

平成 27 年度
SSH サイエンス研究会
生徒研究論文集



世界の学び:ベトナム国家大学ハノイ自然科学大学附属英才高校(数学の授業風景)

SUPER SCIENCE HIGHSCHOOL SCIENCE LABORATORY
NARA WOMEN'S UNIVERSITY SECONDARY SCHOOL

2015年度
スーパーサイエンスハイスクール

サイエンス研究会

研究論文集

奈良女子大学附属中等教育学校

2016 年 3 月 1 日

本校は、平成 17 年度に SSH のⅠ期 5 年間、平成 22 年度にⅡ期 5 年間、平成 27 年度にⅢ期 5 年間の指定を受けました。現在 11 年目の活動をスタートしたばかりです。

本校の SSH は中高完全一貫教育という特色を生かしつつ回を重ねるごとに深化してまいりました。理数教育のカリキュラム開発、生徒全員の数学的・科学的リテラシーの育成、リベラルアーツの涵養、そしてⅢ期では、「共創力」を育成向上する人物像でのキーワードとし、他分野融合研究を進める、異文化・分野間の議論を行う機会を設ける、さらに科学的態度や姿勢を身につけることを目指してサイエンス研究会を対象とした活動プログラム、「イノベーター・キャンプ」を試みております。

本論文集は、サイエンス研究会の生徒の日ごろの研究成果をまとめたものです。全校で約 100 名が所属するサイエンス研究会の生徒のテーマ選択と研究は、本校が大事にしている校是の通り「自由に、自主的に、自立して」行っています。中高一貫教育の 6 年間を通じて、下級生は上級生の姿にあこがれ真似をすることから始め、上級生は下級生を指導しながら成長していく過程を踏みます。生徒たちを指導する教員もまた、生徒の自由な研究を尊重し、時には指導し、時には壁となり、時には生徒に教えられながらお互いに成長しております。

身近なことを不思議だな、何故だろうと思うことから研究は始まります。始まりは些細なことであっても、粘り強く挑戦することで思いがけない結果に遭遇することもあります。一方で、どんなに素晴らしく思えるテーマであっても、簡単にあきらめてしまつては、成果を見ることはできませんし、そのテーマが「自由に、自主的に、自立して」に即して選ばれ、行われていなければ、はたから見ただとえどんなに素晴らしい成果で合つてとしても、それは私たちが求めている姿ではありません。あくまで、「自由に、自主的に、自立して」に各自がうまずたゆまず行っていくことを大事にしたいと思います。そうすれば、生徒であっても、「世界中で自分しか知らない自然の秘密の一端」を手に入れる瞬間をけいけいすることができます。また、研究においては「努力は報われないことの方が多い」、「努力は裏切られることもある」という現実も痛切に感じることができます。誤解されていることが多いのですが、サイエンスは正誤判定機のように YES と NO のどちらかをはっきりさせてくれるものではありません。場合によってはカフェオレのように両方混ぜるようなことが必要になる、極めて人間的な活動であります。このような活動を自主的に行うこと通して、人類が築き上げてきた「サイエンス」の本質に在学中に触れることは、今後どのような分野に進路を決めるにしても大いに生徒の背中を押してくれることと思います。

生徒の研究の成果の一部は、毎年のように外部からも高く評価されております。2015 年度は、8 月に大阪で行われた「SSH 全国生徒研究発表会」では本校 5 年の松井絵莉子さんが発表した『抹茶の科学』が「科学技術振興機構理事長賞」を受賞しました。昨年度の上田樹君に続き、2 年連続受賞となりました。本活動は受賞を目標としたものではありませんが、自分の好きな茶道での疑問をサイエンス研究会で科学的な面から研究した成果が高い評価を受けたことは、他のユニークで手ごわいテーマに取り組んでいる後輩たちの大きな励みになってくれると思います。これらの研究が少しでも花開くことを切に期待しています。

2015年度(平成27年度) 教育課程

学年 時間	1年	2年	3年	4年	5年		6年												
	共通	共通	共通	共通	文系	理系	文系	理系											
1	国語基礎(4)	国語基礎(3)	国語総合(4)	国語総合(5)	現代文(2)		現代文(2)												
2																			
3		情報と表現(1)			古典(2)		古典(2)												
4																			
5	社会(3) 地理の分野	社会(3) 歴史の分野	現代社会Ⅰ(2)	現代社会Ⅱ(2)	古典講読(1)		日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) *(3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)											
6			現代史Ⅰ(2)		日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) *(3)	日本史B(3) 世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)	古典講読(1)												
7																			
8	数学基礎Ⅰ(4) 代数分野 幾何分野	数学基礎Ⅱ(5) 代数分野 幾何分野	数学探究ⅠA(3)	現代史Ⅱ(2)	世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) *(3)	物理(3) 生物(3) *(3)	世界史B(3) 地理B(3) 倫理・政経(3) △(0)or(3)	化学(4) 物理(4) 生物(4) *(4)or(8)											
9				数学探究ⅡA(3)															
10																			
11																			
12	情報と科学(1)		数学探究ⅠB(2)	数学探究ⅡB(2)	化学基礎(2)	化学基礎(2) 化学(2)	日本史特講(2) 世界史特講(2) 地理特講(2) △(0)or(2)												
13	理科基礎Ⅰ(4)	理科基礎Ⅱ(4)	自然探究Ⅰ(3)		地学基礎(2) 音楽Ⅱ(2) 美術Ⅱ(2) △(0)or(2)		化学演習(2) 地学演習(2) △(0)or(2)												
14																			
15						自然探究Ⅱ 物理基礎(2) 生物基礎(2) (4)													
16																			
17	音楽(2)	音楽(2)	音楽Ⅰ(2) 美術Ⅰ(2) 書道Ⅰ(2) 工芸Ⅰ(2) *(2)		解析Ⅰ(4)	解析Ⅰ(4)	物理演習(2) 生物演習(2) △(0)or(2)	解析Ⅱ(5) △(0)or(5)											
18											数学演習Ⅰ・Ⅱ(2) △(0)or(1)or(2)								
19	美術(2)	美術(2)	技術総合・ 家庭総合(2)	音楽Ⅰ(2) 美術Ⅰ(2) 書道Ⅰ(2) 工芸Ⅰ(2) *(2)	代数・幾何(3) △(0)or(3)	代数・幾何(3)	数学特講(2) 音楽Ⅲ(2)美術Ⅲ(2) 大学教養特講(1) △(0)or(1)or(2)	解析Ⅱ特講(2) △(0)or(2)											
20										現代文特講(2) △(0)or(2)									
21	工創基礎Ⅰ 生活基礎Ⅰ (2)	工創基礎Ⅱ 生活基礎Ⅱ (2)	体育(3)	家庭総合(2)	Reading(2) △(0)or(2)		Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特講(2) △(0)or(2)											
22	体育(3)	体育(2)							保健(1)	体育(2)	体育(3)	体育(3)							
23																			
24			Introductory EnglishⅠ(3)	Introductory EnglishⅡ(3)					Topic StudiesⅠ (2) Reading	Topic StudiesⅡ(3) Reading	Topic StudiesⅢ(3)		Topic StudiesⅣ(3)						
25	保健(1)	Topic StudiesⅠ (1) Writing			Topic StudiesⅡ(3) Reading	Topic StudiesⅢ(3)													
26	保健(1)							BasicEnglishⅢ(1)	Topic StudiesⅡ(1) Writing					Topic StudiesⅢ(3)					
27																			
28	BasicEnglishⅠ(1)	BasicEnglishⅡ(1)	Topic StudiesⅠ (1) Speaking	Topic StudiesⅡ(1) Speaking	Writing(1)		Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特講(2) △(0)or(2)											
29	Introductory EnglishⅠ(1) Speaking	Introductory EnglishⅡ(1) Speaking	情報の科学(1)	情報の科学(1)	Writing(1)		Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特講(2) △(0)or(2)											
30	道徳(1)	道徳(1)	探究・世界Ⅰ(2)	情報の科学(1)	Writing(1)		Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特講(2) △(0)or(2)											
31	HR(1)	HR(1)			探究・世界Ⅱ(2)	情報の科学(1)	Writing(1)		Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特講(2) △(0)or(2)									
32	道徳(1)	HR(1)	HR(1)	HR(1)			Writing(1)		Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特講(2) △(0)or(2)									
33					道徳(1)	HR(1)	HR(1)	Writing(1)		Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特講(2) △(0)or(2)								
34											Writing(1)		Reading(2) △(0)or(2)	理科特講(2) 数学特講(2) △(0)or(2)					
短期集中	探究・奈良Ⅰ(1)	探究・奈良Ⅱ(1)	CGⅠ(1)	AG(1)	AG(1)		AG(1) △(0)or(1)												
				テーマ研究(1) △(0)or(1)	テーマ研究(1) △(0)or(1)		テーマ研究(1) △(0)or(1)												

※点線: 評価は区別せずに行う部分

* 必修選択 △自由選択

共創力を備えた科学技術イノベーターを育成 するためのカリキュラム開発



卒業生追跡調査

更なる活動の充実へ

サイエンス 研究会

数学・物理・化学・生物・地学

イノベーターキャンプ

異分野を横断する課題解決型特別プログラム

例 エネルギー・気候変動・防災
環境・福祉・生物多様性

科学技術イノベーターの育成

多分野融合研究において、自ら課題やプロジェクトを設定し、多様な他者を組織して、新たな研究領域を切り開いていく能力を持ったリーダー

研究ノート of 作成・検証

体系的な指導システムの
確立を目指して

国際交流連携校

ISSS (共同研究)

地球規模の課題
多様な価値観
国際的競争力

公州大学校 & 英才教育院
忠南科学高校 (韓国)

国立中山大学附属国光高級中学
高雄女子高級中学校 (台湾)

Regent, Yishun Town Secondary School
Nan Chiau High School (シンガポール)

「共創力」を育む6年一貫カリキュラム

科学的思考力、幅広い視野と高い科学観・自然観を背景に、課題の解決や新たな価値や概念を創り出すために協働するとともに、主体的に判断し、主張・行動できる能力

奈良女子大学

理系女性教育開発共同機構
中等教育改革プロジェクト
高大連携・接続研究

授業内容の高度化 (理科・数学科・情報科)

探究活動の深化

(総合的な学習・学校設定科目)

先進的な視野の育成

リベラルアーツの育成

理数の専門教科
科学観・自然観の涵養
高度な専門性

Science Issues サイエンス・イシューズ

教科横断型の課題
異教科の連携授業

数学探究Ⅰ・Ⅱ
自然探究Ⅰ・Ⅱ
数学的活動の重視
問題解決能力の育成

5・6
年

3・4
年

1・2
年

SS 課題研究 コロキウム

培われた自然科学観から
現代的課題を研究する
観の形成
大学教員・研究者との連携

課題研究 世界Ⅰ・Ⅱ
世界的な自然科学の課題
を地域の視点から探求する

視点の往還
グローバル⇔ローカル
ESD

協働型研究(発展期)

協働型探究(充実期)

「研究ノート」
を使用した
研究指導

基礎・基本の徹底

数学基礎Ⅰ・Ⅱ
理科基礎Ⅰ・Ⅱ
観察・実験の重視
数学化サイクルの重視

テクノロジーの活用

自然科学リテラシーの育成

課題研究 寧楽Ⅰ・Ⅱ

地域の素材の中から
自然科学を学ぶ

世界遺産学習
統計処理
プレゼンテーション

協働型学習(基礎期)

日韓合同
サイエンスキャンプ
(英語による共同実験)

奈良女子大学
奈良教育大学
奈良県立医科大学
京都大学
同志社大学 理工学部
ATR 国際電気通信基礎
技術研究所
NAIST 奈良先端科学
技術大学院大学

連携大学・研究所

自然科学に関する基本的な知識と技能を持ち、科学的根拠に基づいて
判断・主張・行動ができる、21世紀に必要とされる教養を備えた市民の育成

研 究 論 文

豆電球の電力と明るさの関係

2年A組 加藤 大翔

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は豆電球の明るさは何によって決定するのかを調べている。そのための予備実験として、今回は、定格電圧の異なる 4 種類の豆電球を使用し、電流、電圧、電力と明るさを測定した。これらのデータに基づき、それぞれの豆電球の利点を考察した。

キーワード 豆電球、電流、電圧、電力、明るさ、関数

2. 研究の背景と目的

普段使用している豆電球は定格電圧によって様々な種類がある。効率よく豆電球を使用するために、同じ明るさでより少ない消費電力で済む、状況に応じた豆電球の使い方を考えた。そこで照度計を用いて次の研究内容で示す実験を行った。

照度計は、デジタルマルチメーター(MASTECH MS8229)を用いた。

3. 研究内容

豆電球の電流、電圧、電力と明るさの関係を調べるために図 1 のような装置を組んで実験を行った。内側に黒い布で覆った箱の中に電源装置、電流計、電圧計、豆電球をつなぎ、豆電球から 25mm のところに照度計を置く。なお、照度計は単位面積が受ける光束の量を表す照度を測定する装置であり、Lux という単位で表記する。

実験には定格電圧が 1.5V、2.5V、3.8V、6.3V の 4 種類の豆電球を使用した。実験を行う箱の中を 0Lux という環境に作り出すのは困難なため、5Lux の環境にした。

豆電球に流す電流を徐々に強くしていき、1005Lux までは 100Lux ずつ、それ以降は 500Lux ずつ明るくしながら、それぞれの電流と電圧を測定し、電力を計算した。

また、それぞれの豆電球が切れるまで電流を強くし続け、つくり出すことのできる明るさの限界を測定し、それぞれの利点を調べた。

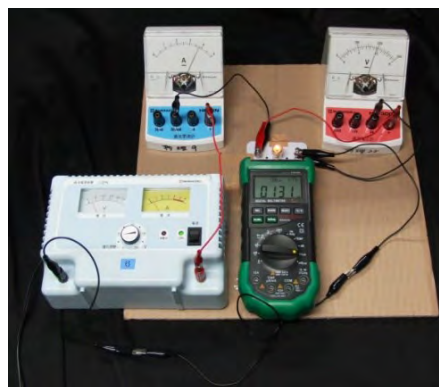


図 1 測定装置

<電力と明るさの関係>

豆電球には定格電圧があるため、定格電圧が高いほど電力を消費すると予想し、実験を行った。また、それぞれ測定した 1 回

目と 2 回目は異なる豆電球を使用した。図 2 はその関係をグラフに表したもので、例えば 1.5V の 1 回目の測定を「1.5V-1」、2 回目の測定を「1.5V-2」とグラフ横に表記した。

その結果、次のことがわかる。

- ・図 2 は、いずれも右上がりのなめらかな曲線である。
- ・同じ明るさを得るために必要な消費電力は、1.5V、2.5V、6.3V、3.8V の順に大きくなる。
- ・豆電球がつくり出すことのできる明るさ

の最大値は、1.5V、2.5V、3.8V、6.3V の順に大きくなる。

- ・実験では、それぞれの豆電球がつくり出すことのできる明るさの限界に近づくほど、照度計に示される Lux の値が変動して不安定になり、毎回の実験で多少の誤差が発生した。

以上より、同じ明るさを得るために必要な電力は、定格電圧が高いほど大きくなるという予想は誤っていることがわかった。

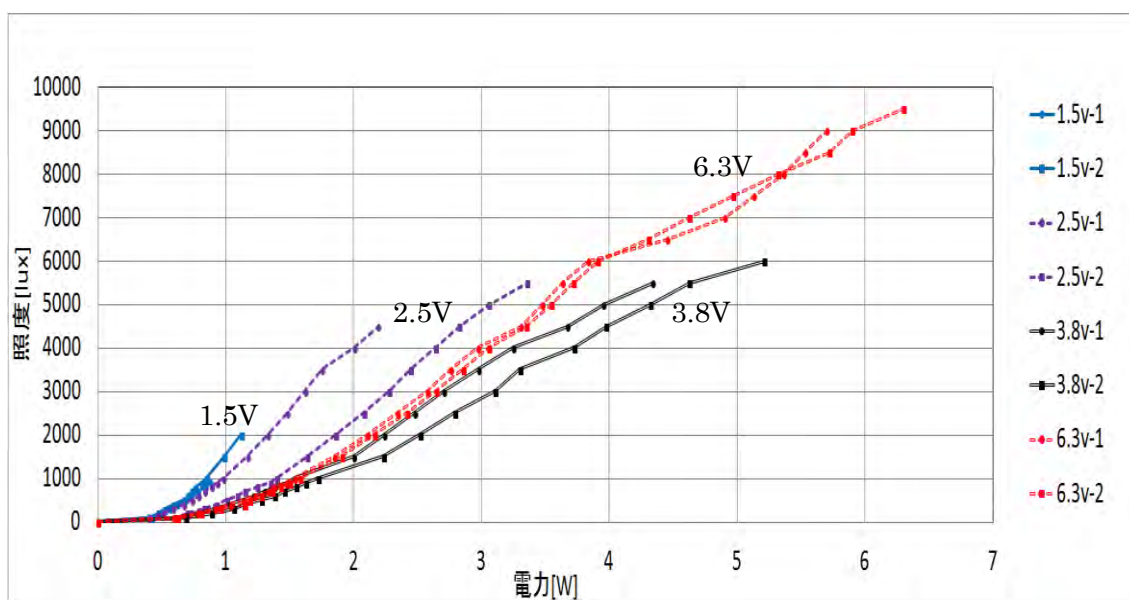


図 2 電力と明るさの関係

<電圧と明るさの関係>

次に、電圧と明るさの関係について調べた。こちらも同様に定格電圧が高いほど、同じ明るさを得るのに必要な豆電球の電圧は高いと予想した。図 3 はその関係をグラフに表したものである。

このグラフから次のことがわかる。

- ・電力と明るさのグラフと同様にいずれも右上がりのなめらかな曲線である。
- ・同じ明るさを得るために必要な電圧は 1.5V、2.5V、3.8V、6.3V の順に高くなった。よって、定格電圧が高いほど豆電球の電圧が高いという予想は正しかった。

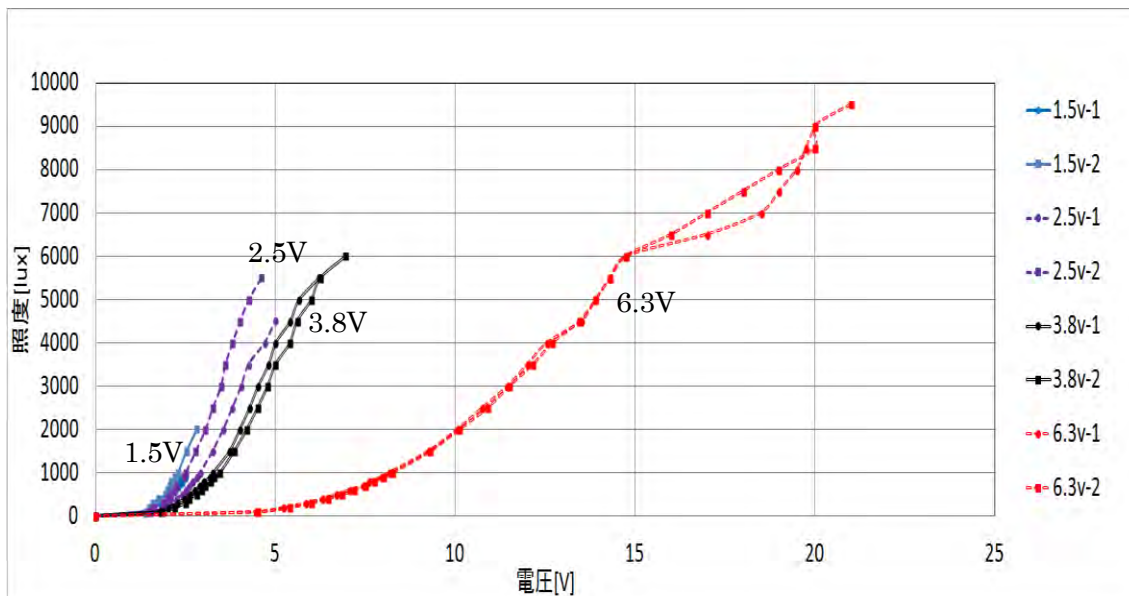


図3 電圧と明るさの関係

<電力の2乗と明るさの関係>

電力と明るさの関係のグラフ（図2）に注目すると、放物線のように見える。そこで、電力の2乗と明るさの関係は直線のグラフになると予想し、図4のグラフをつくってみた。横軸が電力の2乗である。

このグラフから次のことがわかる。

- ・電力や電圧のグラフより緩やかな曲線になっている。
- ・グラフは直線になっていない。

よって、直線のグラフになるという予想は誤っていた。

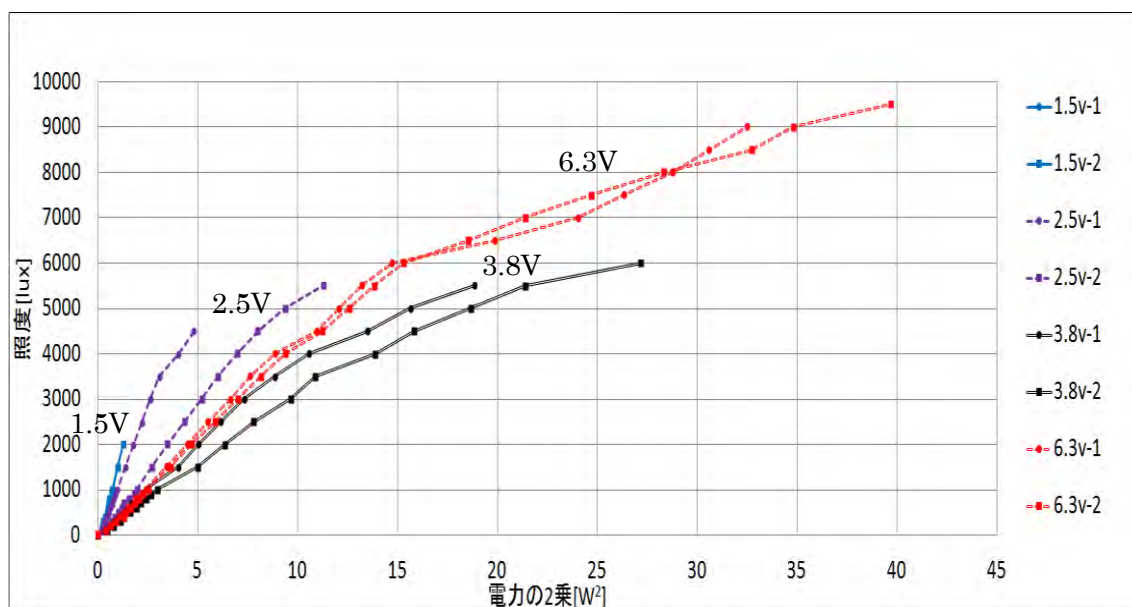


図4 電力の2乗と明るさの関係

4. 考察

この実験を通して、明るさと消費電力の2つの観点で考えると、一般に定格電圧が2.5Vの豆電球を使うのが最も効率がよいと分かった。また、少ない明るさでよいならば消費電力の少ない1.5Vの豆電球がよく、強い明るさを必要とするならば6.3Vの豆電球を使うのがよいとわかった。

しかし、3.8Vの豆電球の必要性はわからなかった。また、電力と明るさについては今回、規則性を明確に知ることはできなかった。

5. 今後の課題

今回の結果から、3.8Vの豆電球の必要性が見られなかったため、今後の実験を通して解明していきたい。また、電力と明るさの関係については累乗を変えるなど、直線のグラフになるまでの過程を考えていきたい。各豆電球について、明るさの限界に近づくと、明るさの値が不安定になるのはなぜかを考えていきたい。

6. 謝辞

今回の研究にあたり、多大なご指導を賜った顧問の米田先生に、深く感謝申し上げます。

あなたの毎日をサポートするヘルスケア腕時計

3年C組 熊谷 充弘

指導教員 米田 隆恒

1. 要約

あまり言いたくないことだが、私は授業中、何度も睡魔に襲われる。授業で寝てしまうと、その日の授業内容を、放課後に復習しなければならない。そこで私は自分が今、どれだけ眠たいのかを数値化し、ボタンを押すと、眠気が飛ぶ腕時計があればよいと思い、製作することにした。ここではその過程、今後の展望を紹介する。

キーワード 睡眠、睡眠促進物質、スマートウォッチ、恒常性維持機構

2. 研究の背景と目的

上で述べたように、眠たくなるのが授業中ならまだしも、それがトラックの運転中、バスの運転中ならどうなるか。私はその眠たくなる原因を突き止め、現在の眠たさを数値化し、ユーザーに対してなんらかのアクションをする。例えば『眠たくなってきました。トラックをサービスセンターに停め、仮眠をとりましょう』と音を出し、30分後に起こすというようなスマートウォッチを作れば事故が減るのではないかと思い、製作しようと思った。授業中の場合、事故というのはもちろん先生に怒られることだ。



図1 スマートウォッチの例

3. 研究内容

(1) 睡眠の仕組み

まず、人はなぜ寝るのか。なぜ眠たくなるのかを考える必要がある。しかし、睡眠についてはまだ解明されていない謎があり、ここからはあくまでさまざまな情報を集めて考えた内容である。

睡眠というのは、「メラトニン」などのホルモンと脳の働きによって制御されている。睡眠は、脳を休止状態にすることをいうのではなく、脳が自らのシステムを点検し、修復する、脳が自ら作り出した自己修復プログラムだと考えられている。人間は睡眠によって毎日を不自由なく生活することができるのである。

人間は、ずっと運動をしていると筋肉が疲れて動けなくなるのと同様に、脳もずっと活動をしていると、脳が働く時間と量に比例して「睡眠促進物質」、いわゆる疲労物質が溜まる。脳は睡眠促進物質を分解しようと、脳の働きを止めて眠る。このメカニズムを「恒常性維持機構」と呼ぶ(図2)。



図2 恒常性維持機構

だが、疲れてもいないのに眠たくなるのはなぜか？これには2つのことが考えられる。1つ目は、恐らく脳は睡眠促進物質が分泌されたことを認識しているのではなく、睡眠物質が引き起こす副作用をチェックしているのだと考察した。例えば、もし睡眠促進物質に心拍数を下げる作用があるとするならば、脳は、心拍数が下がると睡眠促進物質が分泌されたのだと誤認識するのではないのか（図3）。

