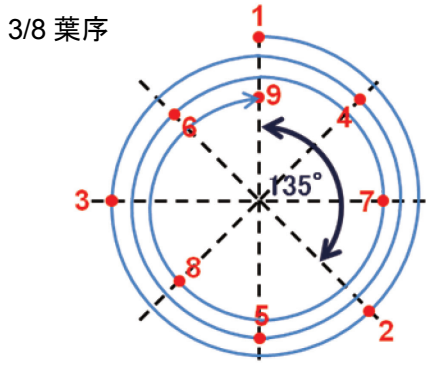
1 枚目の葉が 3 枚目の葉と 1 回転で重なる。回転角は 180°



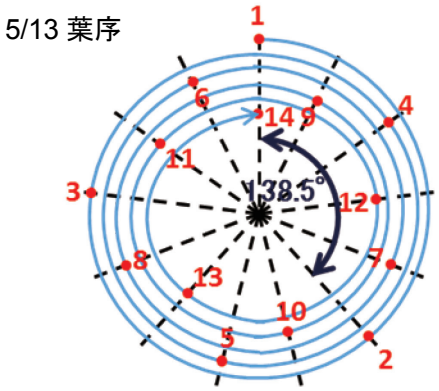
1 枚目の葉が 4 枚目の葉と 1 回転で重なる。回転角は 120°



1 枚目の葉が 6 枚目の葉と 2 回転で重なる。回転角は 144°



1 枚目の葉と 9 枚目の葉が 3 回転で重なる。回転角は 135°



1 枚目の葉と 14 枚目の葉が 5 回転で重なる。回転角は 138.45°

これらの葉序は、前の葉と次の葉の間の角度と 360° から回転角を引いた値の比がそれぞれ

1:1　1:2　2:3　3:5　5:8

となっていて、これは 1:φに、つまり黄金角に収束する。

今回、中央値は 138.14°となった。これは、黄金角の回転角の理論値 137.5°よりも、フィボナッチ数列に関する葉序の、5/13 葉序の回転角の理論値である 138.45°と近似している。従って、セイタカアワダチソウの葉序の配列には、黄金角よりも、13 枚の葉が 5 回転すると 14 枚目が 1 枚目の葉に重なるという 5/13 葉序の方が近似しているとみられる。

このフィボナッチ数列に関する葉序は、1 周期にかかわる枚数が多くなればなるほど、その回転角は、黄金角に近づいていくという性質がある。そのため、セイタカアワダチソウは進化の過程で、回転角が黄金角に近づいていっているのではないかとも考えられる。

また、花と葉は茎の先端(シュート)で同じように発生する。キク科の植物は、花がささっている台座(総苞)が、平面である。花は平面上に敷き詰めることができるが、セイタカアワダチソウの葉は、茎に立体的に配置される。茎から葉の芽がでるとき、葉の回転角は黄金角でも、葉と葉を立体的に配列するとき、つまりセイタカアワダチソウが成長するときに環境などの要因で、黄金角からずれたのではないか。

■立てられた仮説のまとめ

① セイタカアワダチソウの葉序は、フィボナッチ数列に関する葉序である 5/13 葉序に従っている。現在の葉序は進化の過程において光を得やすい黄金角に近づく過程なのではないか。(或いはそれ以上黄金角に近づく必要がない何らかの要因があると考えられる)

② セイタカアワダチソウの葉序は、もともと黄金角だったが、環境などの要因により黄金角からずれ、フィボナッチ数列に関する葉序に近似したのではないか。

５．今後の展望

今回のデータの最頻値は 141°であった。平均値こそ 5/13 葉序の回転角に近かったものの、最頻値は 5/13 葉序とは少し離れた数値になっている。このような結果になった理由を調べたいと思う。考察において、複数の仮説を立てることができたため、今後その検証を立証するために、シュートでの葉の発生状況を顕微鏡で観察し、5/13 葉序が環境に左右されたものでなく、本当に正しいのかを標本数を増やす、できるだけ周囲に障害物のない場所で標本を採集する、いくつかの地点で標本を採集するなどの方法で確認したいと思う。また、どこで葉と葉の間の角度が決まるのか、その植物の共通点を調べたいと思う。

６．参考文献

[1]「黄金比　自然と芸術にひそむもっとも不思議な数の話」，スコット・オルセン著,藤田優里子訳，創元社，2009

[2]「不思議な数列　フィボナッチの秘密」，アルフレッド・S・ポザマンティエ，イングルマル・レーマン著，松浦俊輔訳，日経 PB 社，2010

[3]「フィボナッチ数列と葉序 - 大日本図書」www.dainippon-tosho.co.jp/mathlab/flash/no_002/math2.html

７．謝辞

これまで私達を指導してくださった櫻井先生、数学的な面において相談にのって下さった河合先生、佐藤先生に、感謝の意を示します。

マツタケの人工培養を目指して～マツタケ菌糸の培養方法の確立～

３年Ｂ組 結崎　祈　１年Ｂ組　加藤　大翔　１年Ｂ組　木下　綾太
指導教員　　櫻井　昭

１．要約

私たちの班は、マツタケの人工培養を目指し平成 23 年度から研究を始めて 4 年になる。マツタケ菌の純粋培養を試み、なぜマツタケ菌の人工培養が困難であるのか、培養するための培地条件の検討を行なっている。昨年まではマツタケ菌の培地への植継ぎの時にコンタミネーションが起こりマツタケ菌を維持することができないでいたが、今年初めて植継いだ後成長させることができ、マツタケ菌を維持できるようになった。

キーワード　IFO-7 培地、浜田培地、クリーンベンチ、パラフィルム、インキュベータ、プラズマクラスター、コンタミネーション、コンタミチェック

２．研究の背景と目的

マツタケの人工培養の成功例はいまだ報告されていない。私たちは、なぜマツタケは人工培養が困難なのか興味をもち、マツタケの人工培養の成功を目指して研究を平成 23 年度から始めた。1 年目はシイタケの人工培養を成功させ、2 年目からマツタケの人工培養をめざして研究してきたが、毎回植継ぎの時にカビなどの繁殖により、マツタケ菌が汚染され増えなくなるという失敗(コンタミネーション)を重ねてきた。そこで、植継ぎの手順を見直すことで植継ぎの成功率を上げようと試みることにした。

３．実験内容

3.1　実験場所の環境を調べる

3.1.1　実験仮説

通常、マツタケ菌は IFO-7 培地という培地で培養されるが、私たちがこの培地を使ってマツタケ菌の培養を試みたところ、マツタケ菌が殖えず、すぐに他の菌に浸食されてしまった。そこで「他の菌がシャーレ内に入り込む原因は何か」という要因を突き止めたいと考えた。なぜならマツタケ菌の植継ぎは、無菌状態の空間で行い密閉するため、マツタケ菌や培地が外気にふれることは本来無いはずである。このことは、次に示す一連の操作手順からいえる。

マツタケ菌の植継ぎは、実験室内に設置されている“クリーンベンチ”という無菌状態の空間を作り出す機械の中で行う 4 センチほどに成長したマツタケ菌のコロニー(菌が集まり肉眼で見える大きさになったもの)を、メスで 5 ミリ角ぐらいに切り分け、それを新しい培地に植継ぐ。そのあと、培地が乾燥しないよう“パラフィルム”という薄いパラフィンでできたフィルムをシャーレと蓋の隙間に巻き、密閉する。それらのシャーレを“インキュベータ(恒温機)”に入れ、28 度で培養する。以上の操作より、他の菌が培地内(シャーレ内)に入ることはないはずなのだが、毎回培地は菌に侵食さ

れていた。

そこで、奈良女子大学の植野洋志先生に相談させていただいたところ「実験を行う部屋の環境そのものに問題があるのではないか」と、ご助言いただいた。そこで、「実験を行う場所にはどれくらいの菌がいるのか」を調べるために、コンタミネーションチェック(以下コンタミチェック)を行った。

3.1.2　実験方法

クリーンベンチ内、インキュベータ内、実験室内の 3 ヶ所でコンタミチェックを行った。コンタミチェックの手順は以下の通りである。

1. マツタケ菌を培養するため、IFO-7 培地と浜田培地の 2 種類の寒天培地のシャーレを作成する。
2. それぞれの培地のシャーレの蓋を 3 か所で 1 分間開けた後閉め、パラフィルムを巻く。
3. それらの培地を 28 度のインキュベータ内で 1 週間培養する。

実験に使用した培地の組成をまとめると以下のようになる。

・IFO-7 培地

乾燥酵母	1.5g
グルコース	6.0g
寒天	5.4g
蒸留水	Σ300ml

・浜田培地

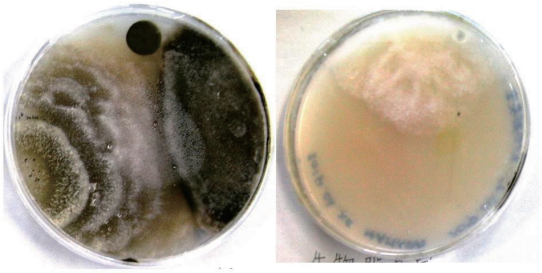
グルコース	6.0g
乾燥酵母	1.5g
燐酸カリウム	0.6g
硫酸マグネシウム	0.3g
寒天	6.0g
蒸留水	Σ300ml

3.1.3　実験結果

クリーンベンチ内で蓋を開けた培地には、コンタミネーション(以下コンタミ)がおこらなかった。

インキュベータ内で蓋を開けた培地には、コンタミが見られた。また、培地によって繁殖した菌に、違いが見られた。IFO-7 培地は、白くふわふわとしたコロニーが培地の半分を占めていた。浜田培地は、3 種類ほどの菌が見られたが、コロニーの大きさは小さかった。

実験室で蓋を開けた培地にも、コンタミが見られた。こちらにも、コンタミの仕方に違いが見られ、浜田培地では、1～2 センチほどの小さなコロニーが 3 つ見られ、その他は白いコロニーで、培地の 1/4 ほど覆われていた。IFO-7 培地では、培地のほとんどが有色のコロニーで覆われており、コロニーの色の違いから、3 種類ほどのコロニーはあるように思われた。



IFO-7培地　　浜田培地

生物器具室のコンタミチェック

3.1.4　考察

コンタミしていた面積が浜田培地に比べ IFO-7 培地が広かった理由は、浜田培地にだけ入っている物質が、菌の増殖に対して何か作用しているのかもしれないが、今回の実験だけではわからなかった。そして、インキュベータ内と実験室には菌が多いことが分かった。また、クリーンベンチ内に

は、菌がほとんどいないことも確認できた。これらの結果から、クリーンベンチ内で操作をしているにもかかわらず、菌が入ってくるのは、インキュベータ内か、もしくは実験室にシャーレを置いている時の可能性が高いと考えられる。

以前、クリーンベンチ内で培地作成作業を行い、その後一度も蓋を開けていない培地で、コンタミが見られたことがあった。このシャーレを調べてみたところ、パラフィルムに穴があいているのを見つけた。これらのことから、シャーレを実験室やインキュベータ内に置いておくとき、このパラフィルムの穴から培地に他の菌が侵入し、コンタミを生じさせていたと考えられる。

3.2　空気中の菌を減らす工夫

3.2.1　実験仮説

実験 3.1 より、実験を行っている実験室と、培地を培養しているインキュベータ内には菌が多く、菌をなるべく減らすための工夫が必要だということが分かった。そこで、実験室内の菌を減らすには空気清浄機が使えるのではないかと考えた。またインキュベータ内は、空気清浄機を置けないため、インキュベータ内に付着している菌を少しでも減らそうと考え、実験を行うことにした。「プラズマクラスターを実験室に導入し、実験を行えば空気中の菌が減るのではないか」「インキュベータ内をアルコールで掃除・消毒すればインキュベータ内の菌が減るのではないか」と仮説をたて、実験室とインキュベータ内で再度コンタミチェックを行った。

3.2.2　実験方法

実験室内で、実験を行っている場所をビニールカーテンで区切り、その中でプラズマクラスターを約 24 時間つけ放しにする。この際、区切られた空間の空気が入れ替わらないように、窓と扉は実験終了まで一切開けないようにする。また、インキュベータ内はアルコールで掃除・消毒する。