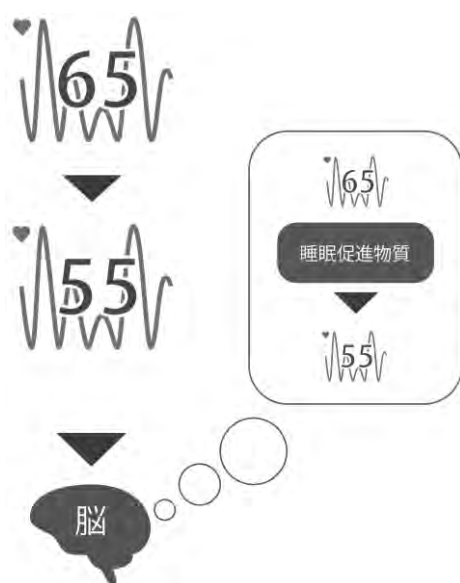


図3 脳の誤認識

2つ目は、通常、人間が寝るときは暖かい環境で寝る。毎日そのリズムで生活していると、暖かい→寝るというサイクルが体の中にいつの間にか出来上がっていく。よって暖かい場所にいると、疲れていなくても、体が勘違いをして、眠たくなるのではないだろうか。

（2）製作

睡眠の仕組みが分かったところで、どのような外観、機能にするのかを考えていく。

まず機能について考えていくことにする。今自分がどれだけ眠たいのかを液晶にパーセンテージで表示し、ボタンを押すと眠気が飛んでいくという機能と、Siriのように「心拍数が上がってきました。少し休憩しましょう」と声でユーザーをアシストする機能が必要だと考えた。このような機能を実現させるためには、液晶、センサー、タッチパネル、スピーカーが必要である。加えて、心拍数などを測るため、常に体と接触している必要がある。これらの条件を満たすことが可能なのはスマートウォッチだけだと考え、外観は高級感のある腕時計型にすることにした。

（3）仕組み

まず、眠たさをパーセンテージで表示する仕組みを考える。(1)でも記したように、睡眠促進物質が引き起こす副作用を実験などで調べ、その副作用で変化するものをセンサーで測る。例えば、睡眠促進物質が分泌された時(眠たくなった時)は脈拍が下がることや、体温が上がるということが実験で証明された場合、脈拍の変化を赤外線センサーで測り、体温の変化をサーミスターと呼ばれるセンサーで測定する。様々な情

報を調べるのは、他の要因で脈拍が下がった場合などに誤動作しないようにするためである。他の要因ではないと判断した場合、あらかじめ設定されている、眠たくない時の脈拍、体温と比べて今はどれだけ変化しているのかを独自のアルゴリズムで計算し、その結果をパーセンテージで表示する（図4）。

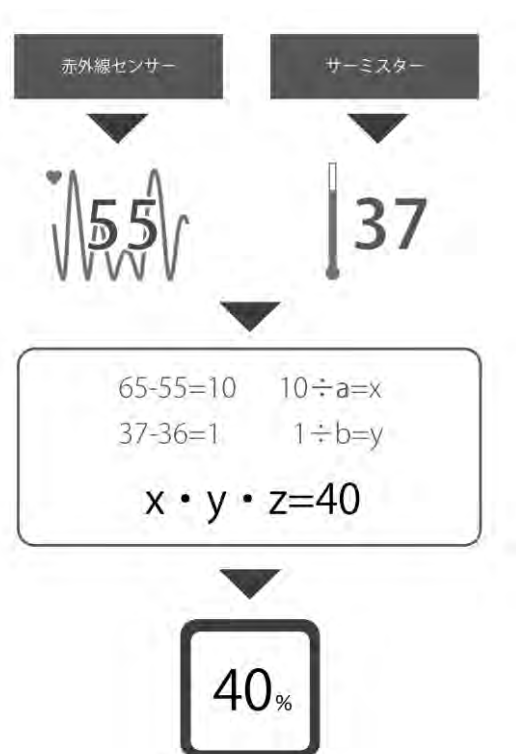


図4 眠たさの表示 z の意味

次に、ボタンを押すと眠気が飛んでいく機能について考える。私は眠くなるのにも理由があるように、眠りから覚めるのにも理由があると考えた。人間が朝になると起きるのは、体内時計と日光が関係していると考察している。体内時計は約 25 時間サイクルで動き、朝日を浴びると、リセットされると言われている。体内時計がリセットされ、体がもう朝だと判断すると、眠りを

促進する「メラトニン」と呼ばれるホルモンの分泌をやめ、目が覚める。はじめ、この朝日の光の波長を再現し、自然に眠りから覚まそうと考えていたが、この方法では、体内時計が狂ってしまい、この腕時計を使えば最後、もう普通の日常生活が送れなくなるため、別の方法を考えることにした。

夜中にぐっと気温が下がってきた近頃、寝癖が悪いせいで、起きると布団から体が出ているのは毎日のことである。毎日、布団が体の上にないため、寒さで目が覚めていたのだ。そこで、もしかしたら体温も目覚めに関係しているのではないのかと考え、現在、体温を下げて目を覚ます方法を考えている。

4. 考察

今回の研究は、人間の仕組みに密接に関係している睡眠をコントロールすることだが、本当に眠気を飛ばしてしまっているのか。もしかしたら生活バランスが崩れてしまっているのではないかと、と人権や健康のことをより深く考え直さなくてはならないと感じた。

また、最近の研究者は自分の得意とする狭い分野だけを研究していることが問題視されているが、この研究は、人権問題、人体の仕組み、電子工作、音声アシスト機能やパーセントで表示する機能など、とても広い分野のことがわかっていないとできない研究であるといえる。現在、私は、インターネットで、それぞれの分野に詳しい方々の文章を読みながら研究をしているが、自分をもっと広い分野にも興味を示し、学ぶことができれば、スピーディーに研究を進めることができ、本当にこの情報が正し

いのかについてより深く考えることが可能になると考える。

5. 今後の課題

実験を通して睡眠促進物質が引き起こす副作用、眠りから覚める条件を明らかにしていくとともに、今回考えて新たに浮上した技術的な問題点や人権などの問題点を克服し、実際に腕時計を製作していきたいと考えている。

6. 参考文献

- [1] 体内時計を調節するメラトニン
http://www.tainaidokei.jp/mechanism/3_3.html
- [2] 睡眠の2つのしくみとは？

<http://www.tainaidokei.jp/mechanism/>

- [3] なぜ眠るのか？～体と脳を休ませる
<http://www.ii-suimin.com/mechanism/naze-neru.html>
- [4] 睡眠のメカニズムとリズム
<http://allabout.co.jp/gm/gc/301433/>

7. 謝辞

この研究を行うにあたりまして、顧問の米田先生には多大なご指導を賜りました。また、サイエンス研究会の先輩方や、友人にも多くの助言・協力を賜りました。この場を借りて、深く御礼申し上げますとともに、これからも御協力お願い申し上げます。

ドローンの製作

4年A組 上林 幹宜
指導教員 米田 隆恒

1. 要約

私は、強風などの悪条件下でも高速で飛行することのできるドローンの開発を目指している。そのために、可能な限り簡単にモータ制御を行う方法の考察とともに、安定した飛行方法を研究している。

今回はギアボックスを設計し、3Dプリンタで出力をする研究を行った。

キーワード 3DCAD、3Dプリンタ、二重反転プロペラ

2. 研究の背景と目的

大災害が起こった場合に、がれきなどが散乱した道路では車などを使つての情報収集は難しいと考えられる。そのため、狭い隙間でも入ることのできるような小型で飛行する、小回りの利くものが情報収集の手段として必要だと考えた。そこで、そのような場合にドローンが便利ではないかと考えた。昨年度の研究で、ラジコンカーの製作を行うことに成功した。今回はドローンのプロペラを回すのに必要なギアボックスの製作を行った。

ため、まずプロペラとモータを接続するプラグを設計し（図1）、3Dプリンタで出力した（図2）。

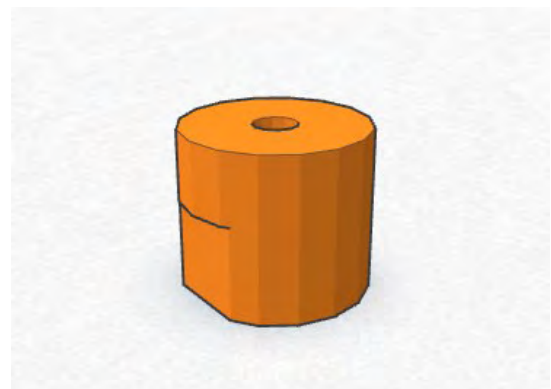


図1 設計したプラグ

3. 研究内容

3.1 プラグの製作

設計には、Tinkercad というサイトを使用した。このサイトではソフトをダウンロードする必要がなく、簡単に 3D モデルを設計することができる。

私が購入したプロペラは、ラジコンヘリコプター用であり、そのままではプロペラとモータを接続することができない。その



図2 出力したプラグ

3.2 ギアボックスの製作

ギアボックスを設計する前に、これから製作していくドローンをどのような方式で飛ばすかを考えた。その結果、プロペラを回転させることによって発生してしまう反トルクを別のプロペラを回転させることによって打ち消す必要のない、二重反転式という方式を選んだ。

この方式では、1つのモータで上下2枚のプロペラを同じ速さで逆回転させることにより、反トルクを打ち消すことができる。2つのモータの回転する速さをプログラムにより完全に一致させる必要がないため、制御がより簡単になると考えた。

ギアを設計するのに使用したのは Gear Model For 3D Printer というサイトである。このサイトではギアの直径や歯数などを入力するだけで簡単にさまざまな種類のギアの3Dモデルを作成することができる。

Gear Model For 3D Printer で作成したギアを Tinkercad で修正したり、ほかのパーツと組み合わせたりなどして、ギアボックスの部品を作成した。また、それらの部品を3Dプリンタで出力し、組み立てた(図3)。

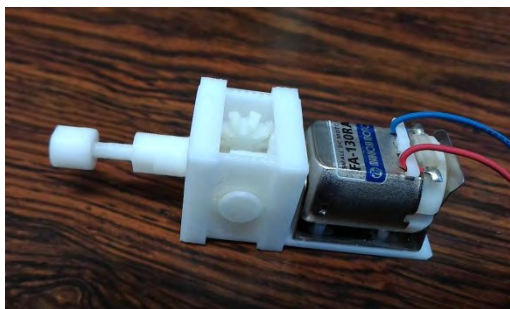


図3 出力し、組み立てたギアボックス

完成したギアボックスにプロペラを取り付け、モータを回した(図4)。

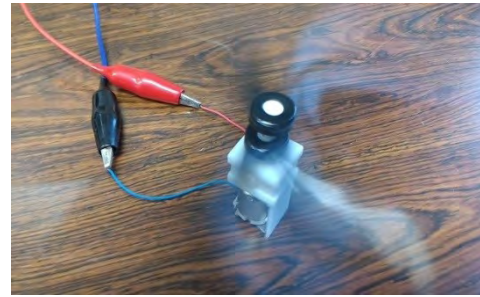


図4 実際に動かしたギアボックス

4. 今後の課題

今回、二重反転式のギアボックスを設計し、3Dプリンタで出力することができた。しかし実際にモータを回してみると、モータとギアや、プロペラとプラグの接続が緩かった。また、このギアボックスではモータの回転の速さを変えずにプロペラに伝えるようになっており、プロペラを高速で回して機体を浮かすにはトルクが足りない。

今後は、3Dプリンタで出力した部品と既存の部品をしっかりと接続できるように設計すること、このギアボックスの設計を見直し、機体を浮かせられるようにすることなどを行いたい。

5. 参考文献

- [1] Tinkercad
<https://www.tinkercad.com/>
- [2] Gear Model For 3D Printer
<http://www.knowhave.com/gear/beveljp.php>

6. 謝辞

サイエンス研究会物理班の活動において、顧問の米田先生をはじめ、多くの先輩方から多大なご指導や、ご協力いただきました。この場を借りて深く御礼申し上げます。

白黒フィルム写真のカラー化

6年B組 上田 樹
指導教員 米田 隆恒

1. 要約

本研究では、白黒フィルム（以下、フィルムとは白黒フィルムを指す）で撮られた写真から、元の色の特定を試みる。

ある波長の光がフィルムに及ぼす影響は、波長によって異なる。その違いを利用すれば、反射した色を特定することができると考えた。また、ある1色の物体を映した写真における色の違いは、法線の向きの違いによるものであり、新たに定義したカラーモデルを用いればモデル上のただ1点の特定のみで全ての色が再現可能である。

キーワード 輝度、カラーモデル、基準色、屈折点、CG、法線ベクトル

2. 研究の背景と目的

一般に用いられているカラー化技術は手作業によるものか、自動的なものも似たカラー画像を用いて手作業を再現した手法がほとんどである。これまでは白黒写真には同一の明るさを示す色が無数に存在し得るため、理論的なカラー化は不可能だと言われてきた。しかし私は、1画素ではなく写真全体で見れば、輝度の分布等の情報も利用できると考えた。また、すべての画素の色を特定しなくても、「基準色」という一色が決まればすべての色が再現可能であると考えた。これら2点について考察し、白黒フィルム写真をカラー化したのでその詳細を報告する。

3. 研究内容

3. 1 フィルムに映る色の検証とカラーモデルの考案

フィルムで物体を撮影した際、写真内での明るさの変化は元の色によって異なると考えた。色の違いを考えるためにまず、フィルムが捉える「明るさ」と、カラー化の目標であるデジタルカメラがとらえる「色」を調べる必要がある。そこで、さまざまな色の色見本に照明を当て、絞り値を変えながらフィルムカメラ、デジタルカメラでそれぞれ撮影した。

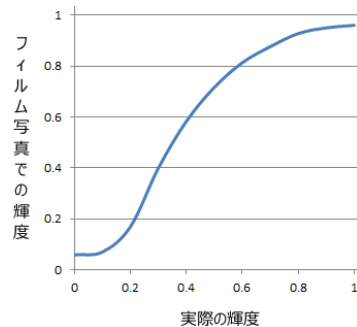


図1 本来の輝度とフィルム写真での関係

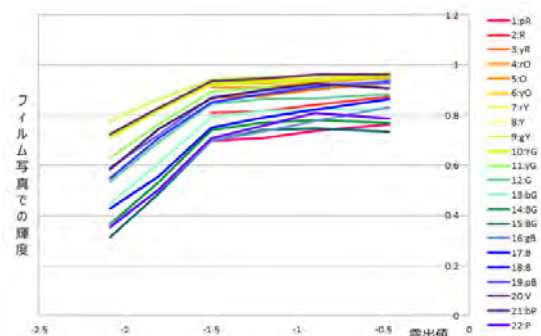


図2 色ごとの露出値に対する輝度

結果より、フィルムに投影された色をRGB等のデジタル的な色と対応させる、新しいカラーモデルを考える。以下、黒(Bk)を0, 白(Wh)を1とするフィルム写真上での明るさを「輝度」と定義する。フィルムに写る色は同じ物体であっても撮影された条件によって変化するため、色は相対的に定義するべきであると考えた。実験1の結果より、フィルムは白、

黒に近い部分では、光の強さの変化に対する輝度の変化が小さく、それぞれ 0~1 の間で収束していくことが伺える。また、ある彩度を持った色に光を当てた際、ある一定の強度において最大の彩度を持ち、それよりも光が弱いまたは強い、つまり白または黒に近づけさせるとその色は鮮やかさを失う。これらの情報から、輝度

0.5 のグレーを中心として色を相対的に扱えば、あらゆる色は輝度 0.5 のグレーを中心とする半径 0.5 の球の内側に表せると考えた。

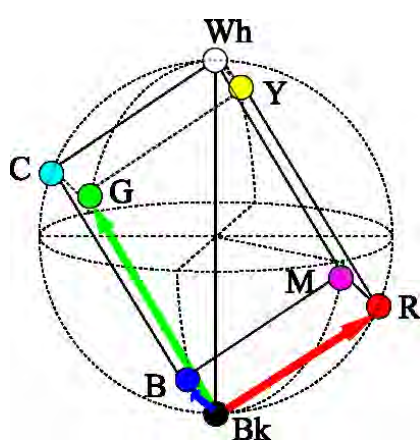


図3 考案したカラーモデル

デジタルの色に変換するには、基準となる点 R、G、B をこの球面上にとり、黒を原点、 $\overrightarrow{BkWh}$ を z 軸方向とする 3 次元空間での、それぞれの位置ベクトル $\vec{r}, \vec{g}, \vec{b}$ に色の座標を分解すればよいと考えた。デジタルで扱える色をできるだけ広くとるため $\vec{r} + \vec{g} + \vec{b} = \overrightarrow{BkWh}$ とし、R の y 座標を 0 とすると、R、G、B の各輝度さえ与えれば、それぞれの座標が決定できる。今回の実験では、白黒化処理に用いられる式から求めた輝度を用いて、 $R(0.458, 0, 0.299)$ 、 $G(-0.383, 0.309, 0.587)$ 、 $B(-0.075, -0.309, 0.114)$ とする。

3. 2 写真における色の特徴を調べる
写真内のすべての画素の色が独立しているわけではない。例えば赤色の物体を撮影した写真では、多くの画素が大まかには「赤色」である。これらの色は明暗の違いはあっても、カラーモデル上では規

則的な並びになっているのではないかと考えた。そこで、1 枚の写真に写るすべての色をカラーモデル上にプロットし、その特徴を調べた。



図4 プロット結果 1

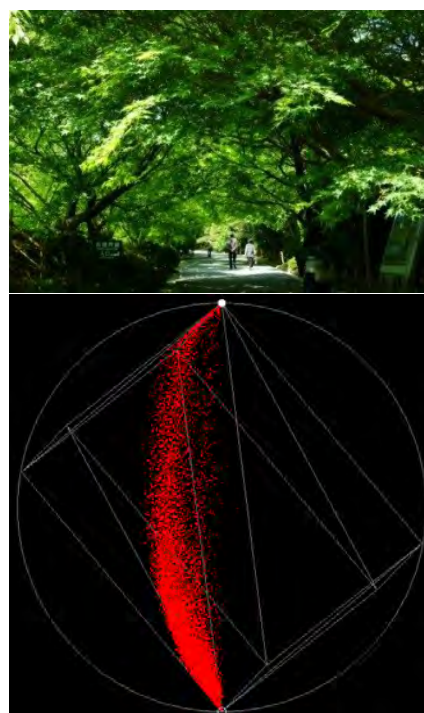


図5 プロット結果 2

プロット結果より、輝度の変化に対して色の変化が単純であることから、写真に写る色は、ある色が光の当たり方によって変化しただけではないかと考えた。そこで、CG レンダラ等に用いられる光の反射モデルである 2 色性反射モデルから、色を変化させる要素を考えた。

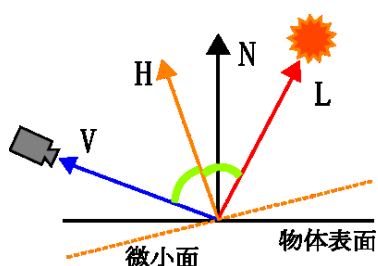


図6 色を決める要素

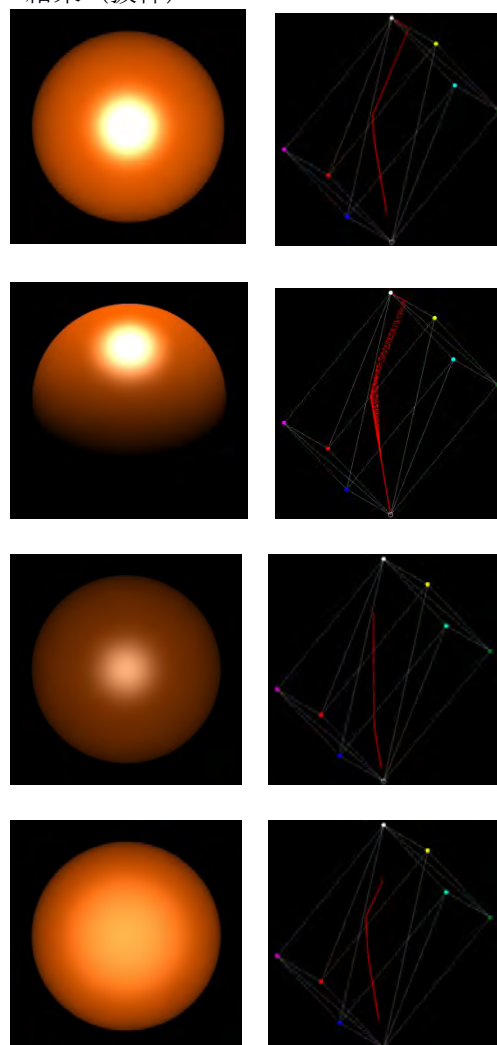
2 色性反射モデルでは反射される光のうち、全方向に等しく散乱される成分を乱反射、光源方向からの光を視線方向に反射できる法線の微小面で起こる強い反射を鏡面反射と呼ぶ。ある法線ベクトル $\vec{N}$ の面において、光源方向ベクトル $\vec{L}$ 、視線方向ベクトル $\vec{V}$ 、物質の粗さを r と置くと、乱反射は $\vec{N}$ と $\vec{L}$ 、鏡面反射は $\vec{N}$ 、 $\vec{L}$ 、 $\vec{V}$ 、 r に依存する。これらの要素のうち、光源が太陽光のように平行光線であるとする、物体のどの位置においても $\vec{L}$ が一定である。また $\vec{V}$ も、一般的なレンズにおいてはほぼ一定とみなせる。つまり、材質の様な物体の写真において、色の変化は法線ベクトルの違いによってのみ引き起こされる。よって、ある写真に写る物体の全ての色は、同じ色・材質の球体の画像にも現れる。なぜなら、球体は写真に写り得るあらゆる法線ベクトルの面を持つからである。そこで、球体の CG 画像を理想的なモデルとし、様々な色や条件の球体の CG 画像をつくり、カラーモデル上にプロットすれば、カラーモデル上での色の並びの特徴がわかると考えた。

3. 3 理想的なモデルのもつ色

3 次元空間上に、原点を中心とする半径 1 の球を置き、光源方向ベクトル $\vec{L}$ 、光源強度 $p(\text{lux})$ の平行光線をあて、視線

方向 $\vec{V}$ を x 軸方向に固定して yz 平面に平行投影した CG 画像をつくり、カラーモデル上にプロットした。 $\vec{L}$ 、 p を少しずつ変化させて CG 画像をつくり、プロット結果の違いを調べた。

結果（抜粋）



上を基準に、光源を 60° 傾けた場合、光の強度を半分にした場合、表面の質感を荒くした場合である。

カラーモデル上での座標の並びは、4 本以下の線分で表される折れ線の形になった。各頂点を図 7 のように点 P、Q、S とおく。物体の色や撮影条件に関わらず、PQ は Bk-Wh に平行であり、QS は R（色相に応じて G または B）-Wh と平行であった。よって、点 Q、S は P から

特定することができる。つまり、画像内のすべての色は、点 P の示す 1 色のみから求められる。このような色を「基準色」と定義する。写真をカラー化するには、この基準色を特定すればよいと考えた。

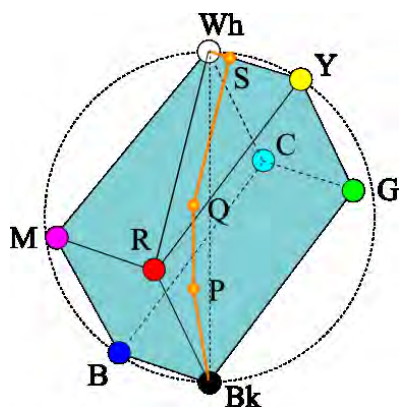


図7 カラーモデル上の折れ線

3. 4 基準色の輝度の特定

法線と光源方向のなす角が θ の面での乱反射成分の輝度は、(基準色の輝度) $\times \cos\theta$ で計算できる。 $\cos\theta$ は θ が小さい部分での変化が緩やかであることから、ある輝度の画素数のヒストグラムをとれば、基準色の輝度付近の度数が大きくなるのではないかと考えた。そこで、カラー写真からプロット結果とヒストグラムを取得し、基準色の輝度とヒストグラムの関係を調べた(図8)。

3. 5 基準色の特定

実験1より、元の色によって、輝度の上限値と、輝度の変化の仕方に違いが現れることが分かった。しかし、写真において、輝度の変化量は、撮影条件や物体の大きさ等に大きく左右される。そこで、写真を同じ条件の理想的なモデルに置き換えられないかと考えた。

人工物以外の物体では、法線方向には散らばりがある。十分に広い空間を映しているとき、法線の分布は均一になるのではないかと考えた。映る色を変化させるのは法線であるから、法線の分布が等しい画像同士では、撮影条件が同じなら輝度のヒストグラムも同じ形をとる。つまり、写真の画素を並び替えれば球体の

画像にすることが可能である。

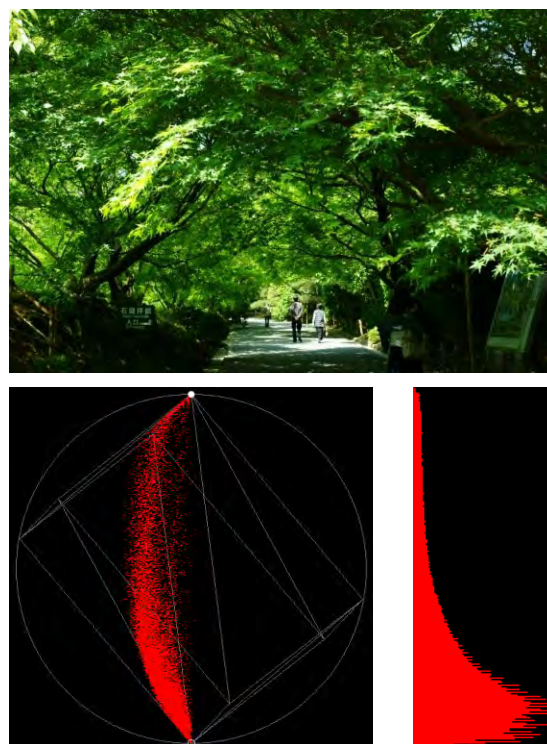


図8 実験対象の写真(上)、輝度のヒストグラム(左) カラーモデルへのプロット結果(右)

理想的なモデルにおいて、一般的には、光源方向となす角 θ が等しい法線をもつ面同士はほぼ同じ輝度を持ち、その輝度は θ が小さいほど高い。よって、 θ の分布が等しくなるように各画素の輝度と θ を対応させれば、元の物体の形状に関わらず、法線の変化による色の変化を得ることができると考えた。