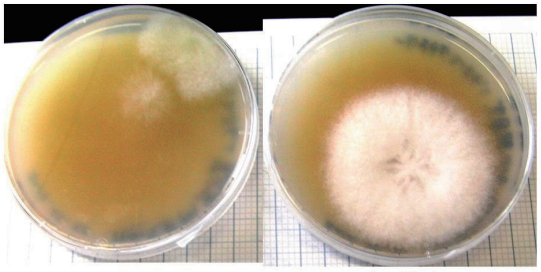
翌日、3-1-2 と同じ方法でコンタミチェックを行う。

3.2.3　実験結果

プラズマクラスターをつけた実験室の空間で蓋を開けたシャーレは、前回(3-1)と同じようにコンタミが見られたが、どちらの培地もコロニーに覆われた面積は、前回よりも狭かった。

インキュベータ内で蓋を開けたシャーレにコンタミが見られたが、コロニーの大きさは前回とあまり違いはなかった。

どちらのコンタミチェックで観察されたコロニーは、白くふわふわしたもの一種類のみだった。



IFO-7培地　　浜田培地

生物器具室(プラズマクラスター有)
コンタミチェック

3.2.4　実験考察

前回のシャーレには赤、青、白等の多種多様なコロニーが殖えていたが、今回は白くふわふわしたもの一種類のみだった。このことからプラズマクラスターやアルコール消毒によって、培地に侵入する菌の総数は、減らすことができると考えられる。

3.3　マツタケの純粋培養

3.3.1　実験仮説

3.2 の実験より、プラズマクラスターとアルコール消毒は効果があると分かった。そこで、「プラズマクラスターをつけた空間で実験を行えばシャーレに菌が入り込む確率が減り、マツタケ菌が侵食されることなく殖えるのではないか」という仮説たて、マツタケ菌を培地に植え継ぐことにした。

3.3.2　実験方法

実験室内の、実験を行っている場所をビニールカーテンで区切り、その中でプラズマクラスターを約 24 時間つけ放しにする。この際、区切られた空間内の空気が入れ替わらないよう窓と扉は実験終了まで一切開けないようにする。また、インキュベータ内をアルコールで掃除・消毒する。

翌日、プラズマクラスターをつけた空間内にあるクリーンベンチ内で、マツタケ菌の植継ぎを行う。

3.1.4 より、パラフィルムの穴も菌が入り込む原因の一つと考えられるため、穴があかないようにパラフィルムを 2 重に巻き、28 度のインキュベータ内で、2 ヶ月間培養した。

3.3.3　実験結果

10 枚植継いだうち、菌に侵食されたものは 1 枚のみだった。残りのシャーレは順調にマツタケ菌のコロニーが成長していた。

IFO-7培地　　浜田培地

成功したマツタケ菌の植継ぎ

3.3.4　実験考察

今までマツタケ菌を新しい培地に植継いでも、すべて他の菌に浸食されてしまっていたが、今回はほぼすべてが侵食されることなく、マツタケ菌のみ培地上で殖えていた。このことから「プラズマクラスターをつけた空間で実験を行う」「アルコールでインキュベータ内を掃除、消毒する」「パラフィルムを 2 重に巻く」という操作過程は、マツタケ菌の純粋培養に有効であると考えられる。

４．今後の課題

現段階では、マツタケ菌の菌糸の維持が可能になっただけであり、子実体にする方法を確立していない。私たちが食用としているのは、子実体である。そして、キノコ類の菌糸が子実体になるには、ある特定のショックが必要であり。しかし、マツタケ菌糸が、子実体になるために必要なショックはまだ解明されていないため、そのショック法の検討を今後行いたい。

また、マツタケ菌はアカマツの木の周辺に生息しているため、マツタケ菌とアカマツの関係についても調べていきたいと考えている。

５．謝辞

本研究活動において、奈良女子大学の植野洋志先生、顧問の櫻井先生に、多大なご指導を賜わりました。そして、サイエンス研究会生物班のメンバー(2A 天野桃花さん、2A 松本淳子さん)にご協力をいただきました。この場で、深く感謝申し上げます。

DNAによる雌雄判別法の確立

３年Ａ組 米田　江里奈　３年Ａ組　吉田　彩乃　３年Ｂ組　米田　奈央
指導教員　　櫻井　昭

１．要約

私たちは、ピスタチオのDNAによる雌雄判別に向けて、研究を行っている。そこで、すでに確立されている雌雄異株のイチョウの雌雄判別方法をピスタチオへ応用できないかと考えた。そして、ピスタチオからのDNA抽出にむけ、イチョウからDNAの抽出を試みた。その結果、イチョウの葉から安定的にDNAを抽出することができた。

キーワード　　ピスタチオ、DNA、抽出

２．研究の背景と目的

ピスタチオは、雌雄異株で実をつけるためには、どちらの木も必要となるが、成長が遅く、実をつけるまで成長するのに約10年かかり、また、成木となるのに約20年かかると言われている。だから、実をつけてから、雄株、雌株の判断をしていたら、生産の効率が悪い。そこで、私たちは、ピスタチオがまだ実のならない苗木の間に DNA を利用し雌雄の判別を行い、雌株を多く育てることで多くの実を得られるのではと考え、効率の良い生産を目指し、研究を始めることにした。そこで、同じように雌雄異株であるイチョウは DNA による雌雄判別の方法が確立されているため、私たちは、イチョウのDNAによる雌雄の判別の研究を行い、ピスタチオに応用できないかと考えた。そして、DNA からの雌雄判別に必要なDNA抽出するため、まず、入手しやすい、イチョウの葉からの DNA 抽出を試みることにした。

３．研究内容

3-1　イチョウのDNA抽出実験

3-1-1　実験の仮説

DNA抽出キットを用いることでDNAの抽出ができる。

3-1-2　実験方法

DNA抽出キット

キット１「Plant　Genomic　DNA Extraction　System」。

材料

橿原市で採取したイチョウの葉、キット、ウォーターバス、チビタン、アイスボックス、チューブ

事前準備

・TEの作製

（10ｍM　Tris-Hcｌ,1mM EDTA ph8.0）

TE-①1M Tris-Hcl(ph8.0) 2mℓ

②0.5M EDTA(ph8.0)400μℓ

1. 純水を①+②+純水で200mℓにメス
2. オートクレーブで滅菌し 4℃で保存

ウォーターバスを65℃に温める。

抽出方法(Plant Genomic DNA Extraction System)

1. イチョウの葉の茎をはぶき、乳鉢と乳房で粉状になるまで、すりつぶす。その後、0.1g 以下量りチューブに入れる。
2. 1 に PX1[*1] を 400μℓ 入れる。
   Rnase[*2]20μℓ 入れる。
3. 温めておいたウォーターバスに 2 をフローターに入れ、10 分浮かす。（途中にボルテックスで混合する）
   ・新しいチューブと Shearing Tube[*3] を 1 本ずつ用意
4. 10 分後、チビタンで溶液を落とす。
5. 4 に、PX2[*4] を 130μℓ 加える。その後、ボルテックスで混合する。
6. 氷中に 5 分入れ冷やす。この間に TE1mℓ はかり、新しいチューブに入れる。それを 65℃ウォーターバスに浮かす。ウォーターバス後、チューブはチビタンを行い、溶液を落とす。
7. Shearing Tube に 6 をできるだけ移す。
8. 7 を遠心分離機（13000×ｇ）に 2 分かける。
9. Shearing Tube の下に出た溶液の量を量りながら、予め用意した新しいチューブに移す。
10. 9 の溶液と同量のエタノールと半量の PX3 を加え 3～5 分置く。

（11.エタノールを 650μℓ 量り入れる。）

12. Plant Genomic DNA Mini Column へできるだけ入れる。残った溶液はおいておく。
13. 遠心分離機（10000×ｇ）に 1 分かけ、下の溶液を捨てる。700μℓ の WS Buffer[*5] を加え、同じように遠心分離機にかけ、下の溶液を捨てた後、もう一度遠心分離機に 3 分かける。
14. 13 の上を新しいチューブにのせ、TE を 200μℓ 加え 5 分おく。その後、3 分遠心分離機にかけ、下のチューブを 20℃のフリーザーで保存する。

尚、この実験では、雌雄の別々の葉を用意し、実験を行った。

キットによって方法は少しことなる。

*1 Storage at room temperature For research use only

*2 VIOGENE(20mg/ml)

*3 キットに含まれていたチューブ

3-1-3 実験の改善

3-1-3-1 Ⅰ，Ⅱ

	実験Ⅰ	実験Ⅱ
シリカゲル	×	○
エタノール	○	×

・実験Ⅰ

・エタノールを途中加えた。

Plant Genomic DNA Mini Column に移す前に入れたが、移す際に溶液が多すぎて、すべてうつすことができなかったことからこれを要因と考えた。

・実験Ⅱ

・シリカゲルを加えてすり潰す。

粉末にする時に、すり潰しやすいようになぜ加えたか？

3-2 抽出の確認

3-2-1 方法

分光高度計を用いて、抽出したＤＮＡの確認を行う。

3-2-2 結果

抽出が以下のように確認できた。

3-3 実験結果

実験Ⅰ・Ⅱ

		μg/μℓ	260/280
Ⅰ	雄株	72.3	1.72
	雌株	59.4	1.70
Ⅱ	雄株	9.3	1.73
	雌株	12.7	1.46

このキットを用いたことで、DNA を抽出することができた。

ⅠとⅡを比較して

Ⅱの改善した方が、抽出の濃度が低かった。

４． 考察、改善点

今まで、DNA の抽出ができたことが少なかったがこのキットを用いたことで低濃度ではあったが、安定的な DNA の抽出を可能にすることができた。しかし、より高濃度にしようと思い、改善に挑戦したが、うまくいかなかったので、今後、実験をして改善し、高濃度のＤＮＡを抽出したいと思う。また、アスパラで確立されている DNA による雌雄判別法で用いられているプライマーをイチョウの DNA に用いたいと思う。また、様々な実験を通して、学んだことをもとにピスタチオの雌雄判別に応用していきたいと思う。

５． 今後の課題

5-1 高濃度の DNA 抽出

5-1-1 エタノールの有無の対照実験と移す際の量の多さの要因を探す。

5-1-2 シリカゲルの有無の対照実験

5-2 確立されたアスパラの雌雄判別法に用いられているプライマーをイチョウに応用する。

5-3 ピスタチオの葉の入手

６． 参考文献

[1]「Plant Genomic DNA Extraction System」

７． 謝辞

植野先生、櫻井先生、色々なアドバイスを頂き有り難うございました。

生物を使った水質浄化

4年C組　飯野 さくら
指導教員　矢野 幸洋

１．要約

水質浄化作用があるといわれているアサリやシジミにどれくらいの効果があるのかを調べた。しかし、条件によっては浄化出来ているのかが分からなかったり、数値化することができなかったりしたため、どのような条件で実験し、なにを測定すると数値化できるのかを調べた。その結果、牛乳で汚染した水をアサリで浄化することが一番良いという結論になった。

キーワード　水質浄化、アサリ、シジミ、数値化

２．研究の背景と目的

以前、あるテレビ番組で、生き物が生息することができないほど汚い海岸を自然のものを使って再生させるという企画が放送された。それを見て、生き物などがなぜ水を浄化できるのかを不思議に思い、また、その効果を他に応用できないかと考え、この研究をはじめた。

３．研究内容

〈実験①〉米粉を使った実験

生活排水に含まれる米の研ぎ汁を再現するために米粉を使う。

方法

次のAとBをシジミが活発に活動する暗い所に2時間放置し、見た目に変化があるか観察し、実験前と実験後に CODと pH をそれぞれ測定する

A　蒸留水 1ℓに米粉 5ｇを混ぜシジミを25匹入れる

B　蒸留水 1ℓに米粉 5ｇを混ぜる

結果

・外観

変化が見られなかった

・COD

A･B共にパックテストの測定範囲である 100ml/ℓを 2 回とも超えたため測定できなかった

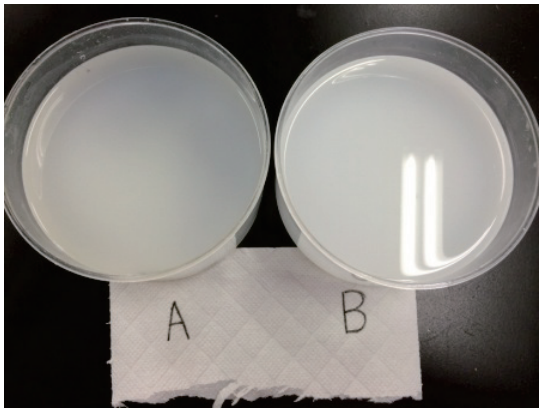
・pH

A　7.7(実験前)→7.2(実験後)

B　7.3(実験前)→7.2(実験後)

・その他

途中で死ぬシジミが続出した



<実験②-1> デンプン水溶液を使った実験

濃度の変化をヨウ素液により簡単に知ることができるデンプン水溶液を使う。

方法

次のA･B･Cを暗い所に6時間放置し、外観の変化とヨウ素液による変化を1時間ごとに観察し、CODとNH_4^+を実験前と実験後にそれぞれ測定する。

A　0.5%のデンプン水溶液800mlにシジミ16匹を入れる

B　0.5%のデンプン水溶液800mlにシジミ8匹を入れる

C　0.5%のデンプン水溶液800ml

結果

・外観

変化は見られなかった

・ヨウ素液による変化

変化は見られなかった

・COD

A･B･Cすべてが2回とも50～100ml/ℓだったため変化がわからなかった

・NH_4^+

A 実験前より実験後のほうが多かった

B 実験前より実験後のほうが多かった

C 変化がなかった

・その他

途中で死ぬシジミがいた

<実験②-2>デンプンの量とヨウ素液の変化

方法

次のA・B・C・Dにヨウ素液を入れ色の変化を観察する

A　蒸留水

B　0.05%のデンプン水溶液

C　0.5%のデンプン水溶液

D　5%のデンプン水溶液

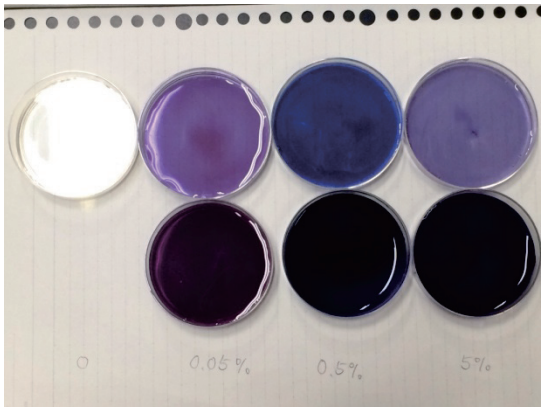
結果

A　ヨウ素液の色に変化はなかった

B　薄い紫色になった

C　青色になった

D　濃い紫色になった



左からA・B・C・Dの順で、上段はヨウ素液1滴、下段はヨウ素液2滴落としたものである。

<実験③> 牛乳を使った実験

シジミよりも大きいアサリを使い、アサリは海に生息しているため食塩水を使う。また、水にとけて、濃度によって見た目が変化する牛乳を使う。

方法

次のA・B・C・Dを暗い所に14時間放置し、外観・COD・pH・濁度・色度を実験前と実験後にそれぞれ測定する。

A　3%の食塩水 500ml に牛乳 0.5ml を混ぜ、アサリ 8 匹を入れ、エアレーションを行う

B　3%の食塩水 500ml に牛乳 0.5ml を混ぜる

C　3%の食塩水 500ml にアサリ 8 匹を入れ、エアレーションを行う

D　3%の食塩水 500ml

結果

・外観

A 濁りがかなり減った
アサリの排泄物だと考えられる白い帯状の物が浮いている

B 変化なし

C 白い帯状のものが少し浮いている

D 変化なし

実験前

実験後

・COD

A 実験前・実験後ともに 20～50ml/ℓだったため変化がわからなかった

B 実験前・実験後ともに 20～50ml/ℓだったため変化がわからなかった

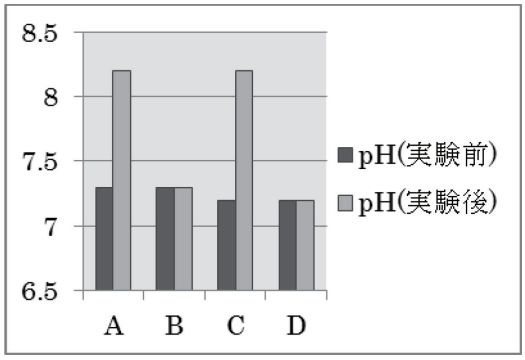
C 実験前が 0ml/ℓだったのに対して実験後は 10～13ml/ℓになった

D 実験前・実験後ともに 0ml/ℓだった

実験後

・

pH



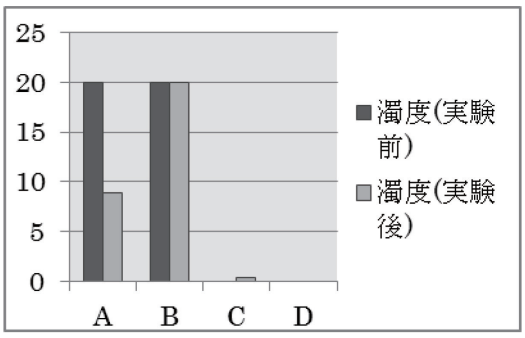
A 7.3(実験前)→8.2(実験後)

B 7.3(実験前)→7.3(実験後)

C 7.2(実験前)→8.2(実験後)

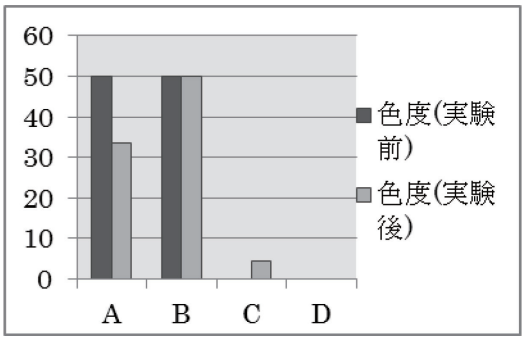
D 7.2(実験前)→7.2(実験後)

・濁度（20 が測定できる最大値）



A 20(実験前)→8.9(実験後)
B 20(実験前)→20(実験後)
C 0(実験前)→0.4(実験後)
D 0(実験前)→0(実験後)

・色度（50 が測定できる最大値）



A 50(実験前)→33.5(実験後)
B 50(実験前)→50(実験後)
C 0(実験前)→4.5(実験後)
D 0(実験前)→0(実験後)

４．考察

・実験①より、米粉はこの実験には適していないことがわかった。
・実験②-1 で変化が見られなかったのは、②-2 より、デンプン水溶液に対するヨウ素液の量が多かったことと、実験を開始した 0.5%のデンプン水溶液ではヨウ素液の色が変わりにくかったためと考えられる。
・実験③より水質を人工的に汚染するためには牛乳が適していることがわかった。
・シジミで予想していたような結果がでなかったのはシジミの浄化する量に比べて、排泄物の量も多かったことが原因だと考えている。
・エアレーションを行うことで、途中で死ぬアサリが減った。
・実験③の A の COD 値に変化がなかったのは、C の COD 値が増えたことや、実験②-1 で NH_4^+が増えたことから、アサリからの排出物が関係していると考えられる

５．今後の課題

・アサリやシジミが実験の途中で死んでしまうことが多かったため、長期間生きたままで保つ方法を調べる。
・アサリやシジミの生死がはっきりしないため、はっきりさせる方法を考える。
・実験③と同じ実験をシジミでも行ったが変化が見られなかったためアサリとシジミで実験結果に差が出る原因を調べる。
・COD 値に変化がなかったのが、パックテストの目盛が粗かったから変化がわからなかったのか、アンモニアやその他の原因があって変化がなかったのかを調べる。
・アサリやシジミ以外のものでも調べて、それぞれどのような特徴があるのかを調べる。

６．謝辞

今回の研究をするにあたり、指導してくださいました矢野先生に、深く感謝いたします。

おいしい抹茶(薄茶)を点てる～抹茶の科学～

4年A組　松井絵莉子
指導教員　　櫻井　昭

１．要約

茶の湯を完成させた千利休の言葉とされる茶訓に「茶は服のよきように点て」がある。お客様が飲みやすいお茶を点てなさい、ということである。

そこで、飲みやすいお茶、つまりおいしい抹茶とはどんな抹茶なのか、人の味覚で調査したところ、泡立ちのよいまろやかな抹茶が多くの人に喜ばれるという結果が出た。さらに日本の伝統文化である茶道に科学を投じ、抹茶を点てるのに使用する水の硬度が抹茶の泡立ちに影響を与えることを明らかにした。

キーワード　抹茶、泡、水の硬度、マグネシウム、カルシウム、ナトリウム

２．研究の背景と目的

私は茶道同好会に所属している。お客様に最高のおもてなしをするために、おいしい抹茶を点てるにはどうすればよいかを科学的に検証した。

一般的に抹茶（薄茶）を点てるのには軟水が適しているとされ、沸騰させた後、70－85 度に冷ましてから使用するのがよいといわれている〈参考１〉。

WHO 飲料水水質ガイドラインで硬度は以下のように分類されている。

・軟水は硬度 0－60 未満
・中程度の軟水は硬度 60－120 未満
・硬水は硬度 120－180 未満
・非常な硬水は硬度 180 以上

どの程度の硬度の水が抹茶を点てるのに適しているのか、水の硬度に注目して、実験した。

３．実験内容

3-1　味見実験

3-1-1　実験仮説

日本の水のほとんどが軟水で、ヨーロッパや北米には硬水が多く存在する。日本は国土が狭く地層に浸透する時間が短く、ヨーロッパや北米の大陸では地層に接する時間が長いことが、硬水と軟水を生み出す原因のひとつとされている。また、主に旨みを味わう日本茶には軟水が、主に香りを楽しむ中国茶や紅茶には硬水が最適だとされている〈参考 2〉。

抹茶の場合も日本茶と同じように軟水が適しているのではないかと予想し、実験を開始した。

3-1-2　実験方法

硬度の異なる水で実際に抹茶を点て、硬度による味の違いを、人の味覚を用い調べた。硬度の異なる水として、奈良県の水道水(硬度 40 度台)、硬度 30、硬度 1468、温泉水(硬度 約 150)、硬度 97、硬度 304　の 6 種類の水で比較した。手順は下記のように行なった。

①抹茶茶碗に抹茶の粉を二杓いれる。実験には、苦味が少なく、色鮮やかとされる

抹茶を使用する。

② ①にお湯(ポットで一度沸騰させ、80度に設定)を半尺いれる。

③それぞれ、20 秒間、茶筅（百本立）で抹茶を点てる。

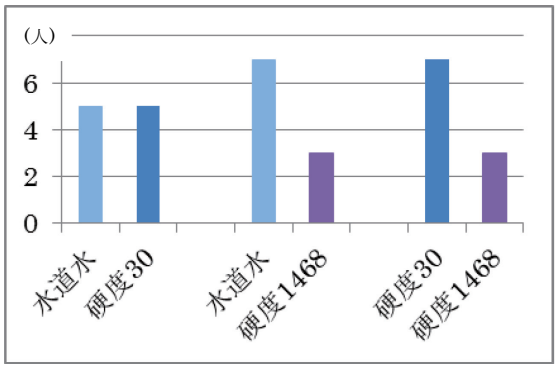
④味見協力者（12 歳～78 歳）に味を比較してもらう。口の中を同じ条件にし、また抹茶の味を引き立たせるため、抹茶を飲む前に同じ落雁を一人一つずつ食べてもらう。

3-1-3　実験結果

3-1-3-1　水道水(硬度 40 度台)、硬度 30、硬度 1468 の比較

水道水と硬度 30 の味見実験では、味にあまり差がないと答えた人が 6 割でどちらがおいしいかの意見もわかれた（グラフ 1)。また、抹茶の泡立ちや泡の細やかさに差はなかった。