検証のため、まずカラー写真に対して、同じ基準色の理想的なモデルをつくり、光源等の調整によって同じ形の輝度のヒストグラムが得られることを確かめた。次に、写真の輝度分布に合わせて θ を割り振り、横軸に θ 、縦軸に輝度のグラフを割り当て、同様のことを理想的なモデルで行った際と同じ形状のグラフになるかを調べた。

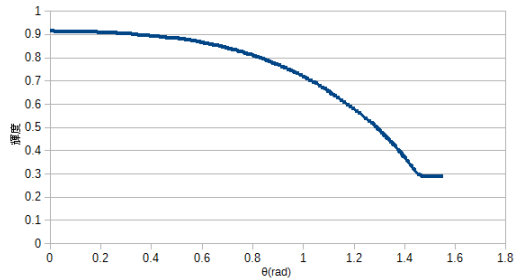
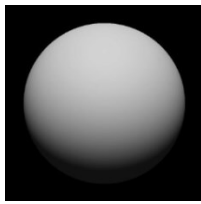


図9 理想的なモデルでの実験結果

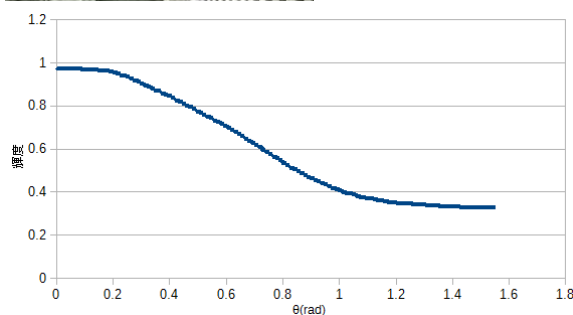


図10 実際の写真での実験結果

θ から露光量は計算できるため、実験1でのグラフの傾きに相当する値が計算できる。また、写真が十分に明るければ、輝度が収束する上限の値も計算できる。これらの値を実験1の値と比較し、最も近いものを選べば、基準色を特定することができる。

3. 6 カラー化

ここまでの手法を使い、実際のフィルム写真をカラー化した。なお、色の違う物体ごとに分割するために、クラスタリングを用いた。図11の写真をカラー化したところ、図12のようになった。



図11 白黒写真

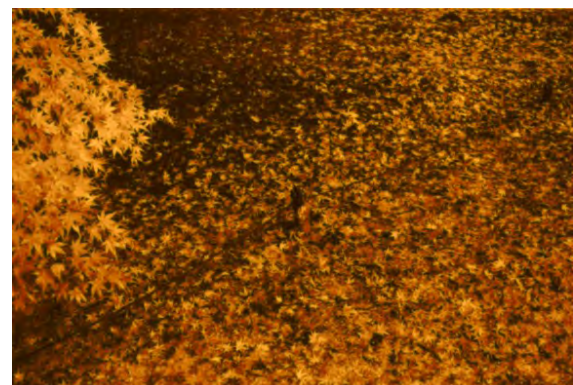


図12 カラー化結果

4. まとめと今後の課題

写真を理想的なモデルに簡略化し、白黒写真から色を推定できるだけの情報を得ることができた。しかし、人工物のような平面を含むものや、空のように法線を持たない物から情報を正しく得るには、手法の改善が必要である。

5. 参考文献

- [1] 「色彩の科学」、金子隆芳、岩波文庫 (1988)
- [2] 「色彩論」、J. W. V. Goethe 著、木村直司訳、ちくま学芸文庫(1810)
- [3] 「物体のカラー反射モデル」、富永昌治、大橋伸一郎、情報処理学会論文誌 33(1992)37-45

6. 謝辞

本研究では、顧問の米田先生の指導を受けました。また、東北大学の阿部准教授及び「科学者の卵」メンターの方に多大なご意見、ご指摘を賜りました。この場を借りて、御礼申し上げます。

フィボナッチ数列の剰余における法則

2年B組 志村 恒太郎

指導教員 川口 慎二

1. 要約

私はフィボナッチ数列の剰余について研究している。今回は、これらに関する興味深い法則が見つかったので、これを紹介する。

キーワード フィボナッチ数列、 k -フィボナッチ数列、剰余、合同式

2. 研究の背景

フィボナッチ数列について新たな法則を探していたとき、同数列の1の位を並べたものに興味深い法則を発見した。よって私の興味をかき立て、これを研究するに至った。

だし、 $1 \leq k \leq 6$ とする。

いま、 $\{F_1^{10}(n)\}$ の初期値を

$$F_1^{10}(0) = 0, F_1^{10}(1) = 1$$

と定めると、 $\{F_1^{10}(n)\}$ の各項を列挙したものは以下の通りとなる。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0,
7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0,
9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3, 0,
3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0, ...

3. 研究内容

本稿では、特に注意のない場合、 l, m, n を自然数とする。

3. 1 定義

3.1.1 フィボナッチ数列の定義

$F_x^y(z)$ において、 x は数列の種類を表す番号(添え字)、 y は除数、 z は項の番号を表している。また、 $1 \leq x \leq 6, 1 \leq y, 0 \leq z$ とする。

このとき、 k -フィボナッチ数列を漸化式

$$F_k^{10}(n+2) \equiv F_k^{10}(n+1) + F_k^{10}(n) \pmod{10}$$

から導かれる数列 $\{F_k^{10}(n)\}$ と定義する。た

上述の定義における数列 $\{F_k^{10}(n)\}$ ($k =$

2, 3, 4, 5, 6)を、以下のような初期値により定義する。

$$F_2^{10}(0) = 0, F_2^{10}(1) = 2$$

$$F_3^{10}(0) = 2, F_3^{10}(1) = 1$$

$$F_4^{10}(0) = 2, F_4^{10}(1) = 6$$

$$F_5^{10}(0) = 0, F_5^{10}(1) = 5$$

$$F_6^{10}(0) = 0, F_6^{10}(1) = 0$$

定理 1

k - フィボナッチ数列 $\{F_k^{10}(n)\}$ はすべての $1 \leq k \leq 6$ について、周期性があり、そのパターンは有限である。

(証明) ([1]より)

連続する 2 項の余りが、これまでの連続する 2 項の余りと順序まで等しければ、周期は存在することになる。

ここで周期は存在しないとすると、どの連続する 2 項の余りも等しくないことになる。これは余りの組み合わせが有限個であることに矛盾する。

よって、周期は存在する。(Q. E. D.)

3. 2 基本定理

まず、定理 1 が自明に成り立つ。

定理 2

自然数 l ($1 \leq l \leq 6$) に対して、 l - フィボナッチ数列 $\{F_l^{10}(n)\}$ から、

$$F_m^{10}(n) = F_l^{10}(pn + q) * r$$

または、

$$F_m^{10}(n) \equiv F_l^{10}(pn + q) * r \pmod{10}$$

を満たす適当な自然数 m ($1 \leq m \leq 6$) と

p, q を選ぶと、もとの数列 $\{F_l^{10}(n)\}$ の周期の約数を周期としてもつ m - フィボナッチ数列 $\{F_m^{10}(n)\}$ を導き出すことができる。

定理 2 の実例を、前節で述べた形式で列挙すると、

$$\cdot F_2^{10}(n) \equiv F_1^{10}(n) * 2m$$

$$\cdot F_2^{10}(n) = F_1^{10}(57n + 57)$$

$$\cdot F_3^{10}(n) = F_1^{10}(5n + 3)$$

$$\cdot F_4^{10}(n) = F_1^{10}\{3 * (5n + 1)\}$$

$$\cdot F_5^{10}(n) = F_1^{10}(5n)$$

$$\cdot F_5^{10}(n) \equiv F_1^{10}(n) * 5(2m + 1)$$

$$\cdot F_6^{10}(n) = F_1^{10}(15mn)$$

$$\cdot F_6^{10}(n) \equiv F_1^{10}(n) * 10m$$

$$\cdot F_4^{10}(n) = F_2^{10}(5n + 1)$$

$$\cdot F_4^{10}(n) = F_2^{10}(5n + 2)$$

$$\cdot F_6^{10}(n) = F_2^{10}(5mn)$$

$$\cdot F_6^{10}(n) \equiv F_2^{10}(n) * 5m$$

$$\cdot F_4^{10}(n) = F_3^{10}(9n)$$

$$\cdot F_4^{10}(n) \equiv F_3^{10}(n + m) * 2^m$$

$$\cdot F_5^{10}(n) \equiv F_3^{10}(n) * 5(2m + 1)$$

$$\cdot F_6^{10}(n) \equiv F_3^{10}(n) * 10m$$

$$\cdot F_6^{10}(n) \equiv F_4^{10}(n) * 5m$$

$$\cdot F_6^{10}(n) = F_5^{10}(3mn)$$

$$\cdot F_6^{10}(n) \equiv F_5^{10}(n) * 2m$$

$$\begin{aligned} F_1^{10}(5n+3) &= F_1^{10}(5n+54) \\ &= F_1^{10}(5n+57) \end{aligned}$$

$$\cdot F_1^{10}(n) * 3 \equiv F_2^{10}(n+45)$$

ただし、合同式はいずれも mod 10 とする。

今回は証明を割愛する。これらを組み合わせることにより、より多くの関係式を得ることができる。

定理 2 を発展させて、次の定理を得た。

3. 3 10 以外の除数

10 以外の除数の場合の数列 $\{F_l^m(n)\}$ ($m \neq 10$) をすべて求めると、次のことがわかった。

- ・長さの等しい数列がある場合がある
- ・それぞれに固有の法則がある
- ・すべての除数について成り立つ法則は解が 0 になるものを除いて存在しない

これらの事実については、成立することを実例から確認したもの、精細に調べることができなかったため、今後さらに詳しく研究が進める必要がある。

3. 4 トリボナッチ数列

この研究はフィボナッチ数列を取り扱ってきたが、これはすべての項が前の 2 項の和となる漸化式で構成される数列である。

ここで「トリボナッチ数列」という数列を考える。トリボナッチ数列とは全ての項が前の 3 項の和となる、フィボナッチ数列によく似た数列である。

この数列を先程まで述べていた剰余の研

究に組み込んで考える。

$T_x^y(z)$ において、 x は数列の種類を表す番号 (添え字)、 y は除数、 z は項の番号を表している。また、 $1 \leq x \leq 20, 1 \leq y, 0 \leq z$ とする。

このとき、 k - トリボナッチ数列を漸化式

$$T_k^{10}(n+3) \equiv T_k^{10}(n+2)$$

$$+ T_k^{10}(n+1) + T_k^{10}(n)$$

(mod 10)

から導かれる数列 $\{T_k^{10}(n)\}$ と定義する。ただし、 $1 \leq k \leq 20$ とする。

いま、 $\{T_1^{10}(n)\}$ の初期値を

$$T_1^{10}(-1) = 0, T_1^{10}(0) = 0, T_1^{10}(1) = 1$$

と定めると、 $\{T_1^{10}(n)\}$ の各項を列挙したものは以下の通りとなる。

1, 1, 2, 4, 7, 3, 4, 4, 1, 9, 4, 4, 7, 5, 6,
8, 9, 3, 0, 2, 5, 7, 4, 6, 7, 7, 0, 4, 1, 5,
0, 6, 1, 7, 4, 2, 3, 9, 4, 6, 9, 9, 4, 2, 5,
1, 8, 4, 3, 5, 2, 0, 7, 9, 6, 2, 7, 5, 4, 6,
5, 5, 6, 6, 7, 9, 2, 8, 9, 9, 6, 4, 9, 9, 2,
0, 1, 3, 4, 8, 5, 7, 0, 2, 9, 1, 2, 2, 5, 9,
6, 0, 5, 2, 4, 1, 6, 2, 9, 7, 8, 4, 9, 1, 4,
4, 9, 7, 0, 6, 3, 9, 8, 0, 7, 5, 2, 4, 1, 7,
2, 0, 9, 1, 0, 0, (1, 1, ...)

これらから、以下が推測できるが、現時点では証明には至っていない。

- ・ 10 以外の除数の場合と同じく、周期の等しい数列が存在する
- ・ 数列は次の 4 パターンの並び方が存在

する

①奇数のみの並び

②偶数のみの並び

③奇数、偶数、奇数、偶数のように奇数と偶数が交互になる並び

④奇数、奇数、偶数、偶数のように1つおきに奇数と偶数が替わるような並び

- ・全数列の周期の和は同じ除数のフィボナッチ数列の全数列の和の2乗に等しい

ここで、最後の「全数列の周期の和は同じ除数のフィボナッチ数列の全数列の和の2乗に等しい」とあるように、トリボナッチ数列などの研究にはさらなる考察が必要である。

しかも、トリボナッチ数列に限らず、「テトラナッチ数列」や、「ペンタナッチ数列」、「ヘキサナッチ数列」といった、すべての項がそれぞれ直前の4, 5, 6項の和となる数列、さらには「すべての項が直前の n 項の和となる数列」というように一般化までして考えたいので、コンピューターを用いるなど計算方法の改善が求められる。

4. 今後の課題

今回は時間の問題で除数が10のときについてしか重点的に研究できなかったが、今後は他の除数の場合について詳しく研究したい。

また、今回はフィボナッチ数列を基本に研究を進めたが、今後はトリボナッチ数列や、テトラナッチ数列といった数列のような、足す項数を変えた数列についてももっと深く研究したい。よって計算速度の向上が必須となってくるので、コンピューター

上での計算プログラム作成も行いたい。

5. 参考文献

- [1] フィボナッチ数列の剰余の周期性の証明
http://blog.livedoor.jp/enjoy_math/archives/50640281.html

6. 謝辞

この研究を行うにあたりまして、顧問の川口先生には多大なご指導を賜りました。また、サイエンス研究会の先輩方や、研究発表会でお会いいたしました他校の皆様、友人にも多くの助言・協力を賜りました。この場を借りて、深く御礼申し上げますとともに、これからも御協力お願い申し上げます。

モンティ・ホール問題についての考察

3年A組 松川 賢太郎

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 3 年生はさまざまな問題について研究している。今回は、モンティ・ホール問題の一般化に向けて研究をした。

キーワード モンティ・ホール問題、条件付き確率、ベイズの定理、事後確率

2. 研究の背景と目的

まずモンティ・ホール問題とは、
「3つのドアの1つには賞品が、残りの2つのドアにはヤギが隠されている。司会者(モンティ)は答えを知っている。まず挑戦者がドアを1つ選ぶ。そして司会者(モンティ)は残りのドアのうちヤギがいるドアを1つ開けて、挑戦者に残り2つのドアから選び直す機会を与えるというゲームがある。そのとき賞品を得るためには挑戦者はドアを変えるべきか変えるべきではないか。」という内容である。

このゲームは3つのドアで行っているがドアの数や司会者が開けるドアの数などを変えることによって、問題の解答がどうなるのかということに疑問を抱き、この問題に興味を持った。今回はモンティ・ホール問題を3通りの考え方で解いた。

3. 研究内容

＜設定＞

3つのドアをそれぞれA, B, Cとする。
挑戦者はAのドアを選び(事象 A)、モンティはBのドアを開けた(事象 D_B)とす

る。ヤギがいるドアはハズレとする。

＜解法1＞

まず、挑戦者がAのドアを選ぶ確率は、3枚のドアA, B, Cから1つを選ぶので、 $\frac{1}{3}$ とわかる。次に、モンティがBのドアを開ける確率をあわせて考える。

●Aのドアに賞品がある場合

モンティはB, Cどちらのドアも開けることができる。よってモンティがBの

ドアを開ける確率は $\frac{1}{2}$ とわかる。つまりAのドアに賞品があり、かつBのドアをモンティが開ける確率は

$$P(A \cap D_B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

である。

●Cのドアに賞品がある場合

モンティはBのドアしか開けることができない。よってモンティがBのドアを開ける確率は1である。ゆえに、Cのドアに

賞品があり B のドアをモンティが開ける

確率は $P(A \cap D_B) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ である。

以上から、挑戦者が A のドアを選び、かつモンティが B のドアを開ける確率

$P(A \cap D_B)$ は、

- ・ A のドアに賞品がある場合は、 $\frac{1}{6}$
- ・ C のドアに賞品がある場合は、 $\frac{1}{3}$

となる。

したがって、C のドアに賞品がある確率が高くなり、C のドアに変更したほうが賞品を手に入れることができる確率が高いことになる。

<解法 2>

ベイズの定理を利用する。

これ以降、 $P(A)$ 、 $P(B)$ をそれぞれ事象 A、B の起こる確率、 $P_A(B)$ を事象 A が起こったとわかっているときに事象 B が起こる条件付き確率、 $P_B(A)$ を事象 B が起こったとわかっているときに事象 A が起こる条件付き確率を表す。

定理 (ベイズの定理)

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}$$

一般に、何も情報がない場合に考える確率を事前確率、ある条件が与えられた場合に考えられる確率を事後確率という。

●ベイズの定理を導く

「A と B の両方が起こる確率」は「A の起こる確率」と「A が起こった後で B が起こる確率」の積に等しいので、

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。今度は B が起こる確率を先に考えると、

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。式①、②を連立させると、

$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$ を得る。この式の両辺を $P(A)$ で割ると、

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}$$

となる。

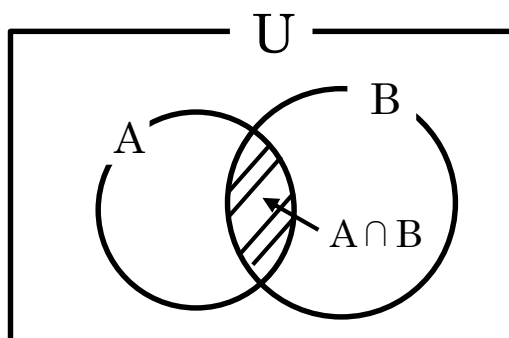
●ベン図で表す

いま、 U を全事象とすると、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}, \quad P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)}, \quad P_B(A) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

と表すことができる。



このベイズの定理を応用して、モンティ・ホール問題を考える。ベイズの定理を用いる前に、いくつか考えなければならないことがある。今回はモンティがすでに B のドアを開けておりハズレだと挑戦者に見せた後に A のドアのままにするか、ドア

を変更するか2通りについて考えなければならない。

(パターン1)

モンティがBのドアを開けたとき、Aのドアに賞品がある確率を考える。

モンティがBのドアを開けるという事象を D_B 、Aのドアに賞品があるという事象を A とすると、求める確率は $P_{D_B}(A)$ である。

いま、Aのドアに賞品があるとわかっていて、モンティがBのドアを開ける確率 $P_A(D_B)$ は、＜解法1＞より、 $P_A(D_B) = \frac{1}{2}$ 。
また、Aのドアに賞品がある確率（事前確率）は $P(A) = \frac{1}{3}$ である。

さらに、モンティがBのドアを開ける確率 $P(D_B)$ は $P(D_B) = \frac{1}{2}$ であるから、ベイズの定理から、

$$\begin{aligned} P_{D_B}(A) &= \frac{P_A(D_B)P(A)}{P(D_B)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(パターン2)

モンティがBのドアを開けたとき、Cのドアに賞品がある確率を考える。

モンティがBのドアを開けるという事象を D_B 、Cのドアに賞品があるという事

象を C とすると、求める確率は $P_{D_B}(C)$ である。

いま、Cのドアに賞品があるとわかっていて、モンティがBのドアを開ける確率

$P_C(D_B)$ は、＜解法1＞より、 $P_C(D_B) = 1$ 。

また、Cのドアに賞品がある確率（事前確率）は $P(C) = \frac{1}{3}$ である。

さらに、モンティがBのドアを開ける確率 $P(D_B)$ は $P(D_B) = \frac{1}{2}$ であるから、ベイズの定理から、

$$\begin{aligned} P_{D_B}(C) &= \frac{P_C(D_B)P(C)}{P(D_B)} \\ &= \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

したがって、挑戦者がAのドアを選んで、モンティがBのドアを開けた場合、

・Aのドアに賞品がある確率は $\frac{1}{3}$

・Cのドアに賞品がある確率は $\frac{2}{3}$

であるから、Cのドアに変更した方がよいことになる。

＜解法3＞

極端な場合を考えてみる。

賞品がAのドアにはなかった場合、モンティはランダムにドアを開くことはしな

い。わざとハズレのドアを開くことになる。よって、この瞬間に司会者が挑戦者の選択に干渉している。

もともと3枚のドアに賞品がある確率は等しく $\frac{1}{3}$ ずつであったが、司会者がわざとハズレのドアを1つ開いて見せたことにより、挑戦者の選んだAのドアではなく残っているドアに賞品がある確率は $\frac{2}{3}$ になったと考えることができる。

わかりやすくするために、ドアを3枚ではなく100枚であると仮定して考える。挑戦者はAのドアを選択するとする。挑戦者が初めに選んだドアに賞品が隠されてい

る確率は $\frac{1}{100}$ である。一方で、順にハズレのドアを開いていき、2枚まで減らしていくと、残りのドアに賞品が隠されている確率は $\frac{99}{100}$ と考えることができ、明らかに挑戦者はドアを変更したほうがいいということになる。

4. 今後の課題

この研究の最終目標はモンティ・ホール問題の一般化である。もともとのドアの枚数やモンティが開けるドアの枚数、挑戦者が初めに選ぶドアの枚数などを変化させた場合について、3枚のドアのときの結果同じになるのかということをもとに考えてみたい。

そのために、今回習得した3つの解法をうまく活用していきたい。

5. 参考文献

[1] 「たまたまー日常に潜む「偶然」を科

学する」(The Drunkard's Walk)、Leonard Mlodinow 著、田中三彦訳、ダイヤモンド社

[2] 高校数学の美しい物語

<http://mathtrain.jp/bayes>

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。

魔方陣を作る

3年C組 今中 翔哉

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班3年生は多様な研究を行っている。私は魔方陣について学習している。今回は魔法陣の作り方について考えた。その中でさまざまなことが明らかになってきたため、今回はそれらを紹介していきたい。

キーワード 魔方陣、 n 次魔方陣、正方行列、定和、補助方陣

2. 研究の背景と目的

よく知られているように魔方陣は縦、横、斜めが一定の和になるという一見単純な性質しかないと思われがちだが、今回はあえて単純な部分に目を向けて調べてみた。なかなか一筋縄では容易に作ることができない魔方陣もさまざまな方法で何種類もの魔方陣を作られることがわかったためそれらを紹介する。

列と呼び、上から数えて i 番目の行、

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$$

を第 i 行、左から数えて k 番目の列

$$a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$$

を第 k 列という。さらに、また行列 A を構成している n^2 個の数 a_{ik} ($i, k=1, 2, \dots, n$) を行列 A の要素という。つまり、正方行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と表現できる。

そして、正方行列 A に対して、左上隅の a_{11} から右下隅 a_{nn} への対角線を主対角線といい、その上にある要素を主対角線要素という。また、右上隅の a_{1n} から左下隅の a_{n1} を結ぶ線を副対角線、その上にある要素を副対角線要素という。

3. 研究内容

3. 1 魔方陣の基礎知識

魔方陣とは、1から始まる連続した自然数を基盤の目状に並べ、各行、各列、及び両対角線の数の和をすべて相等しくしたものである。一般に一辺が n の魔方陣は「 n 次魔方陣」といわれている。また、魔方陣を単に「方陣」と呼ぶこともある。まず魔方陣を詳しく調べるために基本用語について確認する。

n^2 個の数 a_{ik} ($i, k=1, 2, \dots, n$) を正方形に並べたものを n 次正方行列という。 n 次正方行列 A において、横列を行、縦列を

要素がすべて 1 である n 次正方行列を n 次単一行列といい、一般に E_n と表す。例えば、4 次単一行列 E_4 は

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

行列 A を行と列を入れ換えて得られる行列を A の転置行列といい、 tA と表す。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

の転置行列 tA は、

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

●一行の数の和

一般に、 n 次魔方陣に含まれるすべての数の和を S_n とすれば、 S_n は初項 1、末項 n^2 、項数 n^2 の等差数列の和であるから、

であり、各行（列）の和は相等しいので、各行、各列、両対角線要素の和 S は、

$$S = \frac{S_n}{n} = \frac{n(n^2+1)}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。これを n 次魔方陣の定和（魔法陣定和）という。

したがって、 $n = 3, \dots, 12$ の場合は次のようになる。

n	S	n	S
3	15	8	260
4	34	9	269
5	65	10	505
6	111	11	671
7	175	12	870

この結果より、 n が奇数の場合は、 $n = 2m+1$ ($m \in N$) とおくと、①は

$$S = \frac{(2m+1)\{(2m+1)^2+1\}}{2}$$

$$= (2m+1)(2m^2+2m+1)$$

となり、(右辺) = (奇数) × (奇数) = (奇数) であるから定和 S は必ず奇数になる。したがって、奇数方陣の各行、各列、両対角線には奇数が奇数個含まれることがわかる。

また、 n が半偶数（4 で割れない偶数）のときは、 $n = 4m+2$ ($m \in N$) とおくと、①は

$$S = \frac{(4m+2)\{(4m+2)^2+1\}}{2}$$

$$= (2m+1)(16m^2+16m+5)$$

となり、(右辺) = (奇数) × (奇数) = (奇数) であるから定和 S は必ず奇数になる。したがって、半偶数方陣の各行、各列、両対角線には奇数が奇数個含まれる。

それに対して、 n が全偶数（4 で割れる偶数）のときは、 $n = 4m$ ($m \in N$) とおくと、①は

$$S = \frac{4m\{(4m)^2+1\}}{2} = 2m(16m^2+1)$$

となり、定和 S は必ず偶数になる。したがって、全偶数方陣の各行・各列・両対角線には、奇数も偶数も偶数個ずつ含まれる。

●魔方阵の作り方

ひとつの魔方阵を作るときに、もとななる 2 つの魔方阵を**補助方陣**という。そして、これらの補助方陣には次の直交性が成り立っていないなければならない。

$0, 1, 2, \dots, n-1$ の n 個の数字を要素としてもつ n 次正方行列 $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ に対して、 A と B の ik 要素を並べた順序対 $\langle a_{ik}, b_{ik} \rangle$ を ik 要素としてもつ正方行列を A と B の **2 重配列** とよび、 $A * B$ と表すことにする。つまり、

$$A * B = (\langle a_{ik}, b_{ik} \rangle) \\ = \begin{pmatrix} \langle a_{11}, b_{11} \rangle & \cdots & \langle a_{1n}, b_{1n} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_{n1}, b_{n1} \rangle & \cdots & \langle a_{nn}, b_{nn} \rangle \end{pmatrix}$$