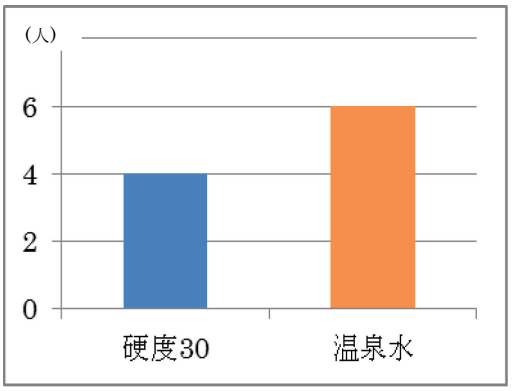
水道水と硬度 1468、硬度 30 と硬度 1468 との比較では 8 割～9 割の人が硬度 1468 の方が苦いと答えた。硬度 1468 のほうがおいしいと答えた人は、普段から苦味を好む人であった（グラフ 1)。硬度 1468 で点てた抹茶は、水道水や硬度 30 で点てた抹茶より泡立ちにくく、泡の大きさが不均一であった。



グラフ 1：水道水、硬度 30、硬度 1468　の味比較

3-1-3-2　硬度 30 と温泉水(硬度 約 150)の比較

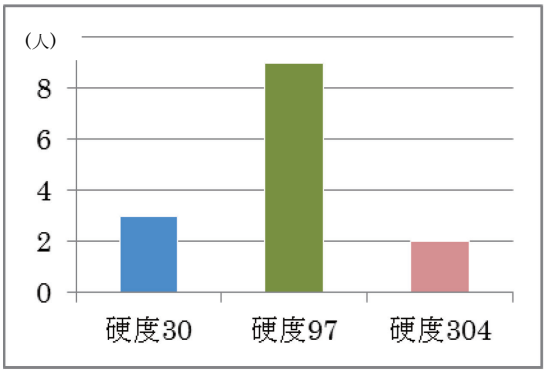
温泉地で見つけた飲泉用の温泉水で抹茶を点てるとどうなるのか、試してみた。温泉水が塩っぽいのでおいしいと感じると答えた人は 10 人中 6 人で、4 人は温泉の独特の匂い、味でおいしくないという意見が出た（グラフ 2)。温泉水は硬度 30 より泡立ちやすく、泡がさらにきめ細かかった。



グラフ 2：硬度 30 と温泉水の味比較

3-1-3-3　硬度 30 と硬度 97、硬度 304 の比較

硬度 30、97、304 の味見実験では、硬度 97 が 1 番おいしいと答えた人が 14 人中 9 人であった（グラフ 3)。その理由に柔らかい茶の味がした、まろやかな味がした、などが挙げられた。また、硬度 304 で点てた抹茶は後味が気になったという意見が多かった。



グラフ 3：硬度 30、硬度 97、硬度 304 の味比較

3-1-4　考察

水道水と硬度 30 でそれぞれ点てた抹茶に差がなかった理由は、奈良県の水道水の硬度は平均 40 台であるため、硬度 30 と硬度が同程度であるからだと考えられた。

温泉水の泡立ちがよかった理由を、硬度によるものではないかと考え、温泉水の硬度を求めることにした。

水の硬度は一般的に以下の方法で産出されている。

硬度(mg/L)＝Ca 量(mg/L)×2.5＋Mg 量(mg/L)×4.1

温泉水の硬度を計算してみると約 150 で、硬度 30 と 1468 の中間の硬度であることより、硬度が高いほど泡立ちが悪くなるわけではないことがわかった。温泉の独特の匂いや味のない、硬度 30 から 1468 の間の硬度の水であれば、泡立ちのよいおいしい抹茶を点てることができるのではと期待される。

そこで 3-1-3-3 の実験では、硬度 97 が一番おいしいと答えた人が多く、また一番泡立ちよく、泡がきめ細やかだった<写真 1>ため、抹茶の泡立ちがよければおいしいと感じる人が多いと推測した。

写真 1：硬度 97 で点てた抹茶

3-2　泡の容積比較

3-2-1　実験仮説

抹茶の泡立ちがおいしさに関連すると考えられるため、硬度 30、97、304、1468 の 4 種類の水で抹茶を点て、泡立ち具合を数値化することにした。硬度 97 で点てた抹茶の泡の容積が一番大きくなると予想した。

3-2-2　実験方法

①抹茶 0.5g にポットで沸騰させ、80 度に設定した水 50ml を入れてそれぞれ、20 秒間、茶筅（百本立）で抹茶を泡立てメスシリンダーに流し入れる。

②直後の泡の容積/全体の容積を測定し、また時間の経過とともに泡の容積/全体の容積を測定して記録する。

3-2-3　実験結果

3-2-3-1　硬度 30、97、304、1468 比較

抹茶を点てたときの印象どおり、硬度 97 が 1 番泡立ちがよく、生成された泡の容積が 1 番大きくなった。次に泡の容積が大きかったのは、硬度 304、硬度 30 の順だった。硬度 1468 では泡立ちが 1 番悪く、生成された泡の容積も 1 番小さくなった<写真 2>

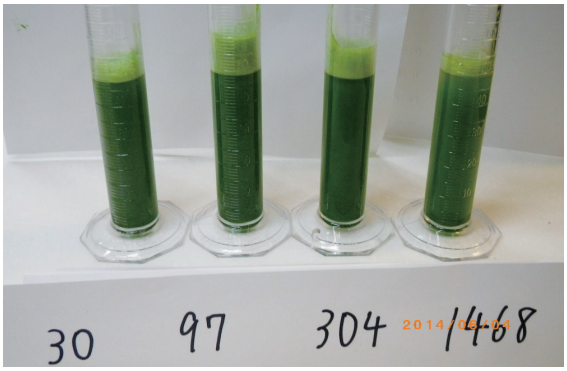
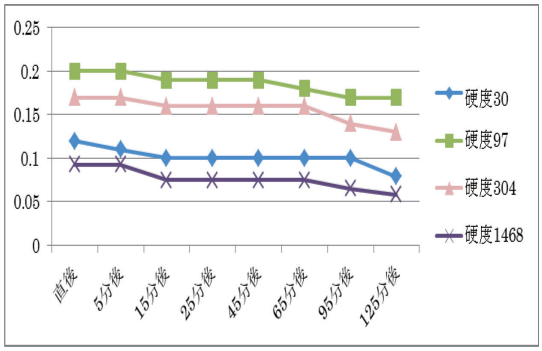


写真 2：メスシリンダーに流し入れた泡立て直後の抹茶

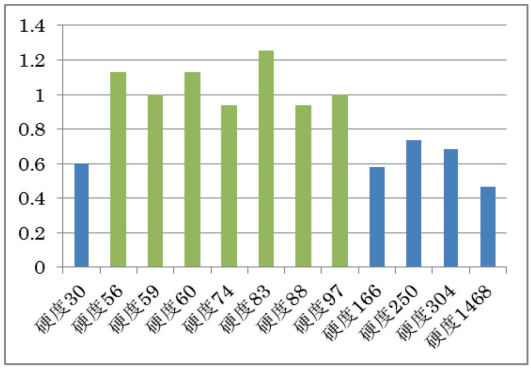
時間が経っても 4 種類とも泡の容積は比較的保たれていた（グラフ 4）。



グラフ 4：泡の容積(ml)/全体の容積(ml)

3-2-3-2　硬度 30～1468 比較

次に他の硬度の水も追加して抹茶を点てて泡の容積を測定した。毎回同時に点てた硬度 97 の抹茶の泡の容積/全体の容積を 1 として比率をグラフに示した（グラフ 5）。硬度 56～97 で点てた抹茶がよく泡立った。



グラフ 5：硬度 97 との比較

3-2-4　実験考察

他の硬度の水に比べて、硬度 56～97 で点てた抹茶の泡立ちがよかったことから、水の硬度が泡立ちに関連していることがわかった。水の硬度を決定する Mg と Ca が抹茶の泡立ちに関与していると考えられた。

3-3　Mg と Ca の最適温度

3-3-1　実験仮説

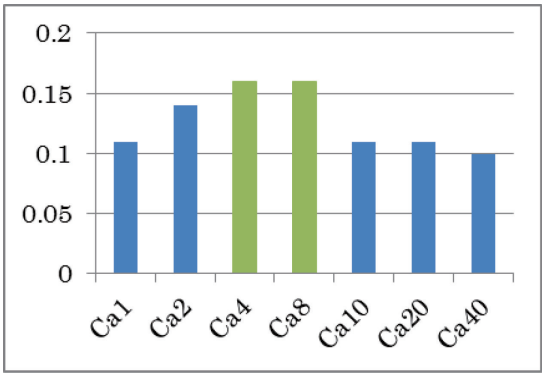
硬度によって抹茶の泡立ちに差があることがわかったので、水の硬度に関係する Mg と Ca が抹茶の泡立ちに影響すると予想した。そこで、実際に純水に Mg と Ca を加えて、調べることにした。

3-3-2　実験方法

①超純水に $MgCl_2 \cdot 6H_2O$ を加え、濃度の異なる水溶液をつくる
（Mg0.25・0.5・1.0・2.0・4.0・8.0 ㎎/100ml）。
②超純水に $CaCl_2 \cdot 2H_2O$ を加え、濃度の異なる水溶液をつくる
（Ca1・2・4・8・10・20・40 ㎎/100ml）。
③抹茶 0.5g にポットで沸騰させ、80 度に設定した水溶液 50ml を入れてそれぞれ、20 秒間、茶筅（百本立）で抹茶を泡立てメスシリンダーに流し入れる。
④直後の泡の容積/全体の容積を測定し、記録する。

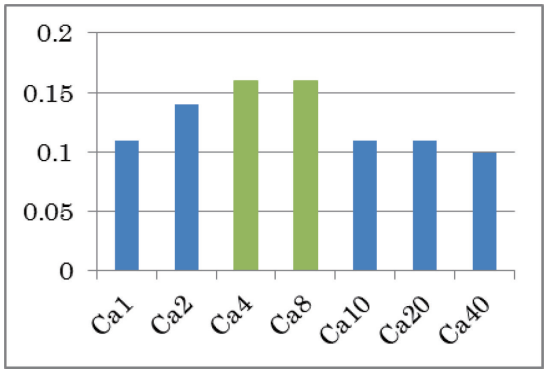
3-3-3　実験結果

抹茶の泡立ちは Mg 濃度によって変化し、1 番泡立ちがよかったのは、Mg2 ㎎/100ml であった（グラフ 6）。



グラフ 6：泡の容積(ml)/全体の容積(ml)

抹茶の泡立ちは Ca 濃度によって変化し、1 番泡立ちがよかったのは、Ca4－8 ㎎/100ml であった（グラフ 7）。

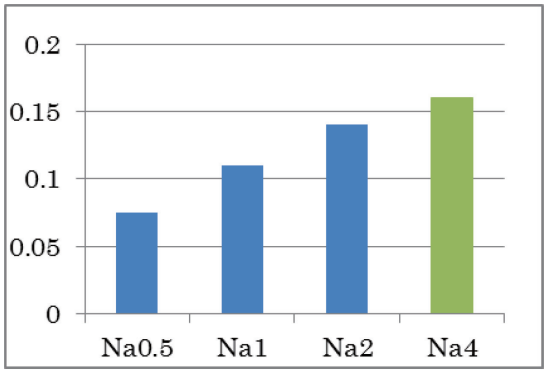


グラフ 7：泡の容積(ml)/全体の容積(ml)

3-3-4　実験考察

Mg 2 ㎎/100ml、Ca 4－8 ㎎/100ml で抹茶の泡の容積/全体の容積が最大であった。このことより、抹茶の泡立ちには、Mg と Ca が適量必要であることがわかった。

Mg・Ca 以外の組成に注目してみると、市販の硬度 59～97 の水は、Na 濃度が 1.1 ㎎/100ml 以上であり、他の硬度の水より高い傾向であった。Na 濃度も抹茶の泡立ちに関与している可能性もあると考えられたため、NaCl を使用して同様に実験した。
その結果、Na 濃度が高ければ高いほど抹茶の泡の容積/全体の容積が大きかった（グラフ 8）。



グラフ 8：泡の容積(ml)/全体の容積(ml)

ただ、Na 濃度に関して、海水(塩分濃度 3.5%)であることを考えると塩っ辛いという味覚の問題があるので上限があると考えられる。

４．考察

今回の実験により、抹茶に使用する水の硬度は、抹茶の味に影響を与えることがわかった。その理由のひとつに水の硬度によって抹茶を点てたときの泡立ちに差があることがあげられる。抹茶の泡立ちには、Mg と Ca が適量必要であり、過剰だと阻害することがわかった。また、Na も濃度に依存して抹茶の泡立ちに関与していることがわかった。