である。このような 2 重配列に現れる n^2 個の順序対がすべて異なるとき、 A と B は互いに**直交する**といい、そのときの 2 重配列を**直交配列**という。

例えば、次の行列 A と B は、2 重配列のすべての要素が異なるため、互いに直交している。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} \langle 0, 0 \rangle & \langle 1, 0 \rangle & \langle 2, 0 \rangle & \langle 3, 0 \rangle \\ \langle 0, 1 \rangle & \langle 1, 1 \rangle & \langle 2, 1 \rangle & \langle 3, 1 \rangle \\ \langle 0, 2 \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \langle 2, 2 \rangle & \langle 3, 2 \rangle \\ \langle 0, 3 \rangle & \langle 1, 3 \rangle & \langle 2, 3 \rangle & \langle 3, 3 \rangle \end{pmatrix}$$

便宜上、順序対の $\langle \rangle$ を省略することが多い。直交しない 2 つの補助方陣からは、明らかに方陣を構成し得ない。これは 2 つの同じ数字が現れてしまうからである。

さて、ここで n が奇数、全偶数、半偶数の場合に分けて、 n 次魔方阵の作り方をいくつか紹介する。

3. 2 奇数方陣の作り方

ここでは、5 次方陣を例に説明する。

3.2.1 方法 1 : 2 つの補助方陣を用いる

まず、2 つの補助方陣をつくり、それらを利用して魔方阵を作る。

①補助方陣 A の作り方

はじめに副対角線上に下から順に 1, 2, 3, 4, 5 と入れる。次に、下図のように主対角線に平行な方向に同じ数を 5 個ずつ配列する。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

②補助方陣 B の作り方

①で作った補助方陣 A を、その中央の列に関して左右対称に移す。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

上の 2 つの補助方陣 A と B は互いに直交している。これらから、行列とみなして

$$M = n(A - E_n) + B$$

を各要素で計算してできる配列 M を構成

すれば、次の 5 次方陣 M を得る。

M=

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

また、この方陣を一度で書き下すことができる以下の方法が知られている。

3.2.2 方法 2 : ヒンズーの連続方式

以下の手順で数を配置していく。

- ①まず正方形の最下行の中央のマスに 1 を置き、以下は次のように右斜下方に連続して自然数を順に並べる。
- ②最下行に来たときは、次の列の一番上に続け、そこからさらに、右斜下方へと進んでいく。
- ③最右列にきたときは、そのすぐ下の一番左の隅に続け、そこから順に右斜下方に進む。
- ④すでに数字の入っているマス目に出会った場合、1 つ前の数字のすぐ上に進み右斜下方に続ける。

実際にこの手順を行うと、次の 5 次方陣を得る。

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15

3.2.3 方法 3 : ペルシャの連続方式

以下の手順で数を配置していく。

- ①まず正方形の中央のマスの 1 つ下に 1 を置き、以下は次のように右斜下方に連続して自然数を順に並べる。
- ②最下行に来たときは、次の列の一番上に続け、そこからさらに、右斜下方へと進んでいく。
- ③最右列にきたときは、そのすぐ下の一番左の隅に続け、そこから順に右斜下方に進む。(※②③は方法 2 と同じ。)
- ④すでに数字の入っているマス目に出会った場合、1 つ前の数字の真下 2 つ目のマスに進み右斜下方に続ける。

実際にこの手順を行うと、次の 5 次方陣を得る。

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

ただし、3 次方陣については方法 2 (ヒンズーの連続方式) と方法 3 (ペルシャの連続方式) によって書き下されたものは、下のよう一致したものになる。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

また、これらの方法により得られた n 次方陣の、中心について対称である 2 つの数の和を調べると、いずれも $n^2 + 1$ となっていることが明らかになった。

3.2.4 方法4：桂馬跳びの方式

以下の手順で数を配置していく。

- ①まず、正方形の最下行の中央のマスを1を置く。以下は次のように連続した自然数を左上方向に桂馬跳びに順次並べる。
- ②第1行、または第2行に来たときは、すぐ左の列の相当する場所に続け、そこからさらに、左上方向に桂馬跳びに進む。
- ③第1列に来たときは、最右列の相当する場所に続け、そこからまた、左上方向に桂馬跳びに進む。
- ④すでに数字の入っている目に出会ったときは、1つ前の数字のすぐ上に進み、左上方向に桂馬跳びを続ける。

実際にこの手順を行うと、次の5次方陣を得る。

3	14	25	6	17
22	8	19	5	11
16	2	13	24	10
15	21	7	18	4
9	20	1	12	23

$a+2$	$a+13$	$a+24$	$a+5$	$a+16$
$a+21$	$a+7$	$a+18$	$a+4$	$a+10$
$a+15$	$a+1$	$a+12$	$a+23$	$a+9$
$a+14$	$a+20$	$a+6$	$a+17$	$a+3$
$a+8$	$a+19$	a	$a+11$	$a+22$

最初の位置に数 a を置いた場合は、上図のように数が配置される。これを、見

ると、各行（列）の和は

$$5a+60=5(a+12)$$

となることがわかった。特に、 $a=1$ のとき、各行（列）の和は65となり定和に一致する。

同様に、方法1では両対角線上に1, 2, 3, 4, 5と並べたが、これはあくまでも主対角線要素（副対角線要素）をすべて3にするためであり、3以外の $n-1$ 個の数は任意に入れ替えても構わない。

3.3 全偶数方陣の作り方

まず、自然配列について説明する。自然数を左上隅から順に行ごとに右下隅まで配置した配列を**自然配列**という。下図は4×4の自然配列である。これは右上から順に1から $4^2(=16)$ まで書き下ろした配列である。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

3.3.1 方法1：自然配列網掛け交換法

自然配列の両対角線要素は動かさず、残りの数はすべて、方陣の中心に関して対称の位置に移す。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

この操作は、両対角線要素の和は定和 34 であり、同じ列の 2 数の差は一定という性質によるものである。また、この全偶数魔方陣は、その中心に関して対称の位置にある 2 数の和はすべて $n^2 + 1$ である（このような魔方陣を**対称方陣**という）。

より大きな n 次魔方陣（例えば $n = 12, 16$ など）を作りたいときは、 $n \times n$ の自然配列を作りそれを 4 分割してできる自然配列それぞれに方法 1 と同様にして配列してから、最後に $n \times n$ 配列の中心に関してそれぞれの数を対称の位置に移せばよい。

3.3.2 方法 2 : 「コの字形、逆コの字形」配列を利用する方法

自然配列とともに、「コの字形、逆コの字形」とよばれる配列も有効である。下図は 4×4 の「コの字形、逆コの字形」配列である。上 2 行では、「コの字形」に数が順に並び、下 2 行では「逆コの字形」に並んでいる。

1	2	3	4
8	7	6	5
12	11	10	9
13	14	15	16

ここでのすべての列の和は、4 次方陣の定和 34 である。そこで、すべての行の和も定和となるようにするために、中央の 2 列を上下逆順に入れ換える。

「コの字形、逆コの字形」配列では、1 行目の和が 10、2 行目が 26、3 行目が 42、4 行目 58 であるので、1 行目は定和に 24 足りず、4 行目は定和より 24 上回っている。そのため、中央の 2 列の上下を交換することにより、1 行目は $-5 + 29 = +$

24 となり、4 行目は $-29 + 5 = -24$ となり、どちらも定和 34 となる。2 行目と 3 行目も同様である。

このようにして得られた配列は下図のようになる。

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

この方法で 8 次方陣を作ると、「コの字形、逆コの字形」を 2 回繰り返すような図になる。また、4 次方陣では中央の 2 列を上下逆順に入れ換えたが、8 次方陣の場合では、中央の 4 列（一般に、 n が全偶数のとき $\frac{n}{2}$ 列）を上下逆順に並べ換えれば 完成する。同様にして 12 次、16 次の方陣も作ることができる。

3.3.3 方法 3 : 定和をもち、かつ、直交する 2 つの補助方陣を利用する

8 次方陣の場合について説明する。

①補助方陣 A の作り方

まず、主対角線上に左上から順に 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 を入れる。次に、副対角線上にも右上から順に 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 を入れる。そして、各行には和が 9（一般的には $n + 1$ ）になるような 2 数を交互に 4 組ずつ入れる。ただし、左右対称に配置する。

②補助方陣 B の作り方

補助方陣 A をその主対角線に関して対称に移す。つまり、B は A の転置行列に相当する。

2つの補助方陣 A と B は下図のようになる。

A=

1	8	1	8	8	1	8	1
7	2	7	2	2	7	2	7
3	6	3	6	6	3	6	3
5	4	5	4	4	5	4	5
4	5	4	5	5	4	5	4
6	3	6	3	3	6	3	6
2	7	2	7	7	2	7	2
8	1	8	1	1	8	1	8

B=

1	7	3	5	4	6	2	8
8	2	6	4	5	3	7	1
1	7	3	5	4	6	2	8
8	2	6	4	5	3	7	1
8	2	6	4	5	3	7	1
1	7	3	5	4	6	2	8
8	2	6	4	5	3	7	1
1	7	3	5	4	6	2	8

これらを行列とみなして

$$M = n(A - E_n) + B$$

を各要素で計算してできる配列 M を構成すれば、次の 8 次方陣 M を得る。

M=

1	63	3	61	60	6	58	8
56	10	54	12	13	51	15	49
17	47	19	45	44	22	42	24
40	26	38	28	29	35	31	33
32	34	30	36	37	27	39	25
41	23	43	21	20	46	18	48
16	50	14	52	53	11	55	9
57	7	59	5	4	62	2	64

なお、この方法 3 を用いると、任意の半偶数方陣も作ることができた。

3. 4 半偶数方陣の作り方

n は半偶数 $n = 2(2m+1)$ とする。

3.4.1 方法 1 : $(2m+1)$ 次の奇数方陣の各マスに 2 次配列を取り込む方法

6 次方陣で説明する。 $6 = 2 \times 3$ より、次のような 3 次方陣を**基礎方陣**として用いる。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6 次方陣を 3×3 の基礎方陣の各マスに 2 次配列を入れていく。下図の 3 次方陣の①に 1~4 を、②の部分に 5~8, ③の部分に 9~12, ④の部分に 13~16, ⑤の部分に 17~20, ... というように 4 つずつ数を配置していく。ただし、それぞれの 2 次配列では「コの字形」に配置する。

④	⑨	②
③	⑤	⑦
⑧	①	⑥

これにより、次の 6 次配置が得られる。

13	14	33	34	5	6
16	15	36	35	8	7
9	10	17	18	25	26
12	11	20	19	28	27
29	30	1	2	21	22
32	31	4	3	24	23

すると、次の状況が起こる。

- ・ 列について、各列の和はすべて 111 であり、6 次方陣の定和になっている。
- ・ 行の和は、第 1 行から 1 行おきに 105

と 117 を繰り返す。6 次方陣の定和 111 から 6 だけの過不足がある。

- ・主対角線要素の和は 108 で 111 より 3 足りない。副対角線要素の和は 114 で 111 より 3 多い。

上記の過不足を解消するために、①、②、③、⑥、⑦、⑨に対応している 2 次配列の 1 列目の上下を入れ替えた。このようにすると各行、各列、両対角線の和が、定和の 111 になることがわかった。

13	14	33	34	5	6
16	15	36	35	8	7
9	10	17	18	25	26
12	11	20	19	28	27
29	30	1	2	21	22
32	31	4	3	24	23



13	14	36	34	8	6
16	15	33	35	5	7
12	10	17	18	28	26
9	11	20	19	25	27
29	30	4	2	24	22
32	31	1	3	21	23

3.4.2 方法 2：外周追加法

これは、全偶数方陣を核として、外周を一回り追加して、半偶数方陣を作る方法である。6 次方陣の場合は、4 次方陣の周りに外周をつけて、1 から $6^2 (=36)$ までの数のうち、初めの 10 個（一般には $2(n-1)$ 個）の 1~10 と終わりの 10 個の 27~36 を使って作る。核となる 4 次方陣は任意の 4 次方陣の各要素に 10 ずつ加え、11~ 26 で作る。また外周は向かい合った 2 数の和

を 37 とする。

例えば、下図の外周を用いるとする。

1	34	33	32	9	2
6					31
10					27
30					7
29					8
35	3	4	5	28	36

このとき、辺の 4 数の順序は任意であり、 $4! \times 4! = 576$ 通りある。また、四隅も多数が可能である。この方法で作った 6 次方陣は次のようなものがある。

1	34	33	32	9	2
6	11	25	24	14	31
10	22	16	17	19	27
30	18	20	21	15	7
29	23	13	12	26	8
35	3	4	5	28	36

なおこの方法を反復すると 10 次、12 次などの偶数方陣も作ることができる。

4. 今後の課題

今回は、魔方陣を場合分けして作る方法について調べたが、これからはそれらの方法のメカニズムについても考察していきたい。また n 次方陣の解法式の証明も挑戦したい。

5. 参考文献

- [1] 「魔方陣の世界」、大森清美、日本評論社(2013)

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。

約数の総和について

3年A組 小椋 晃一
指導教諭 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 3 年生は約数の総和について学習している。今回は過剰数の中で特別なものを見つけることを目的とした。その過程において、約数の総和に関する考察を行うことができたので紹介する。

キーワード 過剰数、メルセンヌ素数、素数、約数の総和、約数

2. 研究の背景と目的

約数の総和によって、1 以外の自然数は 3 種類に分類できる。完全数や過剰数の倍数が過剰数になることに気づいた私はこの分類を約数の総和を直接求めなくても行えるのではないかと考えた。

3. 研究内容

3. 1 定義

本稿では、**約数**とはその数自身を含めた正の約数のことを指す。また、自然数 n の**約数の総和**を $\sigma(n)$ と表す。例えば、12 の約数の総和は

$$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

より 28 となる。

また、自然数 n は、

- ・ $\sigma(n) > 2n$ となるとき**過剰数**
- ・ $\sigma(n) = 2n$ となるとき**完全数**
- ・ $\sigma(n) < 2n$ となるとき**不足数**

であるという。

$2^n - 1$ の形で表される素数を**メルセンヌ素数**という。例えば、3, 7, 31, ... などがあ

3. 2 基本的な命題

この節では、いくつかの基本的な命題を証明する。

命題 1

p を素数とすると、 p^n は不足数である。

(証明)

p^n の約数の総和を計算すると、

$$\begin{aligned}\sigma(p^n) &= p^0 + p^1 + p^2 + \cdots + p^n \\ &= \frac{(p^n - 1)}{p - 1} + p^n \\ &\leq (p^n - 1) + p^n < 2(p^n)\end{aligned}$$

より、 p^n は不足数である。(Q. E. D.)

命題 2

メルセンヌ素数でない素数は無数に存在する。

(証明)

背理法を用いる。いま、3 を法として議

論する。メルセンヌ素数は、

$$2^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0 \text{ または } 1$$

より、3 を法として 2 と合同な素数を考えればよい。 $p \equiv 2$ かつ $p \neq 2$ となる素数を有限個しかないと仮定して、順に

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, p_k$$

とする。このとき、 $3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2$ は 3 を法として 2 と合同であり、 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, p_k$ のいずれでも割り切れないので、合成数である。よって、素数 $q_1, q_2, \dots, q_n$ を用いて、

$$3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2 = q_1 q_2 \cdots q_n$$

と表すことができる。ある $i (1 \leq i \leq n)$ に対して $q_i \equiv 0$ となるとき、必然的に $q_i = 3$ となるが、 $3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2$ は 3 の倍数ではない。

また、ある $l (1 \leq l \leq n)$ に対して $q_l \equiv 2$ となるとき、 $q_l \neq 2$ より、 $1 \leq m \leq k$ となる整数 m を用いて、 $q_l = p_m$ となる。条件より、 q_l で $3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2$ を割り切れるが、 p_m で割り切れないので矛盾する。

よって、すべての $1 \leq j \leq k$ について、 $q_j \equiv 1$ とかける。すると、

$$3(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k) + 2 \equiv 2$$

に対して、 $q_1 q_2 \cdots q_n \equiv 1^n = 1$ となり、矛盾している。

したがって、メルセンヌ素数でない素数は無数に存在する。(Q. E. D.)

命題 3

自然数 n が $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ と素因数分解されるとき、

$$\sigma(n) =$$

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

(証明)

一般に、 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ の約数は次の式を展開したときの各項に現れる。

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1})$$

$$\times (1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2})$$

$$\times \cdots \times (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k})$$

ゆえに、

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

という式が得られる。(Q. E. D.)

なお、自然数 m で表せる p_m の指数が 1 のとき、その項は $p_m + 1$ となる。

命題 4

m, n を互いに素な自然数とすると、

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

(証明)

m, n がそれぞれ

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

$$n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} q_3^{\beta_3} \cdots q_l^{\beta_l}$$

と素因数分解できるとする。

m, n は互いに素であるから、 p_i, q_j は s

すべて相異なるため、命題 3 を用いると、

$$\sigma(mn) =$$

$$\left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} \right) \\ \times \left(\frac{q_1^{\beta_1+1}-1}{q_1-1} \frac{q_2^{\beta_2+1}-1}{q_2-1} \cdots \frac{q_l^{\beta_l+1}-1}{q_l-1} \right)$$

$$= \sigma(m)\sigma(n). \quad (\text{Q. E. D.})$$

この命題 4 は自然数の個数を増やしても同様のことがいえる。

定理 5

- (1) 完全数の倍数は過剰数である。
- (2) 過剰数の倍数は過剰数である。

(証明)

(1) 完全数を n とおき、その約数を昇順で

$n_1, n_2, n_3, \dots, n_{m-1}, n_m$ と表す。そして、

完全数の倍数を kn とする。このとき、

$$\sigma(n) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{m-1} + n_m.$$

kn の約数に 1 が含まれているのは自明であるから、 $k \neq 1$ より、

$$\sigma(kn) \geq 1 + kn_1 + kn_2 + \cdots + kn_m \\ > k\sigma(n)$$

なので、 $\sigma(kn) > k\sigma(n) = 2kn$.

(2) も同様の手段で示すことができる。

(Q. E. D.)

3. 3 偶数の原始過剰数

ここで定理 5 から、他の過剰数の倍数でなく、他の完全数の倍数でもない過剰数を考えようと思い至った。そのような数を**原始過剰数**と定義する。例えば、20, 70, 88, …などが相当する。このとき以下の定理が得られた。

命題 6.1

偶数の原始過剰数は無数に存在する。

(証明)

p を素数として、 $2^n p$ の形に素因数分解できる数を考える。

このとき、 $2^n < p < 2^{n+1} - 1$ を満たすように p をとると、 $p = 2^{n+1} - m = 2^n + k$ (m, k は自然数, $m > 1, k > 0$) と表せる。

ここで、命題 3 を用いて

$$\begin{aligned} \sigma(2^n p) &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times \frac{p^2-1}{p-1} \\ &= (2^{n+1}-1) \frac{(p+1)(p-1)}{p-1} \\ &= (2^{n+1}-1)(p+1) \\ &= 2^{n+1}p + 2^{n+1} - p - 1 \\ &= 2^{n+1}p + 2^{n+1} - (2^{n+1} - m) - 1 \\ &= 2(2^n p) + (m-1) > 2(2^n p) \end{aligned}$$

より、 $2^n p$ が過剰数であることがわかる。

次に、 $2^n p$ が原始過剰数でない過剰数であると仮定すると、次のいずれかが考えられる。

① $2^{n-1} p$ が過剰数または完全数

② 2^n が過剰数または完全数

ここで、②は命題 1 に反しているため、①について考える。

$$\begin{aligned} \sigma(2^{n-1} p) &= \frac{2^n-1}{2-1} \times \frac{p^2-1}{p-1} \\ &= (2^n-1)(p+1) \\ &= 2^n p + 2^n - p - 1 \\ &= 2^n p + 2^n - (2^n + k) - 1 \\ &= 2(2^{n-1} p) - (k+1) < 2^n p \end{aligned}$$

より、 $2^{n-1} p$ は不足数となる。

したがって、 $2^n p$ は原始過剰数である。

なお、 p が $p = 2^{n+1} - 1$ とかけるメルセンヌ素数であるとき、 $2^n p$ は完全数になるが、命題 2 より、 p として当てはまる数は無数に存在するため、 $2^n p$ と表せる数は無数に存在する。よって偶数の原始過剰数は無数に存在する。(Q. E. D.)

また、合成数は素数の倍数なので、命題 5 とあわせると次の命題が自明に成り立つ。

命題 6.2

奇数の不足数 D において、 $2^n D$ が過剰数となる n が存在する。

命題 6.3

異なる 2 つの素数 p, q について、
 $2^{n+1} < q < p < 2^{n+2} - 1$
 が成り立つとき、 $2^n pq$ は原始過剰数である。

(証明)

条件より、

$$2^{n+1} + 3 \leq p \leq 2^{n+2} - 3$$

$$2^{n+1} + 1 \leq q \leq 2^{n+2} - 5$$

となる。命題 3 より

$$\begin{aligned} \sigma(2^n pq) &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{p^2 - 1}{p - 1} \times \frac{q^2 - 1}{q - 1} \\ &= (2^{n+1} - 1)(p + 1)(q + 1) \\ &= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1 + p + q) \\ &\quad - (p + 1)(q + 1) \\ &= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1 + p + q) \\ &\quad - \frac{p+1}{2} \times (2q + 2) \end{aligned}$$

$$\geq 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1 + q + 2 + q)$$

$$- \frac{p+1}{2} \times (2q + 2)$$

$$= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(2q + 3)$$

$$- \frac{p+1}{2} \times (2q + 2)$$

$$> 2(2^n pq) + 2^{n+1}(2q + 3)$$

$$- 2^{n+1}(2q + 2)$$

$$> 2(2^n pq).$$

よって、 $2^n pq$ は過剰数であるとわかる。
 次に、 $2^n pq$ が原始過剰数でないと仮定すると、 2^n は不足数であり、次のいずれかの状況となる。

① $2^{n-1} pq$ が過剰数または完全数

② $2^n p$ が過剰数または完全数

③ $2^n q$ が過剰数または完全数

②, ③は命題 6.1 の証明における後半の議論に反するので、①について考える。

$$\begin{aligned} \sigma(2^{n-1} pq) &= (2^n - 1)(p + 1)(q + 1) \\ &= 2(2^{n-1} pq) + 2^n(1 + p + q) \\ &\quad - (p + 1)(q + 1) \\ &< 2(2^{n-1} pq) + 2^n(1 + 2p) \\ &\quad - 2^{n+2}(p + 1) \\ &= 2(2^{n-1} pq) - 2^{n+1}p - 3 \cdot 2^n \\ &< 2(2^{n-1} pq) \end{aligned}$$

より、 $2^{n-1}pq$ は不足数となる。

よって、 $2^n pq$ は原始過剰数である。

(Q. E. D.)

3. 4 奇数の原始過剰数

奇数の原始過剰数を議論するために、2つの補題を用意する。

補題 1 ([1])

素数の逆数和は正の無限大に発散する。

一般に、この補題 1 が成り立つ事実が知られており、命題 7 の証明に用いる。

補題 2

どの 2 つも互いに素な奇数の過剰数が無数に存在するとき、奇数の原始過剰数は無数に存在する。

(証明)

どの 2 つも互いに素な奇数の過剰数を順に $n_1, n_2, n_3, \dots$ とする。

原始過剰数の定義から、過剰数の約数には原始過剰数が少なくとも 1 つ存在することがわかる。

ここで、自然数 m に対して、 n_m の約数である原始過剰数のうちの 1 つを n'_m とする。すると、原始過剰数の列 $n'_1, n'_2, n'_3, \dots$ を得る。 $n_1, n_2, n_3, \dots$ は互いに素であるから、それぞれを素因数分解したときに現れる素因数はすべて相異なる。

ゆえに、 $n'_1, n'_2, n'_3, \dots$ もすべて互いに素である。よって、 $n'_1, n'_2, n'_3, \dots$ は相異なる原始過剰数といえる。

さらに、奇数の約数は奇数に限られるため、奇数の原始過剰数ともいえる。よって、

奇数の原始過剰数は無数に存在する。

(Q. E. D.)

命題 7

奇数の原始過剰数は無数に存在する。

(証明)

素数を順に $p_1, p_2, p_3, \dots$ としたとき、

補題 1 より、任意の k について

$$\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}} + \dots + \frac{1}{p_m} \geq 1$$

を満たす m が存在する。

$p_k p_{k+1} p_{k+2} \dots p_m$ と素因数分解できる自然数を n とする。つまり、

$$n = p_k p_{k+1} p_{k+2} \dots p_m.$$

このとき、 $k \leq i \leq m$ を満たす i について

$\frac{n}{p_i}$ は n の約数であり、約数の総和は約数 p_i

の部分 and より大きいため、

$\sigma(n)$

$$\begin{aligned} &\geq n + \frac{n}{p_k} + \frac{n}{p_{k+1}} + \dots + \frac{n}{p_m} + 1 \\ &= n + n \left(\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} \right) + 1 \\ &\geq n + n + 1 > 2n \end{aligned}$$

より、 n は過剰数である。

ここで、奇数の n について考えるため、

$k_1 = 2$ とし、 $p_{k_1} p_{k_1+1} p_{k_1+2} \dots p_{m_1}$ と素因数分解できる自然数を n_1 とする。また、

$k_2 = m_1 + 1$ として、 $p_{k_2} p_{k_2+1} p_{k_2+2} \dots p_{m_2}$

と素因数分解できる自然数を n_2 とする。また、

$k_3 = m_2 + 1$ とし、 $p_{k_3} p_{k_3+1} p_{k_3+2} \dots p_{m_3}$ と素

因数分解できる自然数を n_3 とする。この操作を繰り返して、 $n_1, n_2, n_3, \dots$ を定義していく。すると $n_1, n_2, n_3, \dots$ は相異なる素因数をもつため、互いに素であり、奇数の過剰数である。

よって、補題 2 から奇数の原始過剰数は無数にあるといえる。(Q. E. D.)

命題 8

異なる素数 p, q を用いて $p^\alpha q^\beta$ とかける奇数の過剰数は存在しない。

(証明)

$3 \leq p, q$ として、命題 3 から、

$$\begin{aligned}\sigma(p^\alpha q^\beta) &= \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \times \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} \\ &< \frac{p}{p-1} \times \frac{q}{q-1} \times p^\alpha q^\beta \\ &\leq \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times p^\alpha q^\beta \\ &= \frac{15}{8} p^\alpha q^\beta < 2p^\alpha q^\beta\end{aligned}$$

より、 $p^\alpha q^\beta$ は不足数となる。(Q. E. D.)

命題 9

相異なる素数 p, q, r, s を用いて $pqrs$ とかける奇数は不足数である。

(証明)

$p < q < r < s$ としても一般性を失わない。このとき、条件を式でまとめると

$$3 \leq p, 5 \leq q, 7 \leq r, 11 \leq s$$

となる。 $n = pqrs$ として、 n に対する約数の割合を求めると、

$$\sigma(n)$$

$$\begin{aligned}&\leq \frac{n}{1} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} + \frac{n}{7} + \frac{n}{11} + \frac{n}{15} + \frac{n}{21} + \frac{n}{33} \\ &\quad + \frac{n}{35} + \frac{n}{55} + \frac{n}{77} + \frac{n}{105} + \frac{n}{165} \\ &\quad + \frac{n}{231} + \frac{n}{385} + \frac{n}{n}\end{aligned}$$

$$< 1.994n + 1.$$

もし n が不足数でないならば、 $\sigma(n) \geq 2n$ なので、 $1.994n + 1 > 2n$ が成り立つ。 $0.006n < 1$ より、 $n < 167$ とならねばならない。

一方、条件から $n \geq 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$ となるため、奇数の $pqrs$ は不足数である。

(Q. E. D.)

なお、素因子が 5 つの場合は原始過剰数が存在し、 $15015 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ が最少のものである。

3. 4 実際の値

原始過剰数は偶数であるものが多く、奇数であるもののうち、最少のものは 945 となる。一の位が 1, 3, 7, 9 であるものは表に載っていないが、命題 7 の方法で生成するとそのような原始過剰数が少なくとも一種類現れる。おそらくすべて現れると考えている。

巻末に、5000 以下の原始過剰数の表を掲載する。 $2^n p$ の形に表せるものは太字で表記している。

4. 今後の課題

今回、原始過剰数の存在証明を行ったが、偶数については素因子の個数の一般化が、奇数についてはより具体的な分類が行えない

かった。今後はこれらについても考えていきたい。

5. 参考文献

- [1] 「数論の精選 104 問」、Titu Andreescu Dorin, Andrica, Zuming Feng 著、小林一章、鈴木晋一監訳、清水俊宏、西本将樹訳、朝倉書店

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の方々にも協力や助言をいただきました。ありがとうございました。

表 1 5000 以下の原始過剰数

20 = 2²·5	945=3 ³ ·5·7	2205=3 ² ·5·7 ²	4030=2·5·13·31
70=2·5·7	1184 = 2⁵·37	2210=2·5·13·17	4070=2·5·11·37
88 = 2³·11	1312 = 2⁵·41	2470=2·5·13·19	4095=3 ² ·5·7·13
104 = 2³·13	1376 = 2⁵·43	2530=2·5·11·23	4216=2 ³ ·17·31
272 = 2⁴·17	1430=2·5·11·13	2584=2 ³ ·17·19	4288 = 2⁶·67
304 = 2⁴·19	1504 = 2⁵·47	2990=2·5·13·23	4510=2·5·11·41
368 = 2⁴·23	1575=3 ² ·5 ² ·7	3128=2 ³ ·17·23	4544 = 2⁶·71
464 = 2⁴·29	1696 = 2⁵·53	3190=2·5·11·29	4672 = 2⁶·73
550 = 2⁴·31	1870=2·5·11·17	3230=2·5·17·19	4712=2 ³ ·19·31
572=2 ² ·11·13	1888 = 2⁵·59	3410=2·5·11·31	4730=2·5·11·43
650=2·5 ² ·13	1952 = 2⁵·61	3496=2 ³ ·19·23	
748=2 ² ·11·17	2002=2·7·11·13	3770=2·5·13·29	※太字は 2 ⁿ p の形
836=2 ² ·11·19	2090=2·5·11·19	3944=2 ³ ·17·29	

n 角形の形の一意性

3 年 A 組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 3 年生は図形の性質について研究している。今回は、 n 角形の形が 1 つに決まる条件について考えた。

キーワード 角、辺の決まっている場所、領域に分ける

2. 研究の背景と目的

三角形の形が 1 つに決まる条件は、「すべての辺の長さが決まっている」、「2 辺の長さとその間の角の大きさが決まっている」、「1 辺の長さとその両端の角の大きさが決まっている」などいうように、広く知られていることであるが、それらの条件を一般化し、 n 角形で考えるとどのような条件になるのか興味を持った。

3. 研究内容

今回の研究で、 n 角形の形が 1 つに決まる条件を長さが決まっている辺の本数によって分けた。ただし、今回は凹多角形については考えないことにした。

3. 1 1 種類目の条件

長さが決まっている辺が $n-1$ 本の場合を考える。

(1) $n-1$ 本の辺の長さが決まっている n 角形において、それらの間の $n-2$ 個の角の大きさが決まれば、その形は 1 つに決まる。

(2) 辺 A_1A_n 以外の $n-1$ 本の辺の長さが決まっている n 角形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}\cdots A_n$ において、 $\angle A_2A_1A_n$ と $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 以外の $n-2$ 個の角の大きさが決まっているとする。

・ $\triangle A_1A_nA_k$ が直角三角形である

・ $\triangle A_1A_nA_k$ が鋭角三角形のとき、

$$A_nA_k \sin \angle A_1A_nA_k = A_1A_k,$$

あるいは $A_1A_k \geq A_nA_k$

・ $\triangle A_1A_nA_k$ が鈍角三角形のとき、

$$A_1A_k < A_nA_k$$

のいずれかが成り立てば、この n 角形の形は 1 つに決まる。

(3) 辺 A_1A_n 以外の $n-1$ 本の辺の長さが決まっている n 角形 $A_1A_2\cdots A_i\cdots A_k\cdots A_n$ において、 $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ と $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 以外の $n-2$ 個の角の大きさが決まっているとき、この n 角形の形は 1 つに決まる。

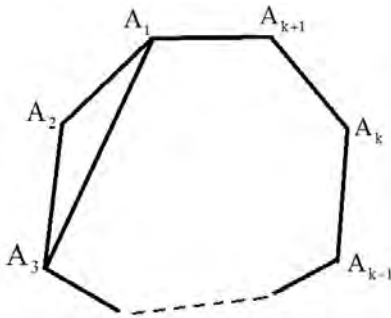
(証明)

(1) 数学的帰納法で示す。

① $n=3$ の場合、2 辺とその間の角の大きさが決まっているので、(1) は成り立つ。

② $n=k$ において、(1) が成り立つと仮定す

る。下図のような $k+1$ 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$ を考え、辺 A_kA_{k+1} 以外の辺の長さと $\angle A_1A_{k+1}A_k$ と $\angle A_{k+1}A_kA_{k-1}$ 以外の角の大きさが決まっているとする。点 A_1 と点 A_3 を結ぶと、 $\triangle A_1A_2A_3$ は 2 辺とその間の角が決まっているので、形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_{3n} の長さは 1 つに決まる。また、 $\angle A_2A_1A_3$ と $\angle A_2A_3A_1$ の大きさも 1 つに決まるので、 $\angle A_{k+1}A_1A_3$ と $\angle A_1A_3A_4$ の大きさも 1 つに決まる。ゆえに、 $k-1$ 本の辺の長さとその間の $k-2$ 個の角の大きさが決まっている k 角形 $A_1A_3A_4\cdots A_kA_{k+1}$ ができる。仮定より、この多角形の形は 1 つに決まる。



したがって、 $n=k+1$ においても (1) は成り立つ。

①, ②より、題意は示された。(Q. E. D.)

(2) まず、下の補題 1 から証明する。

補題 1

$\triangle ABC$ において、辺 AC , AB の長さと $\angle ABC$ の大きさが決まっているとする。このとき、

- ・ $\angle ABC$ が直角である
- ・ $\angle ABC$ が鋭角であり、 $AC \geq AB$ であるか、 $AB \sin \angle ABC = AC$ である
- ・ $\angle ABC$ が鈍角である

のいずれかが成り立てば、この三角形の形は 1 つに決まる。逆に、その他の場合は形

が 1 つに決まらない。

(補題の証明)

(i) $\angle ABC$ が直角のとき

直角三角形 ABC において、斜辺と他の 1 辺の長さが決まっているので、この三角形の形は 1 つに決まる。

(ii) $\angle ABC$ が鋭角のとき

(ii-1) $AC \geq AB$ である場合

$AC=AB$ の場合、三角形 ABC は二等辺三角形となるので、 $\angle CAB$ の大きさは 1 つに決まる。よって、2 辺とその間の角の大きさが 1 つに決まっているので、三角形 ABC の形は 1 つに決まる。

$AC > AB$ の場合、まず、辺 AB の長さは決まっている。次に、 $\angle CBA$ の大きさは 1 つに決まっているので、2 点 B, C がのっている直線 l が 1 つに決まる (対称性により、辺 AB を対称軸として直線 l を折り返したときにできる直線は無視してよい)。よって、条件を満たす点 C の位置は直線 l と、点 A が中心で半径が辺 CA の円との交点である。その交点は 2 つできるが、 $\angle ABC$ が鋭角であることから、 $\triangle ABC$ の形は 1 つに決まる。

(ii-2) $AB \sin \angle ABC = AC$ である場合

点 A から直線 BC へ降ろした垂線の足を H とすると、 $AB \sin \angle ABC = AC$ より、 $AH = AC$ であるから、 $AH \perp BC$, $AH=AC$ なので、点 C と点 H は一致する。

よって、 $\angle ACB = 90^\circ$ であるから、直角三角形 ABC において、斜辺と他の 1 辺の長さが決まっているので、この三角形の形は 1 つに決まる。

(iii) $\angle ABC$ が鈍角のとき

$AB < AC$ より、(ii-1)の後半と同様に、直線 l と点 A を中心とする半径が AC の円と

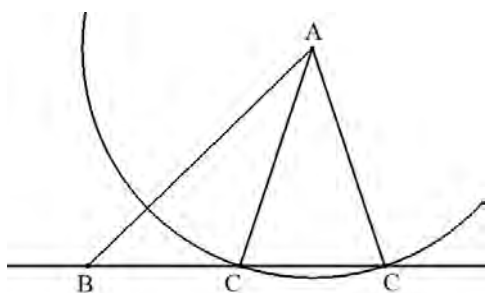
の交点は2つあるが、 $\angle ABC$ が鈍角であることから、 $\triangle ABC$ の形は1つに決まる。

逆に、それら以外の場合を考える。

(iv) $\angle ABC$ が鋭角のとき

(iv-1) $AB \sin \angle ABC < AC < AB$ のとき

条件より、辺 AC の長さは点 A と直線 l の距離よりも長く、辺 AB の長さよりも短い。よって、直線 l と点 A を中心とする半径が辺 AC の円の交点は下図のように、2つ存在する、ゆえに、この三角形の形は1つに決まらない。



(iv-2) $AB \sin \angle ABC > AC$ のとき

点 A と直線 l の距離は $AB \sin \angle ABC$ であるから、 $AB \sin \angle ABC > AC$ のとき、直線 l と点 A を中心とする半径が AC の円の交点は存在しない。ゆえに、このような三角形は存在しない。

(i),(ii),(iii),(iv)より、補題は示された。

(Q. E. D.)

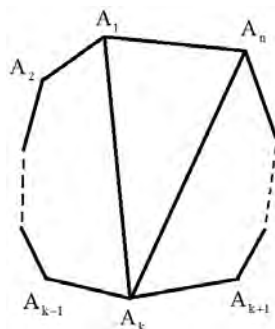
(2) の証明を行う。

(証明) 下図において、点 A_1 と点 A_k , 点 A_n と点 A_k を結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3 \cdots A_k$ と多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2} \cdots A_nA_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_k , 辺 A_nA_k 以外の辺とそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は1つにきまる。ゆえに、辺 A_1A_k , 辺 A_nA_k の長さは1つに決まる。

また、 $\angle A_{n-1}A_nA_k$ の大きさも1つに決ま

るので、 $\angle A_1A_nA_k$ の大きさも1つに決まる。つまり、 $\triangle A_1A_nA_k$ において、辺 A_1A_k と辺 A_nA_k の長さと $\angle A_1A_nA_k$ の大きさが決まっているので、補題1より、題意は示された。

(Q. E. D.)



(3) まず、下の補題2から証明する。

補題2

四角形 $ABCD$ において、辺 AB , BC , CD の長さと $\angle DAB$, $\angle ADC$ の大きさが決まっているとき、この四角形の形は1つに決まる。

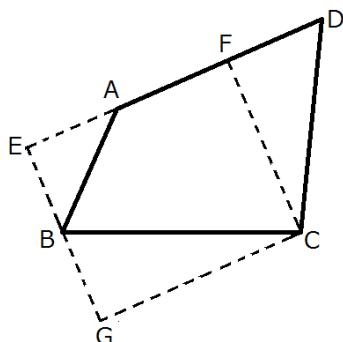
(補題2の証明)

点 B と C からそれぞれ直線 AD へ降ろした垂線の足をそれぞれ E , F とする。そして、点 C から直線 EB へ降ろした垂線の足を G とする。すると、 $\angle BAD$ の大きさは決まっているので、 $\angle BAE$ の大きさも1つに決まる。よって、直角三角形 ABE において、斜辺の長さと1つの鋭角の大きさが決まっているので、直角三角形 ABE の形は1つに決まる。ゆえに、辺 AE と辺 BE の長さは1つに決まる。同様に、直角三角形 CDF において、斜辺と1つの鋭角が決まっているので、形は1つに決まる。したがって、辺 DF と辺 CF の長さは1つに決まる。

一方、四角形 $EGCF$ は長方形であるから、

FC=EG である。よって、線分 BG の長さも 1 つに決まる。ゆえに、直角三角形 BGC において、斜辺の長さ与其他の一边の長さが決まっているので、直角三角形 BGC の形は 1 つに決まる。したがって、辺 CG の長さは 1 つに決まる。CG=FE であり、線分 EA と DF の長さは決まっていることから、辺 AD の長さも 1 つに決まる。ここで、点 A と点 C を結ぶと、 $\triangle ADC$ において、2 辺の長さとその間の角の大きさが決まっているので、 $\triangle ADC$ の形は 1 つに決まる。ゆえに、辺 AC の長さも 1 つに決まる。したがって、 $\triangle ABC$ において、すべての辺の長さが決まっているので、 $\triangle ABC$ の形は 1 つに決まる。よって、四角形 ABCD の形は 1 つに決まる。

(Q. E. D.)

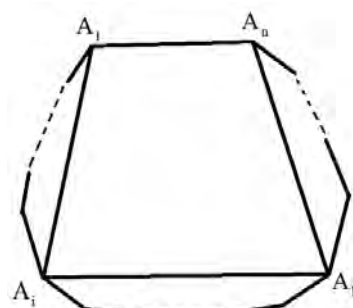


(3) の証明を行う。

(証明) 下図の n 角形で、点 A_1 と点 A_i , 点 A_n と点 A_k , 点 A_i と点 A_k を結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_i$ と多角形 $A_iA_{i+1}\cdots A_{k-1}A_k$

($k=i+1$ のときは存在しない) と多角形 $A_kA_{k+1}\cdots A_{n-1}A_n$ は、それぞれ、辺 A_1A_i , 辺 A_iA_k , 辺 A_kA_n 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさはすべて決まっているので、これらの多角形の形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_i , 辺 A_iA_k , 辺 A_kA_n の長さは 1 つに決まる。また、 $\angle A_2A_1A_i$, $\angle A_{n-1}A_nA_k$

の大きさも 1 つに決まるので、 $\angle A_nA_1A_i$, $\angle A_1A_nA_k$ の大きさも 1 つに決まる。よって、四角形 $A_1A_iA_kA_n$ において、辺 A_1A_i , 辺 A_iA_k , 辺 A_kA_n の長さと $\angle A_nA_1A_i$, $\angle A_1A_nA_k$ の大きさが決まっているので、補題 2 より、四角形 $A_1A_iA_kA_n$ の形は 1 つに決まる。よって、示された。(Q. E. D.)

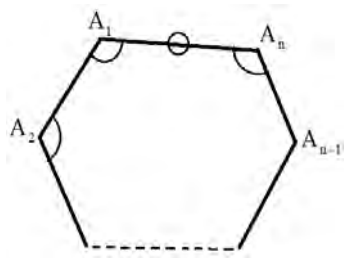


大きさが決まっている角が $n-2$ 個以上の場合、 n 角形の形が 1 つに決まることは分かったが、大きさが決まっている角が $n-3$ 個以下である場合、形が 1 つに決まらない。実際には、決まっている角の個数が $n-3$ である場合を証明すれば十分である。そして、大きさが決まっていない角の配置により、以下の 9 通りのパターンに分けることができる。

本稿では、(B), (D), (H) の場合について、 n 角形の形が 1 つに決まらないことを証明する。その他の場合についても、大きさが決まっていない角の頂点や長さが決まっていない辺を結ぶことにより、形が決まらないことを証明することができる。なお、図では長さの決まっていない辺や大きさが決まっていない角にマークを付けている。

(A) 大きさが決まっていない 3 つの角がすべて隣り合っており、そのうちの 2 つは長さが決まっていない辺と長さが決まってい

る辺にはさまれている場合

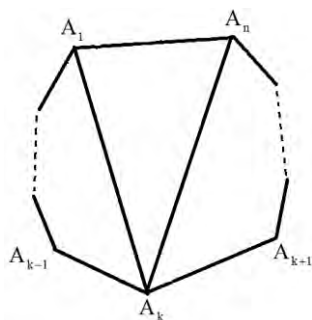


(B) 大きさが決まっていない 3 つの角のうち、2 つは隣り合っているが、1 つは隣り合っていない。そして、隣り合っている 2 つの角は、長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている場合

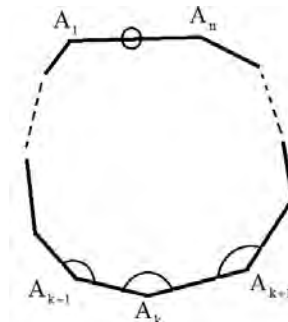
(B の証明)

下図の n 角形 $A_1A_2\cdots A_k\cdots A_n$ において、辺 A_1A_n 以外の辺の長さが決まっており、

$\angle A_2A_1A_n$, $\angle A_1A_nA_{n-1}$, $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 以外の角の大きさが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_k , 点 A_n と点 A_k をそれぞれ結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k$, 多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_k , 辺 A_nA_k 以外の辺とそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_k , 辺 A_nA_k の長さも 1 つに決まるが、 $\triangle A_1A_kA_n$ の内角の大きさは 1 つも決まらないので、 $\triangle A_1A_kA_n$ の形は 1 つに決まらない。ゆえに、この n 角形の形は 1 つに決まらない。(Q. E. D.)



(C) 大きさが決まっていない 3 つの角がすべて隣り合っているが、どれも 2 つの長さが決まっている辺にはさまれている場合



(D) 大きさが決まっていない 3 つの角はすべて隣り合っておらず、どれも 2 つの長さが決まっている辺にはさまれている場合

(D の証明)

下図の n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ において A_1A_n 以外の辺の長さが決まっており、

$$\begin{aligned} \angle A_{i-1}A_iA_{i+1} \quad (1 < i < n-4), \\ \angle A_{j-1}A_jA_{j+1} \quad (3 < j < n-2), \\ \angle A_{k-1}A_kA_{k+1} \quad (5 < k < n) \end{aligned}$$

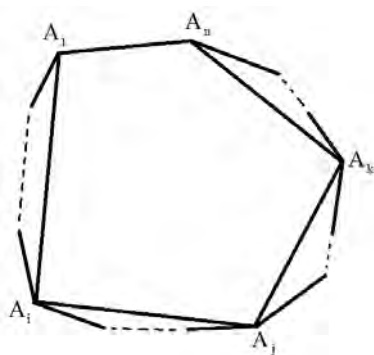
以外の角の大きさが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_i , 点 A_i と点 A_j , 点 A_j と点 A_k , 点 A_k と点 A_n をそれぞれ結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_{i-1}A_i$, 多角形 $A_iA_{i+1}A_{i+2}\cdots A_{j-1}A_j$, 多角形 $A_jA_{j+1}A_{j+2}\cdots A_{k-1}A_k$, 多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_i , 辺 A_iA_j , 辺 A_jA_k , 辺 A_kA_n 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_i , 辺 A_iA_j , 辺 A_jA_k , 辺 A_kA_n の長さも 1 つに決まる。また、 $\angle A_2A_1A_i$, $\angle A_{n-1}A_nA_k$ の大きさも 1 つに決まるので、 $\angle A_nA_1A_i$ と $\angle A_1A_nA_k$ の大きさも 1 つに決まる。

ところが、五角形 $A_1A_iA_jA_kA_n$ は、辺 A_1A_n

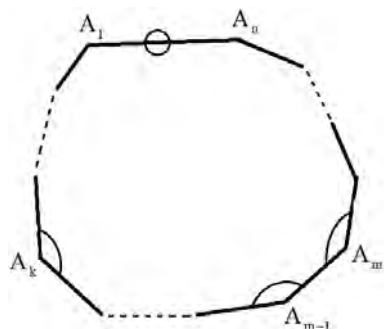
以外の 4 つの辺の長さ と $\angle A_n A_1 A_i$ と

$\angle A_1 A_n A_k$ の大きさが決まっているが、このような条件を満たす五角形は複数考えられるので、五角形 $A_1 A_i A_j A_k A_n$ の形は 1 つに決まらない。

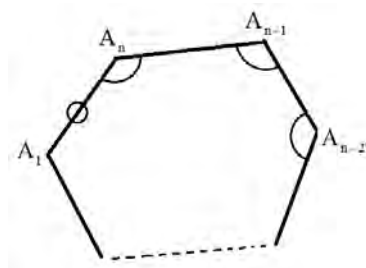
ゆえに、この n 角形の形は 1 つに決まらない。(Q. E. D.)



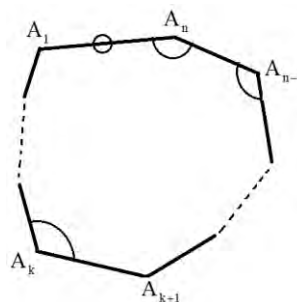
(E) 大きさが決まっていなかった角のうち、2 つは隣り合っているが、1 つは隣り合っておらず、どれも 2 つの長さが決まっている辺にはさまれている場合



(F) 大きさが決まっていなかった 3 つの角はすべて隣り合っており、そのうちの 1 つだけが長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている場合



(G) 大きさが決まっていなかった角のうち、2 つは隣り合っているが、1 つは隣り合っておらず、隣り合っている 2 つの角のうち 1 つは、2 つの長さが決まっている辺にはさまれているが、あとの 1 つは長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている場合



(H) 大きさが決まっていなかった 3 つの角はすべて隣り合っておらず、そのうちの 1 つだけ、長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている場合

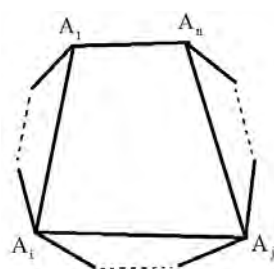
(H の証明)

下図の n 角形 $A_1 A_2 A_3 \cdots A_n$ において、 $A_1 A_n$ 以外の辺の長さが決まっており、 $\angle A_{n-1} A_n A_1$, $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$ ($1 < i < n-3$), $\angle A_{j-1} A_j A_{j+1}$ ($3 < j < n-1$) 以外の角の大きさが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_i , 点 A_i と点 A_j , 点 A_j と点 A_n をそれぞれ結ぶと、多角形 $A_1 A_2 A_3 \cdots A_{i-1} A_i$, 多角形 $A_i A_{i+1} A_{i+2} \cdots A_{j-1} A_j$, 多角形 $A_j A_{j+1} A_{j+2} \cdots$

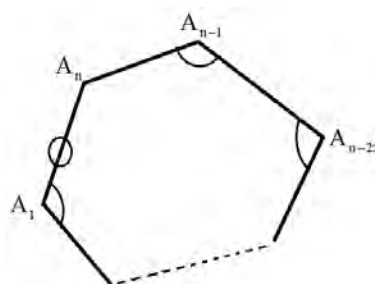
$A_{n-1}A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_i , 辺 A_iA_j , 辺 A_jA_n 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_i , 辺 A_iA_j , 辺 A_jA_n の長さも 1 つに決まる。 $\angle A_2A_1A_i$ の角の大きさも 1 つに決まるので、 $\angle A_nA_1A_i$ の大きさも 1 つに決まる。

ところが、 $\triangle A_1A_iA_n$ は、辺 A_1A_i の長さと $\angle A_nA_1A_i$ の大きさしか決まっておらず、 $\triangle A_nA_iA_j$ は、辺 A_iA_j と辺 A_jA_n の長さしか決まっていないので、どちらの三角形も形は 1 つに決まらない。

ゆえに、この n 角形の形は 1 つに決まらない。(Q. E. D.)



(I) 大きさが決まっていない角のうち、2 つは隣り合っているが、そのうちの 1 つは隣り合っておらず、その隣り合っていない角は長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている。また、それに隣り合う、2 つの長さが決まっている辺にはさまれている角も大きさが決まっている場合



3. 2 種類目の条件

すべての辺の長さが決まっている場合を考える。

辺の長さがすべて決まっている n 角形において、 $n-3$ 個以上の角の大きさが決まれば、その形は 1 つに決まる。

(証明の方針)

[1] $n-3$ 個以上の角の大きさが決まれば形が 1 つに決まることを証明するには、 $n-3$ 個の角の大きさが決まっているときに、形が 1 つに決まることを証明すれば十分である。

[2] $n-3$ 個の角の大きさが決まっているということは、3 個の角の大きさが決まっていないということであるが、それらの角がどこに配置されているかに応じて、3 つの場合に分けて考える。

命題 A

大きさが決まっていない 3 個の角がすべて隣り合っているとき、形は 1 つに決まる。

(証明)

数学的帰納法で示す。

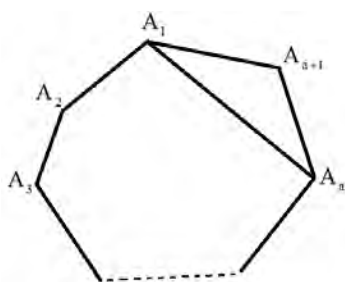
① 三角形($n=3$)の場合、3 辺の長さが決まっているので、形は 1 つに決まる。

② $n-a$ において、命題 A が成り立つと仮定する。下図のように、すべての辺の長さが決まっている $a+1$ 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_aA_{a+1}$ を考え、 $\angle A_2A_1A_n$, $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_2A_3A_4$ 以外の角の大きさが決まっているとする。

次に、点 A_1 と点 A_a を結ぶ。すると、 $\triangle A_1A_{a+1}A_a$ は、2 辺とその間の角の大きさが決まっているので、その形は 1 つに決まる。よって、線分 A_1A_a の長さは 1 つに決まる。

また、 $\angle A_{a+1}A_aA_1$ の大きさも 1 つに決まるので、 $\angle A_1A_aA_{a-1}$ の大きさも 1 つに決まる。ゆえに、すべての辺の長さと $a-3$ 個の角の大きさが決まっている a 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_a$ ができる。仮定より、この多角形の形は 1 つに決まる。したがって、 $n=a+1$ のときも命題は成り立つ。

①, ②より、題意は示された。(Q. E. D.)