一般的に抹茶の泡立ちに欠かせないものは 3 つある。まず、1 つめは、抹茶茶碗と茶筅である。抹茶を点てる際、茶碗からの適度の反発力を受け、竹製の茶筅が変形しながら泡立ちに有効的に働く。茶碗内面にある凹凸により茶筅の先がはね、この振動が味を損ねずに抹茶を撹拌・溶解する（参考 3）。私は、実際に抹茶茶碗ではない内面が平滑なガラス容器で抹茶を点ててみたが、まったく泡立たなかった＜写真 3＞。

写真 3：ガラス容器で点てた抹茶

※今回のすべての実験は、毎回、同条件にするため同じ抹茶茶碗と茶筅を用いて実験した。

次に石臼で挽いたきめ細かい抹茶である。てん茶（抹茶に挽く前の原茶）を石臼で 10 数μm前後の粒子に挽く。微細に挽くことによって粒子数が増加して泡立ちやすくなる＜参考 4＞。私は、実際にすり鉢・すり棒で粗挽きしたてん茶を点ててみたことがあるがまったく泡立たなかった＜写真 4＞。

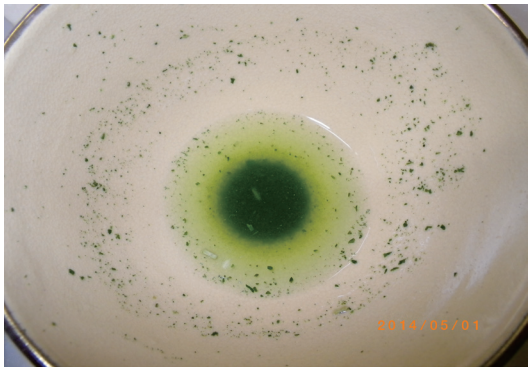


写真 4：泡立たない粗挽きてん茶

※今回のすべての実験は、毎回、同条件にするため同じ抹茶を用いて実験した。

3 つめは、茶葉中のサポニンである。サポニンは、水に混ぜると溶解し、ふり混ぜると石鹸のように泡が立つなどの界面活性作用を示す。石鹸の場合、硬度の高い水であれば、石鹸成分が水の中に含まれている Ca イオンや Mg イオンと反応し、多くの石鹸カスが発生し泡が立ちにくくなる。石鹸カスは水に溶けないため、泡立ちを邪魔することになる＜参考 5＞。今回の実験では硬度 1468 の水では泡立ちが 1 番悪く、生成された泡の容積も 1 番小さくなった。もし、抹茶の場合も同様だと考えれば、硬度が極端に高い水で点てた場合、抹茶のカスが発生し泡が立ちにくくなったと考えられる。また、Na については大豆サポニンが NaCl の添加によって、界面張力を低下させるという報告がある＜参考 6＞。同様に茶葉中のサポニンが NaCl の添加によって抹茶の界面張力を低下させ、液体の中に空気を抱え込むことになり、泡立ちをよくした可能性も考えられる。

次に味について考察する。抹茶の味に大きく影響を与える成分は、主に 3 つある。

1 つめは、アミノ酸のうち、茶葉中のみに含まれるテアニンである。テアニンの味はよく上品な旨みと表現される。抹茶の茶葉はある一定期間黒い覆いをかけて育てられ〈写真 5〉、渋みの成分（タンニン）が少なく、旨み成分（テアニン）の多い、抹茶に適した高級茶葉になる。

写真 5：てん茶の覆下栽培

2 つめは、カフェインで苦味があるが、すっきりした苦味で茶を飲んだあとの爽快感を与えてくれる。

3 つめは、カテキン類でタンニンとして知られており、渋み・苦味の要素とされている。

抹茶の場合、これらの要素をいかにバランスよく引き出すかで味が決まる。茶筅を使うことにより、茶葉の中にある成分の多くが液相の中に抽出される。この時、味に芳しくない不可溶性の物質、タンニンなどは、液から逃れようとして液体の表面に移

動する＜参考 3＞。そのとき、泡は水の表面そのものであるから、きめ細かい泡が多いと抹茶の味を阻害する成分の逃げ場所が増え、抹茶の味がよくなると考えられる。また、このきめ細かい泡の存在により、抹茶の味は非常にまろやかになるため、抹茶の泡立ちがよいとおいしいと感じる人が多いのだと思われる。

また、抹茶の他にも泡を生かした飲み物に注ぐことにより泡立つビールがある。ビールの泡は、ビールが空気に触れて成分が変化して味が落ちるのを防ぎ、炭酸ガスを逃さないようにする蓋の役割がある。抹茶と同様に泡が苦味成分を吸着し、口当たりを柔らかくする効果もある＜参考 7＞。

５．今後の課題

今回の実験から、私は、抹茶(薄茶)を点てるには奈良県の水道水より硬度の高い中程度の軟水、なおかつ、Na 濃度が比較的高いものを選択すればよいという結論を導き出した。

今後は、抹茶の液相部分と泡部分のそれぞれについて成分分析ができれば、液相に抽出された旨み成分や液体表面の泡に抹茶の味を阻害する成分を実際に確認してみたいと思う。

６．参考文献

[1] http://www.marukyu-koyamaen.co.jp/
[2] http://www.evian.co.jp/water/type/04
[3] 茶の湯の科学入門堀内國彦著淡交社
[4] 粒度の異なる抹茶の起泡性と泡沫径　沢村信一ら　2012
[5]http://www.kasoken.com/01kitchen/whippedcream.php、http://www.kao.com/jp/qa/
[6] 大豆サポニンの界面活性　合谷祥一、山野善正　1991 年
[7]http://www.suntory.co.jp/customer/faq /001715.html

７．謝辞

茶道同好会を指導してくださっている熊谷賀代子先生や茶道同好会部員をはじめとする味見実験に協力していただいた方々、学園祭で硬度 97 の水で点てた抹茶をお客様にお出しすることに協力してくださった茶道同好会顧問の金沢節子先生、そしてこの研究・論文作成につき指導していただいた櫻井昭先生にこの場をかりて御礼申し上げます。

猿沢池のアオコの発生を考える

５年Ａ組　狩田帆乃夏
５年Ｃ組　赤木　美穂
指導教員　矢野　幸洋

１．要約

猿沢池(奈良市)のアオコの発生について水質調査および環境データの測定、プランクトンの観察を行った。その結果、猿沢池では藍藻類が恒常的に多く、５月～６月にかけて発生したアオコは藍藻類の増加によるものだと確認できた。

キーワード　プランクトン、アオコ、COD、藍藻類（シアノバクテリア)、クロロフィル

２．研究の背景と目的

猿沢池には古くからの言い伝えである「澄まず、濁らず、出ず、入らず、蛙はわかず、藻は生えず、魚が七分に水三分」という七不思議があり、それを科学的に解明しようと、池の水質を調べることにした。調査を進める中で、春～夏にアオコが発生することがあり、それについて詳しく調べることにした。植物プランクトンの量を数値化するために、クロロフィルの抽出実験を行い、クロロフィル量を求めることにした。また、猿沢池で確認したプランクトンを整理するために、図鑑を作成することにした。

３．仮説

アオコは春から夏にかけての気温、水温の上昇に伴って発生すると考えられる。また,アオコを引き起こす原因となる藍藻類が猿沢池には恒常的に多く、それらが急速に増えることによって引き起こされるのではないかと考えられる。

４．研究内容

実験方法

(1)　環境データの収集とプランクトンの採集・観察

①水の採集

プランクトンネットを使用し、あらかじめ決めた場所で採水ビン１本分の水を採集した。

②環境データの測定

採集した直後に、気温、水温、pH、COD、DO、濁度の値を調べ、記録した。なお、気温、水温、pH の測定はデジタル pH 計を、COD はパックテストを、濁度は濁度計を用いて、計測した。

③遠心分離

持ち帰った水を、30ml 遠心分離管に入れ、遠心分離した。遠心分離管の底に沈殿したプランクトンをピペットで吸い上げ、スライドガラスに　1 滴ドロップし、プレパラートを作成した。

④観察

作成したプレパラートを顕微鏡で観察した。植物プランクトンにおいては、個体数が少ないものはカウントし、多いものはどの種が特に多かったのかを記録した。また、動物プランクトンにおいては、形の残っているもののみカウントし、すべての種について数を数えた。

(2)　クロロフィル抽出実験

採水に行った日に同時にクロロフィルの抽出実験を行った。

①プランクトンのろ過

Ⅰ-(1)と同じ方法で採集した 200ml の水を、ろ過装置でろ過をする。

②90%のアセトンの作製

アセトン 54ml､蒸留水 6ml を混ぜ、濃度 90%のアセトンを 60ml 作製する。

③クロロフィルの抽出

ビーカーに 90%アセトンを入れ、そこに、①のろ紙を下向きになるように入れ、超音波洗浄機で 30℃で 30 秒間洗浄する。

④吸光度の測定

2 本のセルに、③の上澄み液と 90%アセトンを 2/3 ほどずつ入れ、分光光度計で、それぞれ 750nm、663nm、645nm、630nm で吸光度を測定する。

⑤クロロフィル値の計算

上澄み液の測定値からアセトンの測定値を引き(引いたものをそれぞれの波長の測定値とする)、以下の式に数をあてはめて、クロロフィル a、クロロフィル b、クロロフィル c の値を計算する。※参考文献(1)より

Chl.a	(11.64A-2.16B+0.1C)a÷VL
Chl.b	(20.97B-3.94A-3.66C)a÷VL
Chl.c	(54.22C-14.81B-5.53A)a÷VL

・A=663nm の測定値-750nm の測定値
・V=ろ過量=0.2(L)
・B=645nm の測定値-750nm の測定値
・L=セルの長さ＝5(cm)
・C=630nm の測定値-750nm の測定値
・a=溶液の量=50(ml)

３．実験結果

(1)　また水質調査および環境データの結果を表 1 に示す。猿沢池で見られたプランクトンを表 2 にまとめた。

	天気	気温	水温	pH	COD
2012/10/20(土)	晴れ	19.2	19.4	8.58	20
2012/12/19(水)	曇り	9.5	9.3	8.10	13
2013/01/19(土)	晴れ	5.8	5.4	8.48	5
2013/02/26(火)	曇り	4.2	11.6	7.60	5
2013/04/11(木)	曇り	16.2	15.4	8.60	13
2013/04/27(土)	晴れ	18.9	18.0	7.88	20
2013/05/18(土)	晴れ	27.2	29.2	9.80	30
2013/06/01(土)	晴れ	27.6	26.0	10.13	35
2013/06/15(土)	曇り	31.9	30.4	9.03	25
2013/06/29(土)	晴れ	29.5	31.0	8.72	20
2013/07/13(土)	曇り	31.0	29.5	8.20	25
2013/07/25(木)	晴れ	34.4	32.6	9.06	35
2013/08/09(金)	快晴	32.8	32.7	9.37	25
2013/08/28(水)	晴れ	32.2	30.0	9.88	30
2013/09/14(土)	晴れ	29.5	29.3	9.38	20
2013/10/21(月)	晴れ	20.4	20.2	9.83	30
2013/11/07(木)	晴れ	19.3	19.1	9.38	15
2013/11/23(土)	快晴	12.5	11.3	7.90	9
2013/12/20(金)	雪	5.6	4.8	8.03	12
2014/01/11(土)	晴れ	7.5	6.7	7.30	10
2014/02/01(土)	晴れ	14.0	10.5	7.60	10
2014/04/14(月)	晴れ	20.9	19.1	6.85	15
2014/04/26(土)	快晴	25.7	24.0	7.20	20
2014/05/17(土)	晴れ	23.6	22.7	8.71	25
2014/05/30(金)	晴れ	31.5	29.8	9.02	20
2014/07/04(金)	曇り	27.9	27.9	10.07	20
2014/07/18(金)	晴れ	29.5	29.2	9.63	19
2014/08/05(火)	晴れ	34.8	32.0	9.49	19
2014/08/18(月)	晴れ	34.2	32.4	9.84	11
2014/09/02(火)	晴れ	29.4	29.9	9.95	15
2014/09/26(金)	曇り	26.4	26.3	10.03	18
2014/10/18(土)	快晴	19.1	18.7	9.70	20