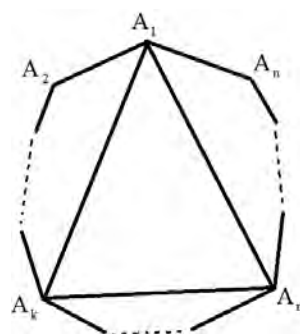
命題 B

大きさが分からない 3 つの角がすべて隣り合っていないとき、形は 1 つに決まる。

(証明)

下図のようなすべての辺が決まっている n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ を考え、 $\angle A_nA_1A_2$, $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$, $\angle A_{m-1}A_mA_{m+1}$ の大きさがわからないとする。そして、点 A_1 と点 A_k , 点 A_k と点 A_m , 点 A_m と点 A_n を結んで、 n 角形を 4 つの領域に分ける。すると、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_k$, 多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}\cdots A_m$, 多角形 $A_mA_{m+1}A_{m+2}\cdots A_nA_1$ はそれぞれ、辺 A_1A_k , 辺 A_kA_m , 辺 A_mA_1 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_k , 辺 A_kA_m , 辺 A_mA_1 の長さも 1 つに決まる。

ゆえに、 $\triangle A_1A_kA_m$ はすべての辺の長さが決まっているので、形は 1 つに決まる。したがって、 n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ の形は 1 つに決まる。(Q. E. D.)



命題 C

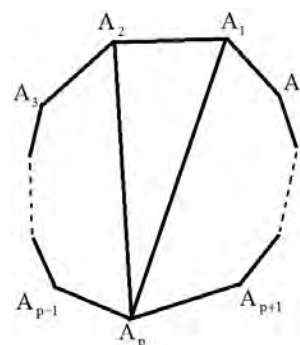
大きさが分からない角のうち、2 つだけが隣り合っているとき、形は 1 つに決まる。

(証明)

下図のような n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ を考え、 $\angle A_nA_1A_2$, $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_{p-1}A_pA_{p+1}$ の角の大きさが決まっていなとする。そして、点 A_1 と点 A_p , 点 A_2 と点 A_p をそれぞれ結び、 n 角形を 3 つの領域に分ける。

すると、多角形 $A_2A_3A_4\cdots A_{p-1}A_p$, 多角形 $A_1A_pA_{p+1}\cdots A_n$ はそれぞれ辺 A_2A_p , 辺 A_1A_p 以外のすべての辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの形は 1 つに決まる。よって、辺 A_2A_p , 辺 A_1A_p の辺の長さも 1 つに決まる。

ゆえに、 $\triangle A_1A_2A_p$ はすべての辺の長さが決まっているので形は 1 つに決まる。したがって、 n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ の形は 1 つに決まる。(Q. E. D.)



命題 A, 命題 B, 命題 C より、すべての辺の長さが決まっている n 角形において、 $n-3$ 個以上の角の大きさが決まれば形は 1 つに決まることが示された。

では、逆に、 $n-4$ 個以下しか角の大きさが決まっていない場合、形は 1 つに決まらないことを証明する。

$n-4$ 個の角の大きさが決まっているとき、形は 1 つに決まらないことを証明すれば十分である。そして、大きさが決まっていない 4 個の角の配置により、5 つのパターンに分けることができる。

ここでは、[A], [B] の場合について、 n 角形の形が 1 つに決まらないことを証明する。[C], [D], [E] の場合も [A], [B] と同様に、大きさが決まっていない角の頂点を結ぶことで、形が 1 つに決まらないことを証明できる。

[A] 決まっていない 4 つの角がすべて隣り合っている場合

([A] の証明)

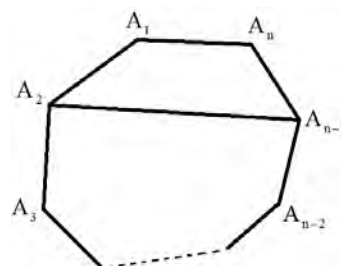
下図のような n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ を考え、 $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_2A_1A_n$, $\angle A_1A_nA_{n-1}$,

$\angle A_nA_{n-1}A_{n-2}$ 以外の角の大きさが決まっているとする。そして、点 A_2 と点 A_{n-1} を結ぶと、多角形 $A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}$ は、辺 A_2A_{n-1} 以外のすべての辺の長さと、それらの間の角の大きさが決まっているので、形は 1 つに決まる。

よって、辺 A_2A_{n-1} の長さも 1 つに決まり、四角形 $A_1A_2A_{n-1}A_n$ はすべての辺の長さが決まっているが、内角は 1 つも大きさが決まっていないので、四角形 $A_1A_2A_{n-1}A_n$ の形は 1 つに決まらない。ゆえに、この n 角形の形は 1 つに決まらない。実際、同じ条件を満

たす別の n 角形は容易に考えられる。

(Q. E. D.)



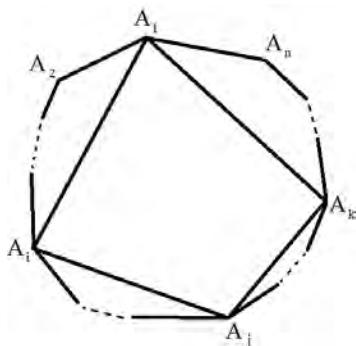
[B] 大きさが決まっていない 4 つの角が、すべて隣り合っていない場合

([B] の証明)

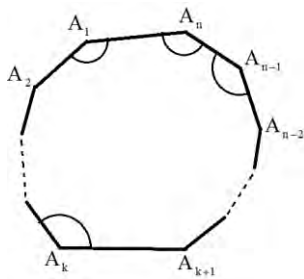
下図のような n 角形 $A_1A_2\cdots A_i\cdots A_j\cdots A_k\cdots A_n$ を考え、 $\angle A_2A_1A_n$, $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $\angle A_{j-1}A_jA_{j+1}$, $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 以外のすべての角の大きさが決まっているとする。そして、点 A_1 , 点 A_i , 点 A_j , 点 A_k を結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_i$, 多角形 $A_iA_{i+1}A_{i+2}\cdots A_j$, 多角形 $A_jA_{j+1}A_{j+2}\cdots A_k$, 多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}\cdots A_nA_1$ はそれぞれ、辺 A_1A_i , 辺 A_iA_j , 辺 A_jA_k , 辺 A_kA_1 以外のすべての辺の長さとそれらの間のすべての角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_i , 辺 A_iA_j , 辺 A_jA_k , 辺 A_kA_1 の長さも 1 つに決まるが、四角形 $A_1A_iA_jA_k$ の内角の大きさは、1 つも決まっていないので、四角形 $A_1A_iA_jA_k$ の形は 1 つに決まらない。ゆえに、この n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ の形は 1 つに決まらない。

実際、四角形 $A_1A_iA_jA_k$ に対して、これと 4 つの同じ辺の長さを持つ四角形を考える（これは容易にできる）ことで同じ条件を満たす n 角形を作ることができる。

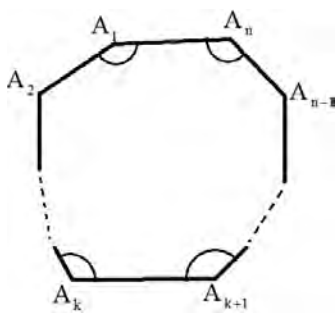
(Q. E. D.)



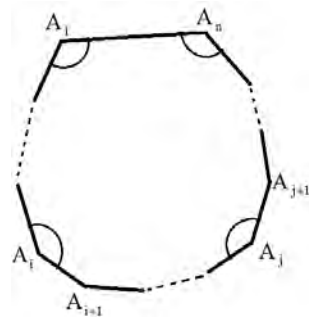
[C] 大きさが決まっていない4つ角のうち、3つは隣り合っていて、1つは隣り合っていない場合



[D] 大きさが決まっていない4つの角のうち、2つが隣り合っているが、他の2つの角も別に隣り合っている場合のうち、[A]でない場合



[E] 大きさが決まっていない4つの角のうち、2つが隣り合っているが、他の2つの角はどれにも隣り合っていない場合



3. 3 3種類目の条件

長さが決まっている辺が $n-2$ 本の場合を考える。

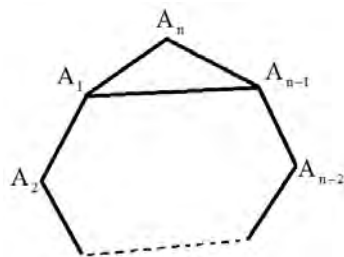
(I) $n-1$ 個の角の大きさが決まっている n 角形において、隣り合っている2つの辺以外の $n-2$ 個の辺の長さが決まれば形は1つに決まる。

(II) $n-1$ 個の角の大きさが決まっている n 角形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}\cdots A_n$ において、辺 A_1A_n と辺 A_kA_{k+1} 以外の $n-2$ 本の辺の長さが決まっているとき、辺 A_1A_k と辺 A_nA_{k+1} が平行でなければ形は1つに決まる。

(I の証明)

多角形の内角の和は一定なので、 $n-1$ 個の角の大きさが決まればもうひとつの角の大きさも1つに決まる。よって、 n 角形の内角はすべて決まっているとしてよい。下図のようなすべての角の大きさが決まっている n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ を考え、辺 A_1A_n と辺 A_nA_{n-1} 以外の辺の長さが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_{n-1} を結ぶ。すると、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}$ は、辺 A_1A_{n-1} 以外の辺と、それらの間の角の大きさが決まっているので、3. 1節の条件(1)より、形が1つに決まる。よって、辺 A_1A_{n-1} の長

さは 1 つに決まる。また、 $\angle A_2A_1A_{n-1}$ と $\angle A_1A_{n-1}A_{n-2}$ の大きさも 1 つに決まるので、 $\angle A_nA_1A_{n-1}$ と $\angle A_nA_{n-1}A_1$ の大きさも 1 つに決まる。ゆえに、1 辺とその両端の角が決まっているので、 $\triangle A_1A_{n-1}A_n$ の形も 1 つに決まる。(Q. E. D.)



(Ⅱ) を証明するために、次の補題 3 から証明する。

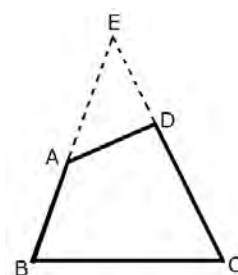
補題 3

すべての角の大きさが決まっている四角形 ABCD において、辺 AD と辺 BC の長さが決まっているとする。辺 AB と辺 CD が平行でなければ形は 1 つに決まる。

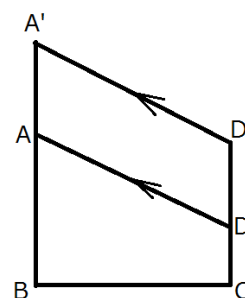
(補題 3 の証明)

$AD \leq BC$ として考えても一般性を失わない。そして、下図のように、直線 AB と直線 DC の交点を E とすると、1 辺とその両端の角が決まっているので、 $\triangle EBC$ の形は 1 つに決まる。

また、 $\angle BAD$ と $\angle ADC$ の大きさは決まっているので、 $\angle EAB$ と $\angle EDA$ の大きさは 1 つに決まる。よって、1 辺とその両端の角が決まっているので、 $\triangle EAD$ の形も 1 つに決まる。ゆえに、四角形 ABCD の形は 1 つに決まる。(Q. E. D.)



逆に、四角形 ABCD において、辺 AB と辺 CD が平行であれば、例えば、下図のような四角形 ABCD と四角形 A'BCD' はどちらも条件を満たすので、形は 1 つに決まらない。



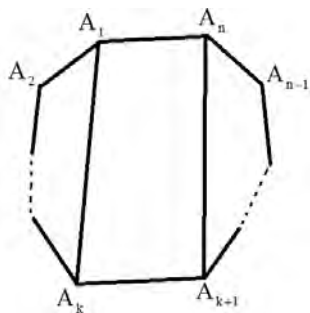
(Ⅱ の証明)

(Ⅰ) と同じように、すべての角の大きさが決まっているとしてよい。下図の n 角形で、点 A_1 と点 A_k 、点 A_n と点 A_{k+1} を結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3 \cdots A_k$ と多角形 $A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3} \cdots A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_k 、辺 $A_{k+1}A_n$ 以外の辺とそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_k 、辺 $A_{k+1}A_n$ の長さは 1 つに決まる。

また、 $\angle A_2A_1A_k$ 、 $\angle A_{k-1}A_kA_1$ 、 $\angle A_{n-1}A_nA_{k+1}$ 、 $\angle A_{k+2}A_{k+1}A_n$ の大きさも 1 つに決まるので、 $\angle A_nA_1A_k$ 、 $\angle A_1A_kA_{k+1}$ 、 $\angle A_1A_nA_{k+1}$ 、

$\angle A_kA_{k+1}A_n$ の大きさも 1 つに決まる。つまり、四角形 $A_1A_nA_{k+1}A_k$ は、すべての角の大きさと辺 A_1A_k と辺 $A_{k+1}A_n$ の長さが決ま

っている。さらに、仮定より、辺 A_1A_k と辺 A_nA_{k+1} は平行でないので、補題 3 より、四角形 $A_1A_nA_{k+1}A_k$ の形は 1 つに決まる。よって題意は示された。(Q. E. D.)



3. 4 その他の場合

最後に、長さが決まっている辺の本数が $n-3$ 本以下の場合、いくつかの角が決まっても形は 1 つに決まらないことを証明する。

実際には、決まっている辺の本数が $n-3$ 本のとくにすべての角が決まっても形は 1 つに決まらないことを示せば十分である。そして、決まっている辺の配置により、(A),(B),(C) の 3 つの場合に分けて考えた。

(A) 長さが決まっていない 3 辺がすべて隣り合っている場合

まず、次の補題 4 を証明する。

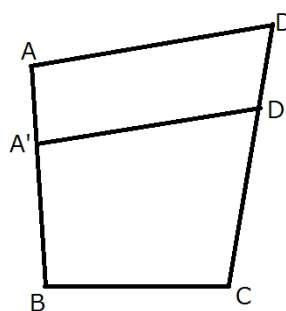
補題 4

すべての角の大きさと一辺の長さが決まっている四角形の形は 1 つに決まらない。

(補題 4 の証明)

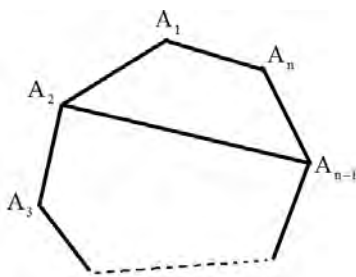
下図の四角形 $ABCD$ において、すべての角の大きさと辺 BC の長さが決まっているとする。すると、辺 AB 上に A, B とは異なる点 A' をとり、点 A' を通り、辺 AD に平行

な直線と辺 CD の交点を D' とする。すると、 $AD \parallel A'D'$ より同位角は等しいので、 $\angle DAB = \angle D'A'B$, $\angle ADC = \angle A'D'C$ である。ゆえに、四角形 $A'BCD'$ も条件を満たす。したがって、条件を満たす四角形が複数存在することになるので、この形は 1 つに決まらない。(Q. E. D.)



(A の証明)

下図の n 角形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ において、すべての角の大きさは決まっており、辺 A_2A_1 , 辺 A_1A_n , 辺 $A_{n-1}A_n$ の辺の長さが決まっていないとする。そして、点 A_2 と点 A_{n-1} を結び、多角形 $A_2A_3A_4 \cdots A_{n-2}A_{n-1}$ は辺 A_2A_{n-1} 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、この多角形の形は 1 つに決まる。ゆえに、辺 A_2A_{n-1} の長さは 1 つに決まる。また、 $\angle A_3A_2A_{n-1}$ と $\angle A_{n-2}A_{n-1}A_2$ の大きさも 1 つに決まるので、 $\angle A_1A_2A_{n-1}$ と $\angle A_nA_{n-1}A_2$ の大きさも 1 つに決まる。つまり、四角形 $A_1A_2A_{n-1}A_n$ は、すべての角の大きさと辺 A_2A_{n-1} の長さが決まっていることになるが、補題 4 より、この四角形の形は 1 つに決まらない。ゆえに、この n 角形の形は 1 つに決まらない。実際、補題 4 と同様の反例を四角形 $A_1A_2A_{n-1}A_n$ に対して作ることで同じ条件を満たす n 角形を作ることができる。(Q. E. D.)



(B)長さが決まってない3辺のうち、2辺は隣り合っているが、1つは隣り合っていない場合

まず、次の補題5を証明する。

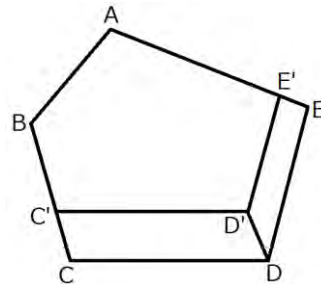
補題5

五角形 ABCDE において、すべての角の大きさと辺 AB と辺 CD の長さが決まっているとき、この五角形の形は1つに決まらない。

(補題5の証明)

辺 BC 上に点 B, C とは異なる点 C' をとる。そして、点 C' を通り、直線 CD に平行な直線と、点 D を通り、直線 $C'C$ に平行な直線の交点を D' とする。さらに、点 D' を通り、直線 DE に平行な直線と辺 AE との交点を E' とする。 $CD \parallel C'D'$ かつ $DD' \parallel CC'$ より、四角形 $CDD'C'$ は平行四辺形である。よって、 $CD = C'D'$, $\angle DCB = \angle D'C'B$ である。また、 $DE \parallel D'E'$ より、 $\angle AED = \angle AE'D'$ である。

さらに、 $CD \parallel C'D'$, $DE \parallel D'E'$ より $\angle CDE = \angle C'D'E'$ であるから、五角形 $ABC'D'E'$ も条件を満たす。したがって、条件を満たす五角形が複数存在することになるので、この形は1つに決まらない。(Q. E. D.)



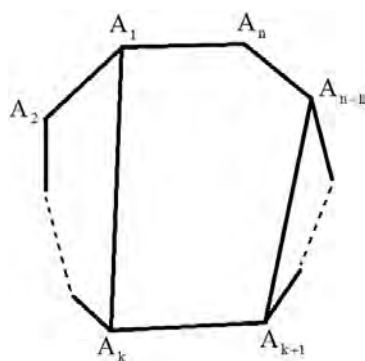
(Bの証明)

下図の n 角形 $A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1} \cdots A_n$ において、すべての角の大きさと辺 A_1A_n と辺 $A_{n-1}A_n$ と辺 A_kA_{k+1} 以外の辺の長さが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_k , 点 A_{n-1} と点 A_{k+1} を結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3 \cdots A_k$ と多角形 $A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3} \cdots A_{n-2}A_{n-1}$ はそれぞれ辺 A_1A_k , 辺 $A_{k+1}A_{n-1}$ 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は1つに決まる。よって、辺 A_1A_k , 辺 $A_{k+1}A_{n-1}$ の長さは1つに決まる。また、 $\angle A_2A_1A_k$, $\angle A_1A_kA_{k+1}$, $\angle A_{k+1}A_{n-1}A_{n-2}$, $\angle A_{k+2}A_{k+1}A_{n-1}$ の角の大きさも1つに決まるので、 $\angle A_nA_1A_k$, $\angle A_{k+1}A_kA_1$, $\angle A_{k+1}A_{n-1}A_n$, $\angle A_kA_{k+1}A_{n-1}$ の角の大きさも1つに決まる。

ゆえに、五角形 $A_1A_kA_{k+1}A_{n-1}A_n$ は、すべての角の大きさと、辺 A_1A_k , 辺 $A_{k+1}A_{n-1}$ の長さが決まっている。しかし補題5より、この五角形の形は1つに決まらない。したがって、この n 角形の形は1つに決まらない。

実際、補題5と同様の反例を五角形 $A_1A_kA_{k+1}A_{n-1}A_n$ で作ることで、同じ条件を満たす n 角形を作ることができる。

(Q. E. D.)



(C)長さが決まっていない3辺がすべて隣り合っていない場合

(C)を証明するために、次の補題 6 を証明する。

補題 6

六角形 ABCDEF において、すべての角の大きさと、辺 BC, DE, FA の長さが決まっているとする。このとき、この六角形の形は 1 つに決まらない。

(補題 6 の証明)

辺 AB 上に A, B とは異なる点 B' をとる。そして、点 B' を通り BC に平行な直線と、点 C を通り AB に平行な直線との交点を C' とする。さらに、点 C' を通り CD に平行な直線と、点 D を通り EF に平行な直線との交点を D' とし、D' を通り DE に平行な直線と辺 EF との交点を E' とする。

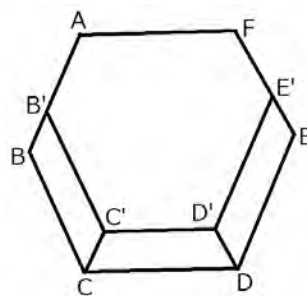
B'C' // BC, BB' // CC' より、四角形 BCC'B' は平行四辺形である。ゆえに、 $BC = B'C'$, $\angle ABC = \angle AB'C'$ が成り立つ。また、D'E' // DE, DD' // EE' より、四角形 DEE'D' も平行四辺形であるから、 $DE = D'E'$, $\angle FED = \angle FE'D'$ が成り立つ。

さらに、 $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, $DE \parallel D'E'$

より、 $\angle BCD = \angle B'C'D'$, $\angle CDE = \angle C'D'E'$ である。

以上から、六角形 AB'C'D'E'F も条件を満たすことがわかった。つまり、条件を満たす六角形が複数存在するので、形は 1 つに決まらない。しかし、 $\angle ABC + \angle BCD < 180^\circ$ のときは点 C' が六角形の外部に存在する。この場合、頂点 A, B, C, D, E, F をそれぞれ E, F, A, B, C, D に名前をつけ替え、上述の証明と同様の操作を行うことにより、同じ条件を満たす六角形を作ることができる。

(Q. E. D.)



(C の証明)

下図の n 角形 $A_1A_2 \cdots A_k \cdots A_m \cdots A_n$ において、すべての角の大きさと辺 A_1A_n と辺 A_kA_{k+1} と辺 A_mA_{m+1} 以外の辺の長さが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_k , 点 A_{k+1} と点 A_m , 点 A_{m+1} と点 A_n をそれぞれ結ぶと、多角形 $A_1A_2 \cdots A_{k-1}A_k$, 多角形 $A_{k+1}A_{k+2} \cdots A_{m-1}A_m$, 多角形 $A_{m+1}A_{m+2} \cdots A_{n-1}A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_k , 辺 $A_{k+1}A_m$, 辺 $A_{m+1}A_n$ 以外の辺の長さとそれらの辺の間にある角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_k , 辺 $A_{k+1}A_m$, 辺 $A_{m+1}A_n$ の長さも 1 つに決まる。

また、 $\angle A_2A_1A_k$, $\angle A_1A_kA_{k-1}$,

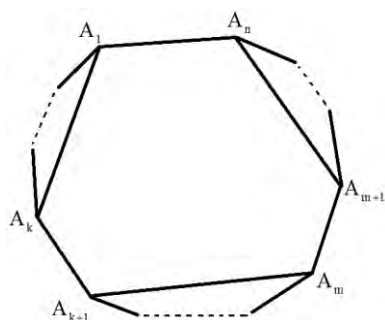
$\angle A_{k+2}A_{k+1}A_m$, $\angle A_{m-1}A_mA_{k+1}$,

$$\angle A_n A_{m+1} A_{m+2}, \angle A_{n-1} A_n A_{m+1}$$

の大きさは1つに決まる。すべての角の大きさは決まっていることから、六角形 $A_1 A_k A_{k+1} A_m A_{m+1} A_n$ は、すべての角の大きさと辺 $A_1 A_k$, 辺 $A_{k+1} A_m$, 辺 $A_{m+1} A_n$ の長さが決まっている六角形である。しかし、補題 6 より、この六角形の形は1つに決まらないので、この n 角形の形は1つに決まらない。実際、補題 6 と同様の反例を六角形 $A_1 A_k A_{k+1} A_m A_{m+1} A_n$ に対して作ることで同じ条件を満たす n 角形を作ることができる。

(Q. E. D.)