表 1 環境データの結果

	藍藻						緑藻																	珪藻				鞭毛		
	アナベナ・マクロスポーラ	アナベナ・フロスアクアエ	アナベナ・スピロイデスクラッサ	M．ベーゼンベルギー	M．ノバセッキ	M．イクチオブラーベ	コエラストルム・ミクロポルム	スタウラストルム・セバルデヘ	スタウラストルム．ドルシデンティフェルム	スタウラストルム・アークチスコン	セネデスムス・オポリエンシス	ユードリナ	テトラスポラ・ラクストリス	ヒビミドロ	コスマリウム・ラルフス	クルキゲニア	ディクチスフェリウム	テトラエドロン	ミカヅキモ	キルクネリエラ	サメハダクンショウモ	ヒトヅノクンショウモ（変種）	フタヅノクンショウモ（変種）	アウラコセイラ・アンビグア	A．アンビグア（変種）	ハリケイソウ	ホシガタケイソウ	ケラチウム・ヒルンデヘネラ	ミドリムシ	デヘノブリオン・シリンドリクム
2010/07/13(火)	●	●		○					○																●	●	○	3		
2010/07/21(水)	●			○	○				○														1		●	●	○	3		
2010/08/05(木)	●	○		●	○				○				○												○	●	○			
2010/10/21(木)	○			●	○				○				○												○	○	○			
2010/10/28(木)				○	○																				○	●				
2010/11/04(木)				●	○																				●	●	○	1		
2010/11/25(木)				●	●																				○	●				
2011/02/24(木)																									○	●	○			
2011/05/12(木)	○	○	●	○	○	○							1																	
2011/06/09(木)																														
2011/09/24(木)	○			●	●	●		○			1		○	1	1							1			●	●	○	1		
2011/10/08(土)				●	○																				○					
2011/11/05(土)	○			○																										
2012/03/13(火)				○	○																									●
2012/04/21(土)				●	●				4																●	○	○	12		
2012/05/17(木)	○	○		●	○																				●			2		
2012/06/28(木)	●			●	○				●	1	1		●					1		3					●	●		3		
2012/07/07(土)	◎			●				○	●																●	●	○	2		
2012/07/17(火)	●			◎	○				○		6		○							1			1		●	●	○	1		
2012/10/09(火)				◎	○				3		2		○								1				●	●	○	4		
2012/10/20(土)				●	●				3		2		2	1									1		●	●	●	●		
2012/12/19(水)																														
2013/01/19(土)				○																										
2013/02/26(火)				●	○						1														○	●				
2013/04/11(木)	○			○					○																○	●	○			
2013/04/27(土)	○	○		○			○		○			2													○	○	○	3		
2013/05/18(土)	◎	◎		○	○		○		○																○		○			
2013/06/01(土)	◎	◎	●	○	○		○		○																○	○		2	3	
2013/06/15(土)	●	◎		◎	○																									
2013/06/29(土)	●	●		◎	○		○		○																○	○	○	3		
2013/07/13(土)	○	○		◎	○		○		○																○	○	○	3		
2013/07/25(木)	○	○		◎	○		○		○		○							1		2		○			●	●	○	1		
2013/08/09(金)		○		◎	○		○		○																●	●	○			
2013/08/28(水)				●	○		○		○																●	◎				
2013/09/14(土)				●	○		○		○		○														●	◎				
2013/10/21(月)	○			●	○		○		○		○		○												○	●	○	2		
2013/11/07(木)				●	○		○				2				1										○	○	○			
2013/11/23(土)				○	○		○		○				○								1			○	○	○	○	1		
2013/12/20(金)				○	○				○				○												○	○				
2014/01/11(土)				○																					○					
2014/02/01(土)																														
2014/04/14(月)				○	○																									
2014/04/26(土)				○	○		○				○		○										○							
2014/05/17(土)				●	○		●	●			●		○			○	○		○		○		○		○		○			
2014/05/30(金)		○		●	○		●	○			●		○			○		○		○	●		○		○	○		2		
2014/07/04(金)			●	○	○		○				○								○		○				●		○			
2014/07/18(金)				○	○		○				○		○						○						●	○	○		2	
2014/08/05(火)				○	●				○									○			○				○	○	○			
2014/08/18(月)				○	●		○																		○	○				
2014/09/02(火)		○		○	○		○						○								○		○		●	●				
2014/09/26(金)	○			○	○		○														○				●	○	○			
2014/10/18(土)	○			○	○		○																		●			1		

表２　猿沢池で観察された植物プランクトン

◎：アオコ発生　　●：多く確認される

○：複数確認される　　空欄：確認されず

(2)　クロロフィル抽出実験

クロロフィル a、b、c の抽出結果を表 3 と図 1 にまとめた。また、クロロフィル値と水温 COD の関係を図 2、クロロフィル a と pH の関係を図 3 にまとめた。

表 4 は、それぞれの植物プランクトンがどのクロロフィルを保有しているのかを表したものである。○は保有していることを表す。※参考文献(1)より

表 4 より、クロロフィル a の量が最も大きくなるはずだが、実験では、そのような結果にならなかった場合もあった。

	Chi.a	Chl.b	Chl.c
2012.10.20	5.58	-1.51	1.68
2013.01.19	27.01	-7.15	-7.26
2013.02.26	6.23	1.52	7.31
2013.03.13	9.59	3.47	9.73
2013.04.11	6.20	1.84	5.54
2013.04.27	5.48	1.42	4.35
2013.05.18	6.44	1.32	3.46
2013.06.01	23.60	0.75	2.76
2013.06.15	103.92	3.37	0.95
2013.06.29	32.58	1.77	2.54
2013.07.13	15.30	1.23	1.60
2013.07.25	13.45	2.09	6.16
2013.08.09	25.76	4.10	8.33
2013.08.28	8.77	1.53	3.11
2013.09.14	0.20	-1.64	-5.30
2013.10.21	0.65	0.18	0.93
2013.11.07	5.33	-0.62	-1.68
2013.11.23	4.45	0.19	0.80
2013.12.20	4.67	0.79	1.07
2014.01.11	3.08	0.44	0.72
2014.02.01	3.64	1.01	0.63
2014.04.14	6.34	15.86	20.22
2014.04.26	5.95	4.21	17.51
2014.05.17	12.68	1.54	4.33
2014.05.30	5.88	-0.44	-2.98
2014.07.04	17.78	2.58	3.60
2014.07.18	6.26	1.50	3.20
2014.08.05	10.13	2.74	7.59
2014.08.18	5.77	-1.37	-5.77
2014.09.02	15.89	1.96	3.17
2014.09.26	9.06	-2.12	3.35
2014.10.18	9.34	1.87	5.00

表 3 クロロフィル a,b,c(mg/m^3)

	藍藻	緑藻	珪藻
クロロフィルa	○	○	○
クロロフィルb		○	
クロロフィルc			○

表 4　プランクトンが含むクロロフィルの種類

結果を整理すると次のようになる。

・猿沢池の水質はアルカリ性で、夏ごろ、プランクトンの個体数、水温、COD、Chl.a の値が増加し、冬になると、減少する傾向にある。

・藍藻類や珪藻類は、特定の 2～4 種が大量に見られるが、それに比べ、緑藻類は、確認できた種類数は多いものの、個体数は少なかった。主なプランクトンは「8.追補－猿沢池で観察できたプランクトン類－」に掲載している。

・気温が高くなり Chl.a の量が増えている時期、猿沢池は濁り、緑色が濃くなる。その時、ミクロキスティスやアナベナの仲間など藍藻類が増殖した。

・顕微鏡観察により、藍藻類であるミクロキスティスやアナベナの仲間は、プレパラート全体を覆うことがあり、大量発生することが観察できた（上図）。

・緑藻類の Chl.b 量は、変化が小さく、その量も少ない。また、目視でも圧倒的に緑藻類が少なかった。

・緑藻類と珪藻類のクロロフィル量による差はあまりなかった。

・表 2 には無いが、アオコ発生の前の採集時に普段は見られないはずのミドリムシが確認された。これは今年だけでなく去年にも同じことが確認できている。

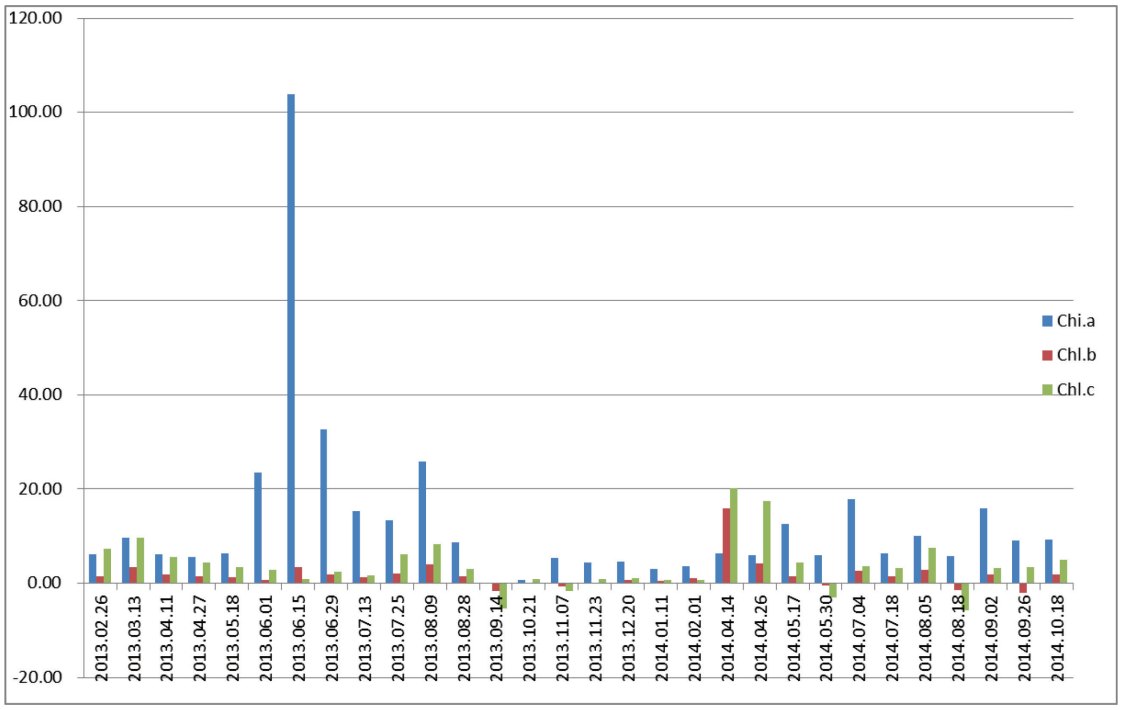


図１　クロロフィル a,b,c(mg/m^3)

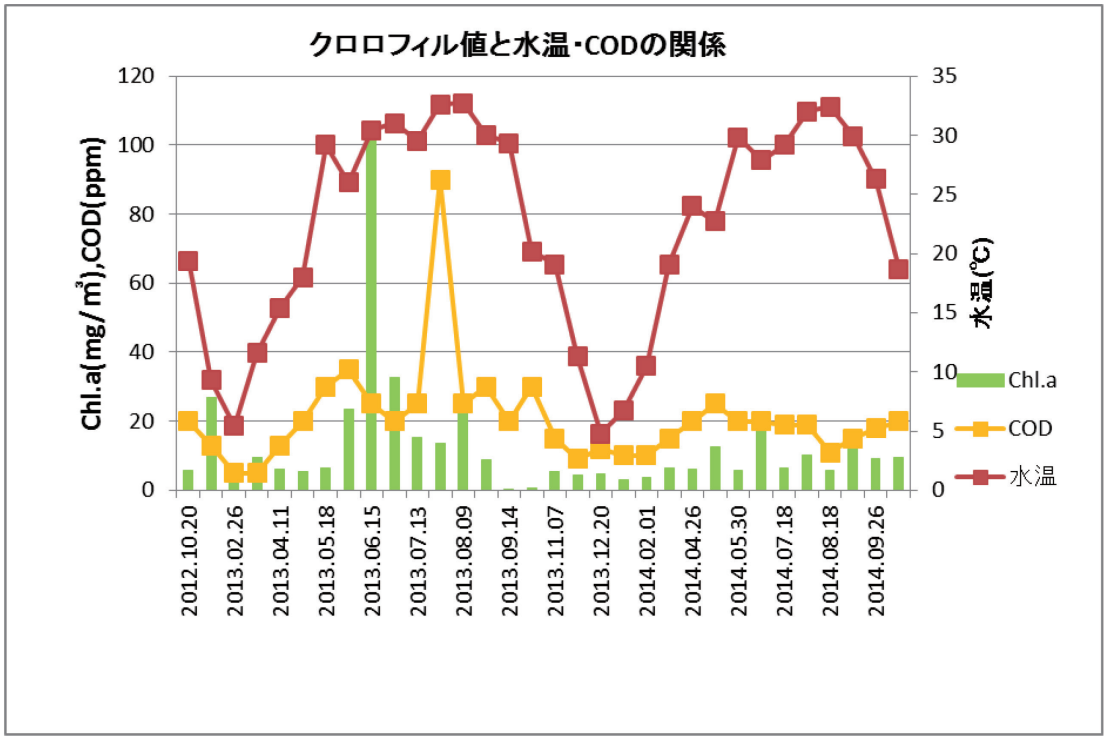


図２　クロロフィル値と水温・COD の関係

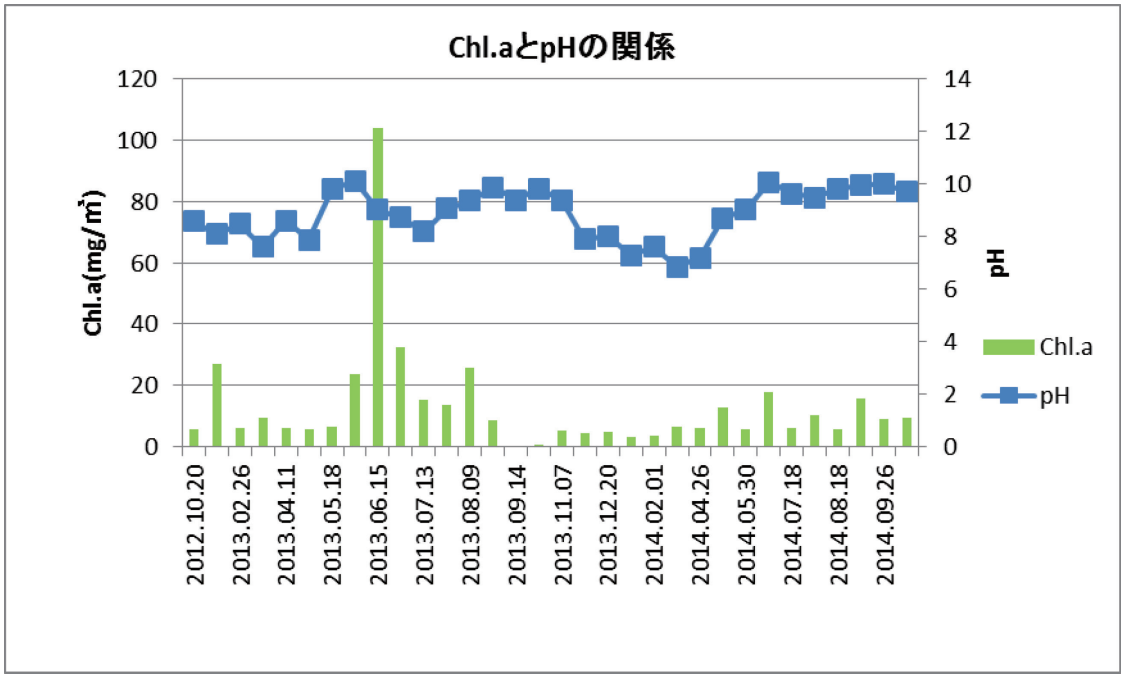


図 3　Chl.a と pH の関係

4．考察

・2014 年 2 月～3 月ごろに池の水を入れ替える作業が行われた。水温や pH には大きな変化は見られなかったが、COD の値が以前よりも低くなっていた。また、緑藻類の種類数と個体数が増加し、アオコの原因となる藍藻類の個体数は減少した。よって、水の入れ替えにより、アオコの発生が軽減されると考えられる。

・猿沢池の水が年間を通してアルカリ性だった。これは、猿沢池には排水溝が一箇所あり、アルカリ性の家庭排水が流れこんでいることによるためだと思われる。図 2 からもわかるように、この水質は pH の値が変化しても、プランクトンの増減にはとくに変化が無かったことから、水質はプランクトンの増減にはあまり影響を与えないと思われる。

・藍藻類や珪藻類は、特定の 2～4 種が大量に見られるが、それに比べ、緑藻類は、確認できた種類数は多いものの、個体数は少ない。それは、猿沢池の水が藍藻類や珪藻類が増殖しやすい水質であるのだと考えられる。また、表 2 より藍藻類と珪藻類は年間を通してよく見られるが、緑藻類は観察できた時期が限られる。よって、藍藻類や珪藻類の方が繁殖力が強い可能性があると考えられる。

・図 2 より気温が上昇し、Chl.a の値が急激に増加しているが、そのとき、猿沢池は濁り、緑色が濃くなった。これはアオコの発生だと考えられる。
アオコは 5 月の半ばから発生し始め 6 月中旬にピークをむかえた。このときクロロフィル b とクロロフィル c の値はあまり変化していない。これは、ク

ロロフィル a はすべての植物プランクトンが保有しているのに対し、クロロフィル b と c はそれぞれ緑藻類、珪藻類が保有していることから、藍藻類が多く増えていることがわかる(表 4 参照)。藍藻類の中でもミクロキスティスとアナベナが多く増殖しており、ミクロキスティスには他のプランクトンには無い繁殖に有利な垂直運動ができるといわれており、光合成をより有利に行い、よく増加したと思われる。

・図 2 より、水温の上昇から少し遅れて Chl.a の値が増加し、また少し遅れて COD の値が増加している。これは、水温の上昇に伴って藍藻類が大量に増殖し、その後死骸となって水中の有機物が増えたためだと考えられる。また、気温が上がるにつれ、水温も上昇し、Chl.a の値が増加したのは、日が出る時間が長くなり植物プランクトンの光合成が活発になることによって増殖したのだと思われる。また、気温が上がると動物プランクトンも増えることから、植物プランクトンを食べる動物プランクトンも増殖したと考えられる。しかし、クロロフィル a の量は増える前とあまり変わらず、藍藻類などは食べられずに残っていると考えられる。

・図 1 より、緑藻類のクロロフィル量について、目視では圧倒的に緑藻類が少ないが、グラフにしてみると、珪藻類との差があまりなかった。これは緑藻類の 1 個体が他の類に比べて大きいものが多いので、全体におけるクロロフィル量が予想以上に多かったためだと考えられる。珪藻類全体のクロロフィル量は変化が小さく、急に増加することがある。

・図 3 より、Chl.a 量の変化と pH の値の変化については特に関係はないと思われる。

・表 2 には無いがアオコ発生の前の採集時に普段は見られないはずのミドリムシが確認された。これは今年だけでなく去年にも同じことが起きた。このことからミドリムシが出現することが、アオコの発生の前兆となるのではないかと考えられる。

５．今後の課題

・藍藻類がもつ窒素固定の能力と大量発生の関係について調べたい。

・クロロフィルの値を正確に計算できるように工夫をしたい。

６．参考文献

[1] 西條八束，三田村緒佐武(1995)「新編湖沼調査法」講談社

[2] 一瀬諭，若林徹哉(2005)「やさしい日本の淡水プランクトン図解ハンドブック」合同出版株式会社

[3] 田中正明(2002)「日本淡水産動植物プランクトン図鑑」名古屋大学出版会

[4] 月井雄二(2010)「淡水微生物図鑑原生生物ビジュアルガイドブック」誠文堂新光社

７．謝辞

今回の研究にあたり、指導してくださった矢野先生、適宜アドバイスをいただいた櫻井先生に深く感謝申し上げます。

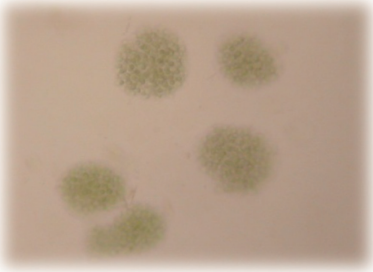
８．追補　ー猿沢池で観察されたプランクトン類ー

2010 年 11 月～2013 年 10 月までに猿沢池で観察されたプランクトンのうち、主な種を示す。
種名の後の★は出現頻度を示し、春夏秋冬は出現季節を示す。なお、写真はすべて筆者が顕微鏡撮影装置を用いて撮影したものである。

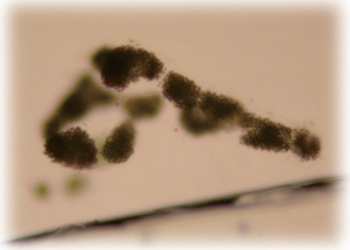
ミクロキスティス属

細胞は球形で、多数の細胞が密集しているのが特徴。まわりが寒天質の透明な膜でつつまれている。その膜が見えにくいものもある。細胞内にガス胞があり、顕微鏡では黒っぽく見える。

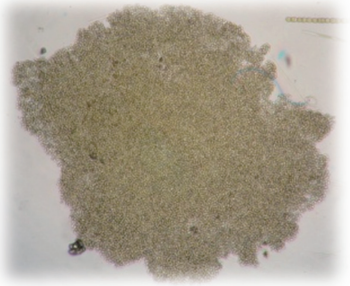
＊ミクロキスティス・ベーゼンベルギー
★★★★★　春夏秋冬
猿沢池で最もよく見られる種類である。
細胞は緑色で、寒天質の膜が顕微鏡ではっきりと観察でき、球状の形をしている。
大量発生するとアオコを引き起こす。



＊ミクロキスティス・ノバセッキ
★★★★★　春夏秋冬
細胞はこげ茶色で、寒天質の膜がはっきりと観察できる。群体は不規則な球状で、群体同士が重なり合うことがある。



＊ミクロキスティス・イクチオブラーベ
★★★☆☆　春夏秋冬
細胞の色は緑っぽい茶色。群体は不定形でスポンジ状、細胞は互いに多少離れて並んでいる。細胞の大きさは 2.5～５マイクロメートル。M・ベーゼンベルギーに似ているが、細胞の大きさがベーゼンベルギーよりも小さい。

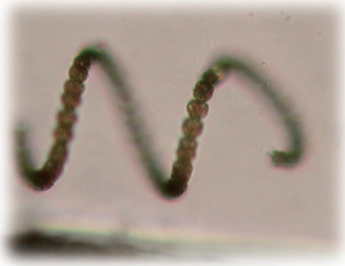


アナベナ属(ネンジュモ)

細胞は球形または樽型で、形は種によってさまざまである。

＊アナベナ　sp.
★★★★☆　春夏秋冬
まっすぐかわずかに湾曲する。細胞は球形か樽型。大量発生するとアオコを引き起こす。

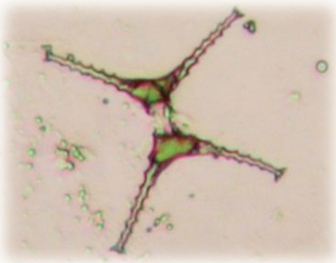
＊アナベナ　sp.
★★★★☆　春夏秋冬
螺旋状にねじれる。細胞は球形。大量発生するとアオコを引き起こす。



スタウラストルム属

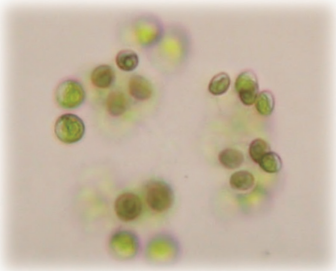
細胞は大きさや形がさまざまで、たくさんの種類がある。

＊スタウラストルム・ドルシデンティフェルム
★★★★☆　春夏秋
猿沢池で観察されるスタウラストルム属の中で最もよく観察できる種類である。突起の先端が枝分かれしているのが特徴である。



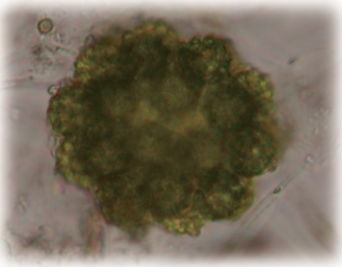
テトラスポラ属(ヨツメモ)

＊テトラスポラ　sp.
★★★☆☆　春夏秋冬
細胞は球形でカップ状の葉緑体をもっている。群体の直径は約 300 マイクロメートル。

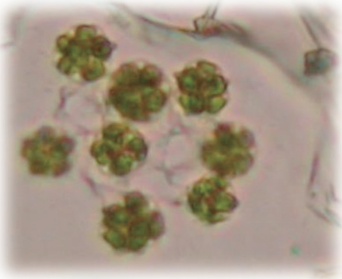


コエラストルム属

＊コエラストルム　sp.
★☆☆☆☆　春夏
細胞が互いに接着してスポンジボールのような群体を作る。細胞は球形か卵形か多角形で、ふつうひとつのかたまりの細胞数は 8 個、16 個、32 個である。



＊コエラストルム・ミクロポルム
★★★☆☆　春夏秋
細胞が互いに接着してできた、複数の小さな細胞が連絡している。

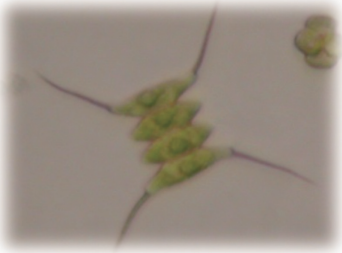


セネデスムス属(イカダモ)

＊セネデスムス　sp.