(A),(B),(C)より、 n 角形において、 $n-3$ 本以下しか辺の長さが決まっていない場合は形が1つに決まらないことが示された。



4. 今後の課題

今回は凹多角形については考えなかったもので、それについて考えていくことや、 n 角形が円に内接、外接している場合についても考えていきたい。さらに、今後は立体について形が決まる条件についても調べていきたい。

5. 参考文献

[1] 三角形の決定

http://www.ravco.jp/cat/view.php?cat_id=6042

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方からも助言をいただきました。ありがとうございました。

カプレカー変換に関する考察(3)

4年A組 市田 美玲

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 4 年生はカプレカー変換について学習している。今回はカプレカー定数と、7 桁のカプレカー変換について考察した。また、7 桁における、循環までの過程をまとめたので紹介する。

キーワード カプレカー変換、カプレカー定数、循環、収束

2. 研究の背景と目的

カプレカー変換とは自然数において、各桁の数字を並びかえて作ることのできる最大の数から最小の数を引く操作のことである。この変換を続けると 1 つの値に収束するか、複数の値で循環することが知られている。しかし、どのような場合に収束あるいは循環が表れるのか、どのような値を経て収束、循環にたどりつくのか、カプレカー定数はどのような値なのかは明らかになっていない。

そこで、今回は 7 桁のカプレカー変換における循環の過程、カプレカー定数についての考察をまとめた。なお、2, 3, 4, 5, 6 桁の場合については、参考文献[1], [2]にまとめている。

3. 研究内容

3. 1 基本事項

■ソート

各桁の数字を並びかえて、最大の数にする操作をいう。

■カプレカー定数

1 回の変換によって、値が変化しない自然数のことをいう。

ただし、ぞろ目は最初の変換で 0 になるので、除いて考える。また、 n 桁の変換を考える際に変換により 1 桁減ってしまったとしても、 n 桁とみなして考える。

3. 2 カプレカー定数についての考察

これまでの研究で 3, 4, 6 桁のカプレカー定数は、495, 6174, 549945, 631764 であることを示した。495 と 549945, 6174 と 631764 はそれぞれ各桁の数字が似ている。そこで、この 2 つのパターンを考察し、さらに大きい桁数のカプレカー定数を予想できるのではないかと考えた。

3.2.1 495, 549945

495, 549945 の変換の筆算はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{array}{r}
9 \ 5 \ 4 \\
- \ 4 \ 5 \ 9 \\
\hline
4 \ 9 \ 5
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
9 \ 9 \ 5 \ 5 \ 4 \ 4 \\
- \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 9 \ 9 \\
\hline
5 \ 4 \ 9 \ 9 \ 4 \ 5
\end{array}$$

筆算 1 筆算 2

筆算 1, 2 より、繰り下がりも含めた式で各位の計算を表すと、

$$\begin{aligned}
4-9+10=5, \quad 4-9-1+10=4, \\
9-4=5, \quad 9-4-1=4
\end{aligned}$$

の 4 つの式になり、変換を筆算で表記したとき 4, 5, 9 しか表れないようになっている。このようなカプレカ一定数を考察するために、一般化を行った。

各桁の数が 4, 5, 9 である n 桁のカプレカ

一定数のソート後の値を $\langle a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 \rangle$,

$$\begin{array}{r}
a_n \ a_{n-1} \ \cdots \ a_{n-k+1} \ a_{n-k} \ \cdots \ a_{k+1} \ a_k \ \cdots \ a_2 \ a_1 \\
- \ a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k \ a_{k+1} \ \cdots \ a_{n-k} \ a_{n-k+1} \ \cdots \ a_{n-1} \ a_n \\
\hline
p_n \ p_{n-1} \ \cdots \ p_{n-k+1} \ p_{n-k} \ \cdots \ p_{k+1} \ p_k \ \cdots \ p_2 \ p_1
\end{array}$$

筆算 3

$$\begin{array}{r}
9 \ a_{n-1} \ \cdots \ a_{n-k+1} \ a_{n-k} \ \cdots \ 5 \ 4 \ \cdots \ a_2 \ 4 \\
- \ 4 \ a_2 \ \cdots \ 4 \ 5 \ \cdots \ a_{n-k} \ a_{n-k+1} \ \cdots \ a_{n-1} \ 9 \\
\hline
5 \ p_{n-1} \ \cdots \ p_{n-k+1} \ p_{n-k} \ \cdots \ p_{k+1} \ p_k \ \cdots \ p_2 \ 5
\end{array}$$

筆算 4

p_k の位において、 $4 = a_k < a_{k+1} \leq a_{n-k+1}$ より、 $a_{n-k+1} = 5$ または $a_{n-k+1} = 9$ である。

$a_{n-k+1} = 5$ のとき、繰り下がり を考慮すると $p_k = 4 - 5 + 10 - 1 = 8$ より、適さない。

$a_{n-k+1} = 9$ のとき、 $p_k = 4 - 9 + 10 - 1 = 4$ より適する。

したがって、 $a_{n-k+1} = 9$ であり、 $p_k = 4$ とわかる。

また、 p_{n-k} の位において、 $5 = a_{k+1} \leq a_{n-k}$

変換後の値を $\langle p_n p_{n-1} \dots p_2 p_1 \rangle$ とおく。ただ

し、ここでは $n \geq 7$ として、 $a_n > a_1$ かつ

$$9 \geq a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 \geq 4$$

かつ $a_1, a_2, \dots, a_n, p_1, p_2, \dots, p_n \in \{4, 5, 9\}$ とする。

変換の結果を筆算で表すと筆算 3 のようになる。

条件より $a_n = 9$, $a_1 = 4$ となり、

$$p_n = 9 - 4 = 5, \quad p_1 = 4 - 9 + 10 = 5 \text{ となる。}$$

ここで、 $a_k = 4, a_{k+1} = 5$ とおくと計算結果は筆算 4 のようになる。

より、 $a_{n-k} = 5$ または $a_{n-k} = 9$ である。

$a_{n-k} = 5$ のとき、 $p_{n-k} = 5 - 5 + 10 - 1 = 9$ より適する。

$a_{n-k} = 9$ のとき、 $p_{n-k} = 9 - 5 - 1 = 3$ より適さない。

したがって、 $a_{n-k} = 5$ であり $p_{n-k} = 9$ 。

このとき、 $p_{n-k+1} = 9 - 4 - 1 = 4$,

$$p_{k+1} = 5 - 5 + 10 - 1 = 9$$

となり、それぞれ適する。

さらに、 a_1 から a_k までが 4, a_{k+1} から a_{n-k} までが 5, a_{n-k+1} から a_n までが 9 であるとわかるので、筆算で表すと次のようになる。ここで、9 … 9 のように…の両端が同じ数のとき、…の間にある数はすべて両端の数（この場合は 9）であることを表わしている。

$$\begin{array}{r} 9 \quad \cdots \quad 9 \quad 9 \quad 5 \quad \cdots \quad 5 \quad 4 \quad \cdots \quad 4 \quad 4 \\ - \quad 4 \quad \cdots \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad \cdots \quad 5 \quad 9 \quad \cdots \quad 9 \quad 9 \\ \hline 5 \quad \cdots \quad 5 \quad 4 \quad 9 \quad \cdots \quad 9 \quad 4 \quad \cdots \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

筆算 5

筆算 5 より、9 と 4, 5 と 9 はそれぞれ同じ個数だけあるから、4, 5, 9 はすべて同じ個数である必要がある。

以上から、各桁の数が 4, 5, 9 であるカプレカー一定数は

$$5 \cdots 549 \cdots 94 \cdots 45$$

であり、4, 5, 9 は同じ個数であることが示された。

さらに、4, 5, 9 が同じ個数あればよいので、 $3k$ 桁（ただし、 k は自然数）のカプレカー一定数は存在することがわかる。

3.2.2 6174, 631764

6174 と 631764 の変換の筆算は次のようになる。

$$\begin{array}{r} 7 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad \quad 7 \quad 6 \quad 6 \quad 4 \quad 3 \quad 1 \\ - \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 7 \quad - \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \\ \hline 6 \quad 1 \quad 7 \quad 4 \quad \quad 6 \quad 3 \quad 1 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \end{array}$$

筆算 6

筆算 7

筆算 6, 7 より 631764 は 6174 に 3, 6 を挿入した数であるということができる。

筆算 7 において、各桁の計算を見ると、下 1, 3 桁目、上 1, 3 桁目、つまり、筆算 6 と共通する 1, 4, 6, 7 は、ソートして変換すると 6, 1, 7, 4 が現れる。

残りの桁である 3, 6 も同様に変換後の数に 6, 3 が表れる。

したがって、631764 に 3, 6 を挿入しても、ソート後の値の各桁の数が変換後現れる。つまり、63317664 を変換すると、

$$76664331 - 13346667 = 63317664$$

となり、8 桁のカプレカー一定数となる。

筆算 6, 7 と同様に筆算を行うと、次のようになる。

$$\begin{array}{r} 7 \quad 6 \quad \cdots \quad 6 \quad 6 \quad 4 \quad 3 \quad \cdots \quad 3 \quad 1 \\ - \quad 1 \quad 3 \quad \cdots \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 6 \quad \cdots \quad 6 \quad 7 \\ \hline 6 \quad 3 \quad \cdots \quad 3 \quad 1 \quad 7 \quad 6 \quad \cdots \quad 6 \quad 4 \end{array}$$

筆算 8

したがって、カプレカー一定数は

$$63 \cdots 3176 \cdots 64$$

と表せる。

さらに、6174 から 3, 6 の 2 つずつを挿入して加えていくので、 $2k+2$ 桁（ただし、 k は自然数）のカプレカー一定数は存在することになる。

3.3 カプレカー一定数と収束

自然数は変換を続けるとある数で循環するか、カプレカー一定数で収束するかのどちらかにたどり着くことが知られている。

3.2 節より、 $3k$ 桁、 $2k+2$ 桁のカプレカー一定数が存在するので、 $3k$ 桁、 $2k+2$ 桁ではこれらのカプレカー一定数に収束する数があることがわかる。

3. 4 7桁のカプレカー変換

任意の7桁のソート後の数を $\langle abcdefg \rangle$ とおく。ただし a, b, c, d, e, f, g は整数として、 $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f \geq g \geq 0$, $a > g$, とする。

変換を筆算で表すと、筆算9のようになる。

4. 考察

4. 1 変換を続けるとどうなるのか

任意の7桁の数 $\langle abcdefg \rangle$ について、変換を繰り返すとどのような数になるのかを考える。

$\langle abcdefg \rangle$ を変換すると筆算9より、
 $999999(a-g) + 99990(b-f) + 9000(c-e)$ となる。

ここから、変換後の値は $a-g$, $b-f$, $c-e$ の値によって決まることがわかる(ただし、 $a-g \geq b-f \geq c-e$)。そこで、この値によって場合分けし、変換を繰り返す

行った。

すると、すべて7桁の自然数は変換を繰り返していくと、

$$\begin{aligned} 8649432 &\rightarrow 7519743 \rightarrow 8429652 \\ &\rightarrow 7619773 \rightarrow 8439552 \rightarrow 7509843 \\ &\rightarrow 9529641 \rightarrow 8719722 \end{aligned}$$

という循環節で循環することがわかり、7桁のカプレカー定数は存在しないことも確かめられた。また、最大で13回の変換で循環にたどり着くということが明らかになった。

4. 2 収束、循環の過程

7桁の循環の過程を表す表を後半に附した。変換後の値は $a-g$, $b-f$, $c-e$ の値によって決まるため、変換後の値は $a-g$, $b-f$, $c-e$ の値の組み合わせにより、それから先の変換の様子が決まる。その変換の様子を調べたものである。影のついた部分は、上述の循環節に入ったことを示している。最大13回の変換により、循環節に入ることが確認できる。

$$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ - & g & f & e & d & c & b & a \\ \hline & a-g & b-f & c-e-1 & 9 & e-c+9 & f-b+9 & g-a+10 \end{array}$$

筆算9

5. 今後の課題

今回、カプレカー定数と収束、7桁のカプレカー変換について、自ら考察することができた。しかし、収束、循環の過程の値についての考察は十分にはできなかった。また、今回は計算機を用いながら、自分で計算をまとめたことで、効率よく作業する

ことができた。今後はさらにカプレカー定数を詳しく考察することでどのような桁数のときに収束がおこるのかということを明らかにしていきたい。

6. 参考文献

- [1] 「カプレカー変換に関する考察」, 市田美玲, 2013 年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集
- [2] 「カプレカー変換に関する考察(2)」, 市田美玲, 2014 年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集

7. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩、後輩の方々にもご協力いただきました。ありがとうございました。

a-g	b-f	c-e	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目	9回目	10回目	11回目	12回目	13回目
1	0	0	999999	8999991	8099982	9709821	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
1	1	0	1099989	9809811	9869211	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
1	1	1	1109889	9869211	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
2	0	0	1999998	8099982	9709821	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
2	1	0	2099988	9709821	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
2	1	1	2109888	9759321	8739522	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
2	2	0	2199978	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
2	2	1	2209878	9659331	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
2	2	2	2219778	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
3	0	0	2999997	7199973	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
3	1	0	3099987	9619731	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
3	1	1	3109887	9749421	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
3	2	0	3199977	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
3	2	1	3209877	9639531	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
3	2	2	3219777	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
3	3	0	3299967	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
3	3	1	3309867	9539541	8609832	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
3	3	2	3319767	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
3	3	3	3329667	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
4	0	0	3999996	6299964	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
4	1	0	4099986	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
4	1	1	4109886	9739521	8739522	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
4	2	0	4199976	8529642	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843
4	2	1	4209876	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
4	2	2	4219776	8529642	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843
4	3	0	4299966	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
4	3	1	4309866	9519741	8829612	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
4	3	2	4319766	8419752	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
4	3	3	4329666	7319763	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
4	4	0	4399956	6539544	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733
4	4	1	4409856	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
4	4	2	4419756	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
4	4	3	4429656	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
4	4	4	4439556	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552
5	0	0	4999995	5399955	6439554	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652
5	1	0	5099985	9439551	8609832	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
5	1	1	5109885	9729621	8749422	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
5	2	0	5199975	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
5	2	1	5209875	9619731	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
5	2	2	5219775	8519742	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
5	3	0	5299965	7439553	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
5	3	1	5309865	9509841	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
5	3	2	5319765	8409852	9639531	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
5	3	3	5329665	7309863	9539541	8609832	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843

a-g	b-f	c-e	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目	9回目	10回目	11回目	12回目	13回目
5	4	0	5399955	6439554	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733
5	4	1	5409855	9399951	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
5	4	2	5419755	8299962	7729623	7539543	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733
5	4	3	5429655	7199973	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
5	4	4	5439555	6099984	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
5	5	0	5499945	5539545	6099984	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
5	5	1	5509845	9399951	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
5	5	2	5519745	8299962	7729623	7539543	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733
5	5	3	5529645	7199973	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
5	5	4	5539545	6099984	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
5	5	5	5549445	5109885	9729621	8749422	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
6	0	0	5999994	5399955	6439554	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652
6	1	0	6099984	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
6	1	1	6109884	9739521	8739522	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
6	2	0	6199974	8529642	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843
6	2	1	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
6	2	2	6219774	8529642	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843
6	3	0	6299964	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
6	3	1	6309864	9519741	8829612	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
6	3	2	6319764	8419752	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
6	3	3	6329664	7319763	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
6	4	0	6399954	6539544	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733
6	4	1	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
6	4	2	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
6	4	3	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
6	4	4	6439554	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552
6	5	0	6499944	5549445	5109885	9729621	8749422	7629633	7429653	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
6	5	1	6509844	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
6	5	2	6519744	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
6	5	3	6529644	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
6	5	4	6539544	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552
6	5	5	6549444	5209875	9619731	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
6	6	0	6599934	6539544	6209874	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733
6	6	1	6609834	9519741	8829612	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
6	6	2	6619734	8419752	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
6	6	3	6629634	7319763	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
6	6	4	6639534	6319764	8419752	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
6	6	5	6649434	6219774	8529642	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552
6	6	6	6659334	6319764	8419752	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
7	0	0	6999993	6299964	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
7	1	0	7099983	9619731	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
7	1	1	7109883	9749421	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
7	2	0	7199973	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
7	2	1	7209873	9639531	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432

a-g	b-f	c-e	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目	9回目	10回目	11回目	12回目	13回目
7	2	2	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
7	3	0	7299963	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
7	3	1	7309863	9539541	8609832	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
7	3	2	7319763	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
7	3	3	7329663	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
7	4	0	7399953	6639534	6319764	8419752	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
7	4	1	7409853	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
7	4	2	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843
7	4	3	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552
7	4	4	7439553	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
7	5	0	7499943	6549444	5209875	9619731	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
7	5	1	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
7	5	2	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843
7	5	3	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552
7	5	4	7539543	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
7	5	5	7549443	6309864	9519741	8829612	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
7	6	0	7599933	6639534	6319764	8419752	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
7	6	1	7609833	9539541	8609832	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
7	6	2	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
7	6	3	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
7	6	4	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843
7	6	5	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
7	6	6	7659333	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843
7	7	0	7699923	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
7	7	1	7709823	9639531	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
7	7	2	7719723	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
7	7	3	7729623	7539543	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
7	7	4	7739523	7439553	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
7	7	5	7749423	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
7	7	6	7759323	7439553	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
7	7	7	7769223	7539543	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843
8	0	0	7999992	7199973	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	1	0	8099982	9709821	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
8	1	1	8109882	9759321	8739522	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	2	0	8199972	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	2	1	8209872	9659331	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	2	2	8219772	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
8	3	0	8299962	7729623	7539543	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552
8	3	1	8309862	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	3	2	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	3	3	8329662	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	4	0	8399952	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552
8	4	1	8409852	9639531	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	4	2	8419752	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743

a-g	b-f	c-e	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目	9回目	10回目	11回目	12回目	13回目
8	4	3	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
8	4	4	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	5	0	8499942	7549443	6309864	9519741	8829612	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
8	5	1	8509842	9639531	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	5	2	8519742	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
8	5	3	8529642	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
8	5	4	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	5	5	8549442	7409853	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	6	0	8599932	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552
8	6	1	8609832	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	6	2	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	6	3	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	6	4	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
8	6	5	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552
8	6	6	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
8	7	0	8699922	7729623	7539543	6409854	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552
8	7	1	8709822	9659331	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
8	7	2	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
8	7	3	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
8	7	4	8739522	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552
8	7	5	8749422	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	7	6	8759322	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552
8	7	7	8769222	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
8	8	0	8799912	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	8	1	8809812	9759321	8739522	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	8	2	8819712	8759322	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
8	8	3	8829612	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	8	4	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
8	8	5	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	8	6	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
8	8	7	8869212	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
8	8	8	8879112	8759322	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
9	0	0	8999991	8099982	9709821	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
9	1	0	9099981	9809811	9869211	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
9	1	1	9109881	9869211	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	2	0	9199971	8819712	8759322	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	2	1	9209871	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
9	2	2	9219771	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	3	0	9299961	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
9	3	1	9309861	9849411	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	3	2	9319761	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	3	3	9329661	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
9	4	0	9399951	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	4	1	9409851	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432

a-g	b-f	c-e	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目	9回目	10回目	11回目	12回目	13回目
9	4	2	9419751	8829612	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	4	3	9429651	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	4	4	9439551	8609832	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
9	5	0	9499941	8549442	7409853	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
9	5	1	9509841	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
9	5	2	9519741	8829612	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	5	3	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	5	4	9539541	8609832	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
9	5	5	9549441	8509842	9639531	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
9	6	0	9599931	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	6	1	9609831	9849411	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	6	2	9619731	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	6	3	9629631	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
9	6	4	9639531	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	6	5	9649431	8619732	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	6	6	9659331	8629632	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	7	0	9699921	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
9	7	1	9709821	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
9	7	2	9719721	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	7	3	9729621	8749422	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	7	4	9739521	8739522	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
9	7	5	9749421	8729622	7649433	6419754	8319762	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641
9	7	6	9759321	8739522	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652	7619733
9	7	7	9769221	8749422	7629633	7429653	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	8	0	9799911	8819712	8759322	7639533	6429654	7219773	8539542	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	8	1	9809811	9869211	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	8	2	9819711	8869212	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	8	3	9829611	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	8	4	9839511	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	8	5	9849411	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	8	6	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	8	7	9869211	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743	8429652
9	8	8	9879111	8869212	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	9	0	9899901	9809811	9869211	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
9	9	1	9909801	9979101	9879111	8869212	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722
9	9	2	9919701	9879111	8869212	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
9	9	3	9929601	9869211	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	9	4	9939501	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
9	9	5	9949401	9849411	8839512	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	9	6	9959301	9859311	8849412	8639532	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
9	9	7	9969201	9869211	8859312	8649432	7519743	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
9	9	8	9979101	9879111	8869212	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432
9	9	9	9989001	9979101	9879111	8869212	8659332	7529643	7419753	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722

光の波長によるハツカダイコンの成長の違い

2年B組 菊池 匠十

2年B組 川本 圭午

2年B組 中村 翔

2年C組 松山 尚恭

指導教員 矢野 幸洋

櫻井 昭

1. 要約

私たちは1年生のときからハツカダイコンについての研究をしている。私たちは2年間にわたり、研究、改良を重ねた。その結果光の波長によってハツカダイコンに成長の違いが見いだされた。

キーワード ダイコン、生物、植物、光、発光ダイオード

2. 研究の背景と目的

私たちは、地球上の身近に関わりやすく、重大な問題をテーマとすることにした。案として食料問題を挙げ、私たちはテーマを決定した。

この問題は植物の光合成を効率的に行うことができれば、植物の供給量が増え、食料問題を解決、そしてバイオテクノロジーなどにも用いることでエネルギー問題にも貢献することができると考えた。そこで私たちは、はじめに当てる光のどの波長が効率的に光合成を行わせることができるかを研究することにした。ハツカダイコンを使用したのは、研究成果が早く出るからという理由と、比較的安易に購入することができるからである。

実験に使用したのは、市販のハツカダイコンの種子、市販の培養土、農業用の

カップ、発光ダイオード（赤、白、緑、赤外線、紫外線）である。

3. 研究内容

3. 1 準備

まず、種からまき、芽がある程度伸びたハツカダイコンを12株用意した。これらは同じように育てられ、同じぐらいまで成長した物である。そのうち10株を〔実験ボックスA〕5個に2株ずつ入れ、残り2株を〔実験ボックスB〕へ入れた。〔実験ボックスA〕は、正面以外の面を木製の板で覆われており、底面と水平の透明アクリル板で上下に仕切られている。ハツカダイコンは下部におくこととし、下部の高さはハツカダイコンの生育に問題のない程度の高さとする（図1全体像および図2断面図参照）。上部には前述の5種の発光ダイオードが設置

A 3D perspective drawing of a rectangular box. The box is divided horizontally by a single line, creating a top section and a bottom section. The top section is labeled with the Japanese text 'アクリル板' (Acrylic plate). The box is shown from an isometric perspective, with lines indicating its three-dimensional structure.

発光ダイオード

株 株

株 株

3. 2 実験方法

擬似的に昼と夜を作ることにする。メンバー内で当番制を敷き、下校時に〔実験ボックス A〕のそれぞれの 1 株を取り出して、〔実験ボックス B〕へと移す。〔実験ボックス B〕内は暗黒となっているので、これを「夜」とする。

擬似的に昼と夜を作ることにする。メンバー内で当番制を敷き、下校時に〔実験ボックス A〕のそれぞれの1株を取り出して、〔実験ボックス B〕へと移す。〔実験ボックス B〕内は暗黒となっているので、これを「夜」とする。

〔実験ボックス B〕内は暗黒となっているので、これを「夜」とする。

登校時に〔実験ボックス B〕内の株をもとの色のダイオードの箱に戻す。また、〔実験ボックス B〕内の 1 株は外に出し、日光に当てる。〔実験ボックス B〕内の 1 株を除いた全ての株が各発光ダイオード、または日光に当たっているこの状態を「昼」とする。水分は一日に一度すべての株に同量ずつたっぷりと、過不足なく与える。

それぞれの条件で育てた株を次のように名前をつける。

- ・「昼」は日光に当てる株→『日光』
- ・「夜」のまま移動させない株
→『暗黒』
- ・「昼」は発光ダイオードに当てる株に
それぞれの色をつける
→『白』『緑』『赤』『赤外』『紫外』
- ・昼夜なく常に発光ダイオードの光を当
てる。発光ダイオードの後に、「常」
をつける
→『白(常)』『緑(常)』『赤(常)』
『赤外(常)』『紫外(常)』

3. 3 実験結果

結果の写真を図4～図6に示す。それぞれの条件を次の表に示す。図4～図6の写真の位置は下の表と一致している。

日光	暗黒	白	白 (常)	緑
緑 (常)	赤	赤 (常)	赤外	赤外 (常)
紫外	紫外 (常)			

<1週目(図4)>

赤(常)が他の株よりも成長の程度が大きいように見えるが、全体的に大きな差はない。

<2週目(図5)>

葉が緑色の株は多いが茎の固さや太さに差が出てきた。具体的には日光、赤(常)、赤が葉も大きく、逆に、紫外線や緑などはカップに茎が垂れて弱々しい外見になっている。

<3週目(図6)>

明確に成長の程度に差がついた。赤色の葉が白くなり、ちくちくしていた。なお、3週目において日光の株の記録がないのは、日光の株を置いていたのは室内の窓際であり日光のあたる時間やその程度を実験ボックスの株と比べて光量が一定ではないと判断し、実験中だが撤去したためである。

4. 考察

実験により、赤色を適度に与え続けたものが比較的良好に成長するが、葉が白く変色してしまうことがわかった。このよ

うな結果から、赤の光の波長が植物にとって成長を促すが、葉緑体を十分に発達させない働きがあると考えた。緑などの光の株が赤の光に当てた株と比べて成長しなかったのは、緑色の光は葉が緑色のため、反射されてしまうというのが要因だと思われる。

5. 今後の課題

なぜ、紫外線や、赤外線などの光により育てられた植物が、細くなってしまったのか、赤色の光で育てられた植物の葉が白くなってしまったのかを突き止めることが今後の課題である。また、ポスター発表で指摘された、実験に用いた個体数の少なさ、光の波長の数値の正確さとその数値を具体的に提示すること、複数の光を組み合わせる株に当てる実験を行うことである。

6. 謝辞

最後に、研究にあたって必要な知識を全く知らなかった私たちに研究のいろはを教えてくださった顧問の櫻井先生、矢野先生、また、校内外発表にてさまざまな課題と改善案を授けてくださった方々や研究方法からこの論文の作成までさまざまな指導をしていただいた先生方、先輩、友人に心より感謝いたします。



图 4



图 5



图 6

ハムスターの学習能力

2年A組 島本 花菜

2年B組 對馬 風紗

2年C組 小早川 なの

指導教諭 矢野 幸洋

1. 要約

私たちはハムスターに学習能力があるのかということについて研究をしている。ハムスターに迷路を何度か走らせ、タイムを比較し、ハムスターの学習能力の有無を調べた。

キーワード ハムスター、迷路、におい、天敵、タイム計測

2. 研究の背景と目的

私たちは一般家庭で飼われているハムスターにどの程度の学習能力があるのかということについて研究をしている。今回の実験では生後 10 か月（人間でいうと 27 歳程度）のオスのジャンガリアンハムスターを使用した（図 1）。



図 1

とんど見えないため、空間領域をにおいて識別しているのではないかと考えた。そのため、迷路に嫌なにおいを発するものを置き、何度も走らせると、迷路を覚えてより短いタイムでゴールまでたどり着くと考えられる。

4. 研究内容

4. 1 迷路の作成

工作用紙を用いて幅 5cm、24cm の U 字型の通路を 11 本つくる。それぞれが 120 度の分岐になるようにつないだ。スタートとゴールは広くし、スタートをスムーズにできるようにした（図 2 参照）。