★★☆☆☆　春夏秋

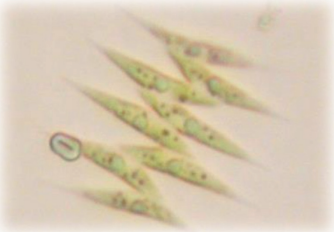
細胞の形は楕円形。4 個または 8 個の細胞が並んだ群体をつくる。



＊セネデスムス　sp.

★☆☆☆☆　春夏秋

細胞の形は三日月形。8 個または 16 個の細胞が並んだ群体をつくる。

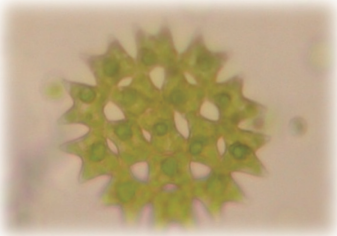


ペディアストルム属(クンショウモ)

＊フタヅノクンショウモ

★☆☆☆☆　春夏秋

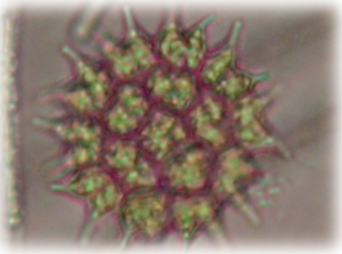
通常 4、8、16、32、64 個の決まった数の細胞が、一平面上に放射状に並び、群体をつくる。二つの角があり、細胞間に隙間がある。細胞の長さは 12～25 マイクロメートル。



＊サメハダクンショウモ

★☆☆☆☆　夏秋

二つの角があり、細胞間の隙間がほとんど無い。また、細胞の表面にはぶつぶつがある。



アウラコセイラ属

＊アウラコセイラ　sp.

★★★★★　春夏秋冬

体は丸い筒状。まっすぐな個体や、規則正しい螺旋状に巻いている個体がある。

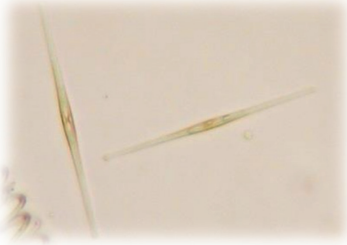
猿沢池では、螺旋状の個体が多く見られる。

シネドラ属(ハリケイソウ)

＊シネドラ　sp.

★★★★★　春夏秋冬

多くは単独で生活している。細長くて両端が針形になっている。大量発生することがある。



アストリオネラ属(ホシガタケイソウ)

＊アストリオネラ　sp.

★★★★☆　春夏秋冬

普通は、複数の細胞のひとつの端がくっついて星型になっていることが多い。

ケラチウム属(ツノモ)

＊ケラチウム　sp.

★★★☆☆　春夏秋冬

単細胞性で細胞の周りの殻に数本の突起がある。突起は細胞の一方に 1 本、反対側に 2,3 本ある。

ユーグレナ属(ミドリムシ)

＊ユーグレナ　sp.

★★☆☆☆　春夏秋

細胞は細長いものから球形のものまで様々である。

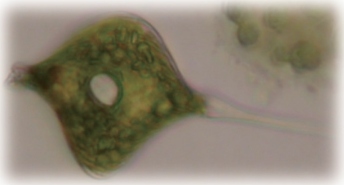
ファッカス属のなかま(ウチワヒゲムシ)

＊フォッカス　sp.

★★☆☆☆　春夏秋

細胞は主に菱形や卵円形である。

体がねじれた形の個体もある。



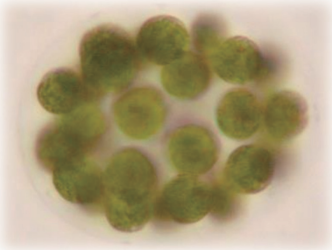
ユードリナ属(タマヒゲマワリ)

＊ユードリナ　sp.

★☆☆☆☆　春夏秋

細胞は球形。球状の群体を形成する。

群体は、寒天質の膜につつまれている。



ダフィニア属(ミジンコ)

＊ケンミジンコ

★★★☆☆　春夏秋冬

猿沢池で観察されるミジンコのうち、最もよく見られる種類である。季節に関係なく大量発生する。春先、体の周りにクロレラが付着していることがある。

プラナリアの集合性について

4年B組　米田　英里奈
指導教員　矢野　幸洋

１．要約

学校で飼育されているプラナリアは、円柱の容器の壁に集まっていることが多い。そこで、プラナリアが好む場所を調べ、プラナリアの集合性について研究を行った。その結果、プラナリアが一か所に集合するには温度との関係が深いと考えられた。

キーワード　　プラナリア、温度、集合性

２．研究の背景と目的

著しい再生能力を持つプラナリアは、日本中の川の上流に生育しており、石や枯葉などの裏に貼りついている。

プラナリアの集合性に対して、フェロモンのような何らかの物質が重要だという意見もあるが、詳しくは述べられていない。

我が校で飼育されているプラナリアは、円柱の容器の壁に集まっていることが多い。そこで、プラナリアが好む場所を調べ、プラナリアの集合性について研究したいと思った。

３．実験方法

次の方法で実験を行った。

(1)　プラナリアの飼育環境

プラナリアは円柱の容器に入れ、設定温度 18℃で内部に光が入らないようにした暗いインキュベーター内で飼育した。水は汲み置き水を使い、餌は鶏レバーを２週間に１度与え、その都度水替えを行った。

(2)　実験

これまでに実験は６回行った。

①実験１

・目的

温度が一定のもとで、条件を変えて集合性を調べる。

・方法

α…ビーカーと円柱の容器を使用して、容器の大きさを変える

β…プラナリアを 15 匹と 30 匹に分け、別々の容器に入れ、個体数を変える

γ…黒いビニール袋を使い、容器の右半分の光を遮断し、明るさを変える

δ…容器を左右に動かしたり、回したりして容器の揺らし方を変える

以上の方法で実験し、1 時間後プラナリアの様子を観察した。

②実験２

・目的

温度を変える場合と密度を変える場合でどちらが集合性を起こしやすいかを調べる。

・方法

α…容器を２つ用意し、それぞれ設定温度が 15℃、32℃のインキュベーターに入れ温度を変える

β…プラナリアを 15 匹と 130 匹に分け、別々の容器に入れ、個体数を変える

以上の方法で実験し、1 時間後プラナリアの様子を観察した。

③実験３

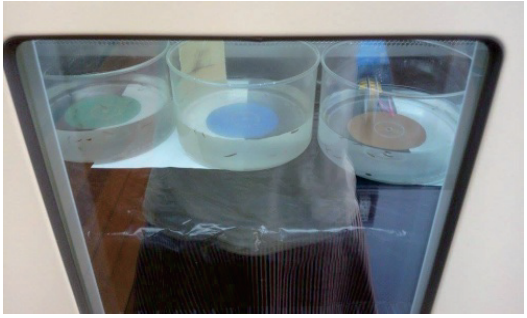
・目的

色の変化と集合性について、折り紙を用いて調べる

・方法

容器の底にそれぞれ黒、白、青、緑、黄、茶の折り紙を切って容器の中心に敷き、容器の底の色を変える（下図）。

１時間後プラナリアの様子を観察した。



④実験４

・目的

光の波長と集合性について調べる

・方法

容器にそれぞれ赤外光、紫外光、白色光の光を当て、光の波長を変える

１時間後プラナリアの様子を観察した。

⑤実験５

・目的

色の変化と集合性についてフィルムを用いて調べる

・方法

容器にそれぞれ赤、黄、紫のフィルムをかぶせ、容器の内部の色を変える（下図）。

１時間後プラナリアの様子を観察した。

⑥実験６

・目的

温度の変化と集合性について調べる

・方法

50℃のお湯に容器ごと入れ、湯煎して容器の水温を 10 分間で 20℃～35℃まで上げ、容器の温度を変える

１時間後プラナリアの様子を観察した。

４．実験結果

①実験１の結果

α、β、γ、δのすべての条件で、プラナリアが容器の壁、底に集合した（下図）。

その原因は、7 月下旬の室温 32℃の暑い環境で実験を行ったため、または容器の底の黒色に集合したためと考えられる。

②実験２の結果

α、βのどの条件でもプラナリアは実験１のようにはっきりとは集まらなかった。

③実験３の結果

・容器の底に黒の折り紙を敷いた場合は、底が黒色に集合したように見えた。

・容器の底にそれぞれ白、緑、黄、茶の折り紙を敷いた場合は、プラナリアはどの色にもとどまらなかった。

・容器の底に青の折り紙を敷いた場合は、底が青色を避けていたように見えた。

④実験４の結果

どの条件のプラナリアも集まらなかった

⑤実験５の結果

どの条件のプラナリアも集まらなかった。

⑥実験６の結果

どの条件のプラナリアも集まらなかった。

また、水温が上昇すると活発に動き出し、32℃付近で分裂を始めることがわかった。

実験 1～実験 6 の結果をまとめると以下の表のようになる。

実験	条件	結果
１α	容器の大きさ	容器の壁、底に集合した
β	個体数	容器の壁、底に集合した
γ	光の有無	容器の壁、底に集合した
δ	容器の揺らし方	容器の壁、底に集合した
２α	温度	はっきりとは集まらなかった
β	個体数	はっきりとは集まらなかった
3	容器の底の色	はっきりとは集まらなかった
4	光の波長	集まらなかった
5	容器の内部の色	集まらなかった
6	温度	集まらなかった

５．考察

実験 1、3、5 よりプラナリアの集合性と容器の大きさ、密度、光、容器の揺らし方、色との関係性はあまりないと考えられる。

実験 2 から黒色に集合すると仮定して、実験 3 と 5 を行ったが、実験 3、5 では結果 1 の時ほどはっきりとした結果は得られなかった。よって、プラナリアは色を見分けて集合していない。

また、実験 6 よりプラナリアは温度の変化によって動き方が変わるので、実験 1 の結果のようにプラナリアが一か所に集合するには、温度との関係が深いと考えられる。

６．今後の課題

今回は実験回数も少なく、また結果が表れにくい研究だったため、実験結果からわかったことや科学的な根拠、理由を得られなかった。そのため、次は少し観点を変え、違う形でこの分野の研究を進めていきたい。そして、科学的な根拠、理由などをつきとめていきたい。

そのために、文献や先生からご指導を受け、これからの研究を考えたいと思う。

７．謝辞

今回の研究にあたり、指導してくださいました矢野先生に、深く感謝申し上げます。

平成26年度
スーパーサイエンスハイスクール
サイエンス研究会研究論文集

平成27年(2015年) 3月1日　発行

国立大学法人 奈良女子大学附属中等教育学校
〒630-8305　奈良市東紀寺町1丁目60-1
TEL. 0742-26-2571
FAX 0742-20-3660
http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/