3. 仮説

ハムスターは鼻がとてもよく、目がほ

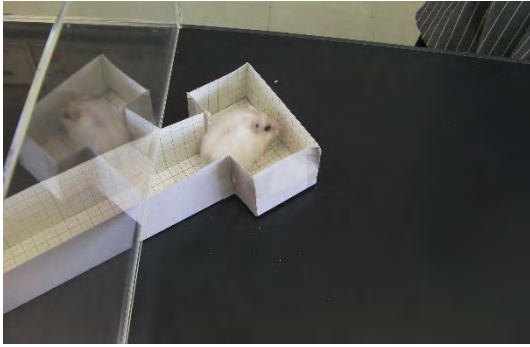


図 2

4. 2 予備実験

ゴールデンハムスターを使って途中とゴールにエサを置いて迷路を走らせた。しかし、途中で寝てしまったり、アクリル板をのせていないために迷路から逃げ出したりした（図 3）。

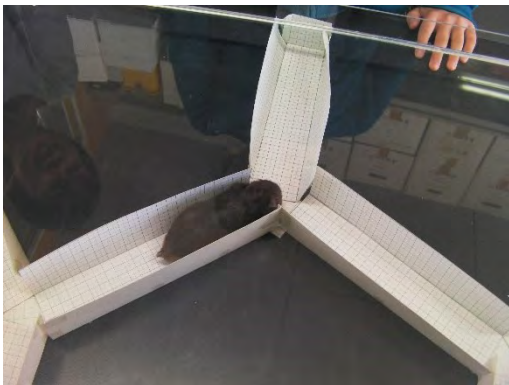


図 3

また、ハムスターがマーキング等をして止まってしまった。

そのため、次のように改良して実験することにした。

- ・アクリル板を迷路の上に被せる。
- ・エサではなく行き止まりにハムスターの嫌がるものを置くことにする。その時、直接においのもとに触れることがないように、表面をガーゼでおおう（図

4）。なお、図 4 で迷路の端の赤色のはガーゼでおおった酢酸オルセインである。

- ・マーキング等した時のにおいが残らないように、水をはじく板を置いた。



図 4

4. 3 本実験

<実験方法>

- ①図 5 のような道が 2 つに分岐している迷路を作る。
- ②何も置かずにハムスターを走らせ、通ったルートとゴールまでに要したタイムを計測する。
- ③行き止まりにハムスターが嫌がると考えられるにおいを発するものを置き、何度か走らせ、1 回目と同様に通ったルートと要したタイムを計測する。なお、においを入れたものは卵型のカプセルで、ガーゼでおおわれる。
- ④においの発生源を取り除き、1 回目と同じ条件で走らせて通ったルートとゴールまでに要したタイムを計測し、1 回目の結果と比較、考察をする。



図 5

5. 実験結果

実験結果を表 1 と、図 6 のグラフにまとめた。

猫の毛を用いた実験の 2 回目のデータは、スタートからゴールまでに要した時間が 1 分 53 秒、ハムスターが途中で止まっていた時間が 1 分 36 秒、そのため、実際に走っていた時間は 17 秒であった。

さらに、猫の毛を用いた実験の 3 回目のデータは、スタートからゴールまでに要した時間が 1 分 40 秒、ハムスターが途中で止まっていた時間が 1 分 6 秒、そのため、実際に走っていた時間は 34 秒であった。

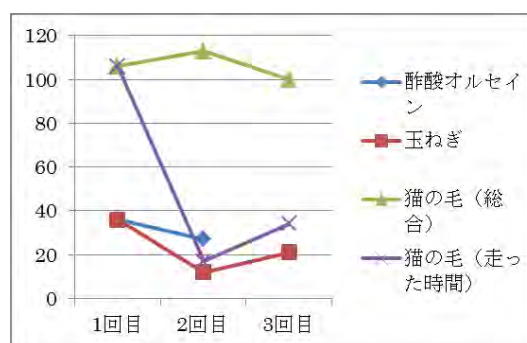


図 6

表 1

	1 回目	2 回目	3 回目
酢酸オルセイン	36 秒	27 秒	
玉ねぎ	36 秒	12 秒	21 秒
猫の毛	1 分 46 秒	1 分 53 秒	1 分 40 秒
実際に走った時間	1 分 46 秒	17 秒	34 秒

6. 考察

酢酸オルセインを用いた実験では1回目と3回目のタイムではほぼ変わりがなかったため、ハムスターは酢酸オルセインのにおいは覚えていないことがわかった。しかし、玉ねぎや猫の毛を用いた実験の場合、1回目よりも2回目の方のタイムが早く、行き止まりに行く回数も圧倒的に少なかったため、玉ねぎと猫の毛のにおいは嫌いだということが推測できる。また、1回目と3回目の実験結果を比べると、3回目は1回目よりも比較的早く、行き止まりに行く回数も少なかった。そのことから、玉ねぎと猫の毛のにおいは嫌いだと正確に記憶し、行かないように意識していることがわかる。また、酢酸オルセインと玉ねぎや猫の毛は、近くにあって自分の体に害を及ぼすかどうかという差があると考えられるため、身の危険を感じるにおいの方がより正確に記憶していると考えられる。

7. 今後の課題

今回の実験ではハムスターには空間領域での学習能力はあったことがわかった。よって、今度は野生のハムスターの巣のような立体の迷路を作り、立体空間での学習能力はあるのかどうかということを調べたいと考えている。また、別のげっ歯類を使った対照実験や、ダンゴムシの交換性転換反応のような特徴的な逃避行動がみられるかどうかということも調べたいと考えている。

なお、交替性転換反応とはおもにダンゴムシなどで連続するT字路を歩かせると左右交互に曲がって進む行動が見られることである。

8. 参考文献

- [1] NHK 番組 理科教室「動物の反応・学習」
- [2] 「動物の行動」、ステラーデティアー著、日高敏隆訳、岩波書店(1973)

9. 謝辞

今回の研究にあたり、指導、アドバイスをいただいた矢野先生に深く感謝申し上げます。

粘菌の疑問を解決しよう！

～粘菌の足跡に発生した白い物質の正体を調べる～

3年C組 天野 桃花

3年C組 杉山 絢

3年C組 松本 純子

指導教員 櫻井 昭

1. 要約

私たちの班は、キイロモジホコリという真性粘菌を培養し、その過程で出た疑問を解決するという活動を行っている。以前、粘菌を植え継いだ後、シャーレ内に白い物質が発生した。その正体と現れた理由を調べるため仮説を立て、実験を行った。その結果、2つの仮説にしぼることができた。

キーワード 真性粘菌、変形体、キイロモジホコリ、オートミール、
乳酸菌、植え継ぎ

2. 研究背景

粘菌とは、アメーボゾア門コノーサ綱変形菌亜綱に属する単細胞生物で、真性粘菌と細胞性粘菌の2種類がある。一般的に暗くてじめじめしたところを好み、森や藪、花壇などに生息している。そして、環境に合わせ孢子、細胞、変形体、子実体とさまざまな形態になる（図1）。

私たちが培養しているのは真性粘菌キイロモジホコリの変形体（図2）である。

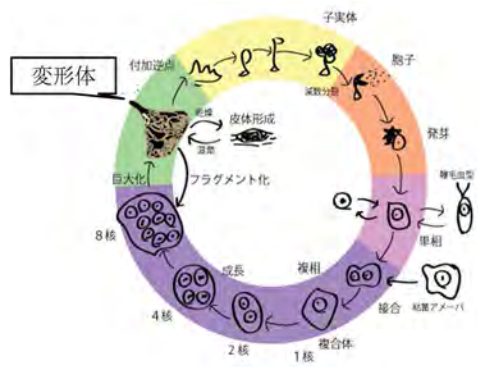


図1 粘菌の一生

（参考文献[10]より引用）



図2 キイロモジホコリの変形体
（中央の大きな黄色い塊）

キイロモジホコリは、植え継ぎという操

作でふやすことができる。植え継ぎとは、粘菌を殖やすための操作であり、本研究では以下の手順で行っている。

- ①大型シャーレ、ピンセット、ろ紙数枚、こまごめピペットのガラス部分、小型のビーカーに入れたひとつまみのオートミールを 100℃で 2 時間乾熱滅菌して無菌状態にする。
- ②クリーンベンチ内でシャーレにピンセットでろ紙を敷きつめ、こまごめピペットを使って蒸留水で湿らせる。
- ③その上にピンセットでオートミールをシャーレ全体にまんべんなく撒き、粘菌の一部を移植し、シャーレに蓋をする。
- ④クリーンベンチの外でシャーレにビニールテープを一周巻いて密閉し、22℃の暗所（ガムテープで密閉したダンボール箱の中）で保存する。
- ⑤一週間ほど経ったら、①～④を再び繰り返す。

粘菌は自由自在にからだを伸ばしたり、縮めたりできる。また好き嫌いがあり、オートミールなどの好物には近づき、光などの嫌いなものからは遠ざかる。オートミールとは、えん麦ともいい、シリアルなどに入れて食べる穀物であり、粘菌のエサになる。さらに、粘菌にはタマゴルリホコリやシロウツボホコリなどのさまざまな種類がある。

3. 研究内容

3. 1 研究の目的

以下、「キイロモジホコリの変形体」を「粘菌」と表記する。

以前、粘菌を植え継いで一週間後に、シャーレ内の粘菌が通った跡に白い物質が発

生した（図3）。そこで、その正体と現れた理由を調べることにした。



図3 粘菌が通った跡に発生した白い物質（シャーレ内の右上部分）

3. 2 仮説

白い物質が何であるかについて、以下の4つの仮説を立てた。

①腐敗した粘菌

肉眼で見ると、腐敗した粘菌（図4）と白い物質では見た目が似ているため。



図4 腐敗した粘菌（右上にある塊）
（参考文献[1]より引用）

②ふやけたオートミール

粘菌を培養しているシャーレはビニール

テープで密閉しており、その中にはオートミールと蒸留水が一緒に入っているの、オートミールが水分でふやけるのは自然なことと考えたため。

③乳酸菌の混入

白い物質は乳酸菌(図5)にも似ている。また東大寺学園の丹賀光一先生によると、粘菌の植え継ぎ時に、もともと乳酸菌が混入した培地から単離した株を譲り受けると、乳酸菌の混入がよく起こるそうである。



図5 乳酸菌

④粘菌が出す何らかの物質

シャーレは密閉されており、その中には粘菌、オートミール、蒸留水、ろ紙しかなく、さらに、白い物質は粘菌が通った跡に発生していたため。(また、この「粘菌が出す何らかの物質」というのは乳酸菌である可能性もある。)

これらの仮説から、以下のように考えて、②、③の2つに絞った。粘菌はエサを与えずに放置すると死んでしまう。しかし、エサは一週間ごとに適量を与えていたので、粘菌は死ぬような環境になかったと考えられる。よって仮説①は否定されたと考えた。また、もし仮説④が正しいとすると、粘菌はシャーレ全体に広がっているのに白い物質はシャーレ全体には広がっていないため

矛盾が生じると考えた。

私たちは、まず仮説②が正しいかどうかを確かめるために、実際に粘菌の植え継ぎと同条件のもとでオートミールをふやけさせる実験を行った。

3.3 実験

3.3.1 実験目的

白い物質が水分でふやけたオートミールであるかを確認する。

3.3.2 実験仮説

粘菌の植え継ぎと同条件のもとでオートミールをふやけさせると、白い物質になる。

3.3.3 実験方法

- ①大型シャーレ、ピンセット、ろ紙数枚、こまごめピペットのガラス部分、小型のビーカーに入れたひとつまみのオートミールを100℃で2時間乾熱滅菌して無菌状態にする。
- ②シャーレにピンセットでろ紙を敷きつめ、こまごめピペットを使って蒸留水で湿らせる。
- ③その上にピンセットでオートミールをシャーレ全体にまんべんなく撒き、シャーレに蓋をする。
- ④シャーレにビニールテープを一周巻いて密閉し、22℃の暗所(ガムテープで密閉したダンボール箱の中)で一週間保存した後で観察する。



図6 実験でオートミールを撒き
シャーレを密閉した直後

3.3.4 実験結果

一週間ふやかせたオートミールは、肉眼で見ると見た目が白い物質と似ていた。



図7 ふやけたオートミール
(中央部のカビの生えていないもの)

3.3.5 実験考察

白い物質の正体はふやけたオートミールという可能性がある。しかしこの考察は視覚的根拠のみによるものであり科学的根拠に欠けるため、乳酸菌という可能性もある。

4. 考察

今回の実験では、白い物質の正体が、ふやけたオートミールなのか、乳酸菌なのかどちらかを断定することはできなかった。実験においても不備が多々見つかり、培地

にカビが侵入するなど、考察するために使える結果が得られなかった。

5. 今後の課題

まず、培養の再検討が必要である。粘菌を培養していると粘菌がカビに侵食されることがあり、これでは調べたいことも調べられない。粘菌の植え継ぎの各操作のやり方を見直し、蒸留水は滅菌してから使用する。また、シャーレにビニールテープを巻くときはクリーンベンチ内で行うなど、無菌操作をきちんと行うべきだと考えた。そして、粘菌や乳酸菌の観察は、肉眼だけでなく、顕微鏡で観察することにより、菌の細胞レベルの特徴を捉えることで、生物の同定を行えるようにしたい。また、菌の同定には、染色液利用した同定法も探し、確かめてみたい。

白い物質の正体を断定することができたら、粘菌に関する他の私たちの疑問を解決していきたい。

6. 参考文献

- [1] 公立はこだて未来大学 2011 年度 システム情報科学実習 グループ報告書
- [2] 適応ダイナミクスに基づく細胞の計算能力(第 54 回物性若手夏の学校)講義ノート、中垣俊之、手老篤史、小林亮著 (2009)
- [3] 真正粘菌ーその知られざる生態を暴く 群馬県立高崎女子高等学校
- [4] ようこそ研究室へ 22 (JST ニュース 1 月号)2009
- [5] Nature 2013 年 1 月号
Nature Publishing Group
- [6] 「粘菌ー驚くべき生命力の謎ー」、松本

淳・解説、伊沢正名・写真、誠文堂新光社(2007)

- [7] 「Focus in the Dark 科学写真を撮る」

伊知地国夫、岩波書店(2008)

- [8] 「準知的粘菌が人類に教えてくれること」、ヘザー・バーネット：TED Talk Subtitles and Transcript, TED.com

- [9] 粘菌の数理モデル

数学検定・算数検定ファンサイト

- [10] 旅するミュージアムー粘菌入門

<http://nennkinn24.web.fc2.com/nenkin1.html>

7. 謝辞

この研究を進めるにあたり、顧問の櫻井先生、東大寺学園の丹賀光一先生をはじめとする多くの方に多大なるご協力やアドバイスをいただきました。とても感謝しています。ありがとうございました。

DNAによる雌雄判別の確立

4年B組 米田 江里奈

4年A組 吉田 彩乃

指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

私たちは、ピスタチオのDNAによる雌雄判別に向けて、研究を行っている。そこで、すでに確立されているイチョウの雌雄判別方法を、ピスタチオへ応用できないかと考えた。そのため、昨年はピスタチオからのDNA抽出にむけ、まず、イチョウからDNAの抽出を試み、DNAの抽出を安定的にできるようになった。今年は、DNAの判別に必要であるPCR法、電気泳動法の確立に向け、実験を進めていった。

キーワード ピスタチオ、アスパラガス、PCR法、DNA、抽出

2. 研究の背景と目的

ピスタチオは、雌雄異株であり、実をつけるためにはどちらの木も必要となる。また成長が遅く、実をつけるまで成長するのに約10年かかり、成木となるのに約20年かかると言われている。つまり、実をつけてから、雄株、雌株の判断をしていたら、生産の効率が悪い。そこで、私たちは、ピスタチオがまだ実のならない苗木の間にDNAを利用し雌雄の判別を行い、雌株を多く育てることで多くの実を得られるのではと考え、研究を始めることにした。そこで、この方法を確立するのにあたり、雌雄判別法が確立されているイチョウのDNAによる雌雄判別の研究を行い、ピスタチオに応用しようと考えた。そして昨年は、雌雄判別に必要なDNAの抽出方法の確立を目指し、イチョウの葉からのDNA抽出を試みることにした。結果、安定的な抽出を可能

にすることができた。今年は、DNAからの雌雄判別に必要なPCR法と電気泳動法の確立を目標に、実験を行うことにした。そこで、論文検索を再度行ったが、イチョウの雌雄判別法の詳細を見つけることができなかった。しかし、DNAによるアスパラガスの雌雄判別法の詳細を見つけることが出来た。そこで、アスパラガスに研究材料を切り替え、そこからピスタチオへの応用を検討することにした。

3. 研究内容

3.1 DNAの抽出実験

アスパラガスからのDNA抽出実験

3.1.1 目的

イチョウで確立したDNAの抽出法を利用し、アスパラガスからのDNAを安定的に抽出する方法を確立する。

3.1.2 仮説

イチョウと同じ DNA 抽出キットを用いることで、アスパラガスからも DNA の抽出ができる。

3.1.3 実験方法

＜材料＞

アスパラガスの葉

DNA キット（2 種類使用）

- ・ Plant Genomic DNA Extraction System
- ・ Dneasy Plant Mini Kit

＜事前準備＞

TE(10mM Tris-Hcl, 1mM EDTA pH8.0) の作製

- ・ 1M Tris-Hcl(pH8.0) 2mL — (i)
- ・ 0.5M EDTA(pH8.0) 400 μ L — (ii)

(i)と(ii)混ぜ、200mL に純水でメスアップする。その後、オートクレーブで滅菌し、4℃で保存。

＜抽出方法＞

アスパラガスの葉をすりつぶし、DNA 抽出キットを用い、DNA を抽出。DNA の抽出確認は、分光高度計によって測定した。

3.1.4 実験結果

表 1 のような結果が得られた。①は 6/14、②は 12/16、③は 10/29、④は 12/14 に実施したことを表している。抽出量は μ g/ μ L である。純度は、260nm/280nm の値であり、2.0 に近いほど良いと判断される。

3.1.5 実験の考察

昨年度までは、DNA 抽出量の値が大きかったため、DNA 以外の不純物を測定してしまっているのではないか、という疑いがある。

った。しかし、アスパラガスでは、純度の値も 2.0 に近く、安定的に抽出できたといえる。このため、抽出した DNA を用いて、PCR 法による DNA 断片の増幅を試みることにした。

表 1 アスパラガスからの DNA 抽出結果

DNA抽出Kit	サンプル	抽出量	純度
Plant Genomic DNA Extraction System	①-1	54.7	1.73
	①-2	6.8	1.67
	①-3	8.3	1.59
	②-1	36.5	1.43
	②-2	56.9	1.43
	②-3	33	1.48
Dneasy Plant Mini Kit	③-1	×	1.23
	③-2	0.3	2.21
	③-3	-0.1	0.33
	③-4	1.6	0.84
	③-5	0.1	1.02
	③-6	0.2	0.39
	③-7	2.1	0.93
	④-1	3.4	2.05
	④-2	2.7	1.52
	④-3	1.6	1.44
	④-4	1.9	1.96
	④-5	1.6	2.2
	④-6	3.1	2.13
	④-7	0.1	0.81

3. 2 アスパラガスの DNA を用いた雌雄判別実験

3.2.1 目的

アスパラガスから抽出した DNA を用いて、PCR 法、電気泳動法を利用した、アスパラガスの雌雄判別を行う。

3.2.2 仮説

先行研究の論文に従い、実験を再現することでアスパラガスの雌雄判別を行うことができる。

3.2.3 実験方法

3.2.3.1 PCR法を用いたDNA断片の増幅方法

1つのサンプルにおける、PCRを行うための各溶液の濃度は以下の通りとした。

Genomic DNA	25ng
dNTPs	2.5mM
Primer(forward)	5pmol
Primer(reverse)	5pmol
10×PCR buffer	2.5 μ L
Taq DNA polymerase	1.0U

Genomic DNA には、表 1 のサンプル④-2 と④-4 を使用した。

Primers の名称と塩基配列は、以下の通りである。

表 2 プライマーの塩基配列

プライマー名	塩基配列
Asp1-T7-F	CTTGGCGTGAATACGTTGC
Asp1-T7-R	TCTCTTGTTCAATATACTC
Asp2-SP6-F	GCTCTTTGAGGGTGTTT
Asp2-SP6-R	TGCTCCTCCACTCTCA
Asp4-SP6-F	AGGCCTCTCAAGTTTCA
Asp4-SP6-R	AGCAGATCCCACATTGA
Asp8-T7-F	AGATCTGAGATCCGGTTCC
Asp8-T7-R	AATAGTTTCATGGAGGAAGG

PCR のリアクションプログラムは以下のように行った。

94℃	30 秒	↑ 32 回繰り返す ↓
94℃	30 秒	
60℃	30 秒	
72℃	40 秒	
72℃	5 分	

3.2.3.2 電気泳動法を用いた DNA 断片の確認方法

1%アガロースゲルを作成し、PCR 法に

より増幅した DNA 断片を電気泳動法により、DNA 長さにより分ける。このとき、100V で 30 分泳動を行った。その後、DNA を染色し確認する。

3.2.4 実験結果

表 3 ゲルのレーンと溶液の対応表

レーン	プライマー名	GenomicDNA
①	Asp1-T7-R/F	サンプル④-2
②		④-4
③	Asp2-SP6-R/F	サンプル④-2
④		④-4
⑤	Asp4-SP6-R/F	サンプル④-2
⑥		④-4
⑦	Asp8-T7-R/F	サンプル④-2
⑧		④-4

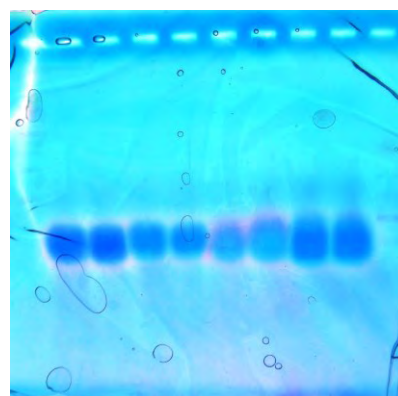


図 1 電気泳動結果 1

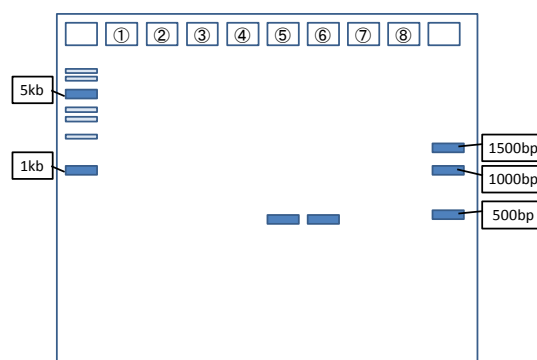


図 2 電気泳動結果 2

中央のレーン⑤と⑥のあたりにバンドが見られたが、ローディングバッファーが重なっていたため見えにくかった。よって、確実にバンドがでたとはいえない。レーン⑤と⑥はいずれも Asp4-SP6 のプライマーで増やした DNA で Genomic DNA が異なる。

論文によると Asp4-SP6 のプライマーは 389bp に現れ、ただし雌雄で現れるプライマーは同じである。

3.2.5 考察

前のキットで抽出した DNA を用いて先行研究をもとに行った実験では、確認できなかったが、先行研究で用いられていた DNA 抽出の新しいキットと新しい塩基配列のプライマー、そして PCR 法での増やし方も変えてみたところ、図 1、図 2 のように、Asp4-SP6(-R/-F)の部分のプライマーでバンドが確認されたことから、DNA 抽出は PCR を行えるだけの量と純度があることがわかった。

4. 考察および改善点

昨年の実験でイチョウから DNA の抽出を安定的にすることができるようになり、それをアスパラに应用することができた。また、抽出した DNA を用いて PCR 法を行い、一つのプライマーの増幅を行うことが出来た。しかし、他のプライマーでは確認できず、3 日後には消えてしまったため、再度実験を行う必要がある。PCR 法でうまくバンドが出なかったため、先行研究で用いられていた異なるキットを用いて抽出を行うことにした。新しく用いたキットでは、うまく値が出ないものもあったのでもう少し

正確に値が出るように改善が必要と考えられた。また、すり潰す際に、液体窒素を用いることで、すり潰す時間の軽減、細かく粉砕することができたが抽出量に変化は見られなかった。

5. 今後の課題

DNA を Dneasy Plant Mini Kit で抽出した際に値がうまく出なかったため、改善点を考える必要がある。また、抽出を雌雄判別したいのでアスパラガスの雌雄の違いを調べ、区別し DNA を抽出する。PCR で DNA を増やすことが可能なことがわかったので、再度考え直し、PCR を行い、アスパラガスの雌雄判別法の確立を目指す。その後、ピスタチオからの DNA 抽出を試み、PCR 法を用いた雌雄判別法を確立させたい。そのためには、新たにピスタチオの DNA の塩基配列を検索するとともに、ピスタチオと同属の植物において、調べられている DNA 断片を文献検索し、PCR 法に使えるようなプライマーを考案する必要がある。

6. 参考文献

- [1] BAC-derived diagnostic markers for sex determination in asparagus, A.Jamsari, 2003.
- [2] DNA polymorphisms amplified by arbitrary primers are useful as genetic markers, John G.K.Williams, 1990.

7. 謝辞

植野先生、櫻井先生、いろいろなアドバイスを頂きありがとうございました。

マツタケの人工培養を目指して

4年C組 結崎 祈

2年B組 加藤 大翔

指導教員 櫻井 昭

1. 要約

私たちの班は、マツタケの人工培養を目指し、マツタケ菌の純粋培養を試み、なぜマツタケ菌の人工培養が困難であるのか、培養するにはどのような培地条件が必要なのか検討を行っている。昨年はマツタケ菌の菌糸を維持することに成功し、今年は培地の形や成分を変えて成長速度を早める研究を行った。また、私たちが培養している菌糸がマツタケの菌糸であることを証明するために、DNA キットを用いた鑑定を行った。

キーワード マツタケ、クエン酸回路、DNA、菌糸の立体化

2. 研究の背景と目的

マツタケの人工培養の成功例はいまだ報告されていない。私たちは、なぜマツタケは人工培養が困難なのか興味をもち、マツタケの人工培養を目指して研究を平成 23 年度から始めた。1 年目はシイタケの人工培養を成功させ、2 年目からマツタケの人工培養をめざして研究を始め、3 年目にマツタケ菌糸の維持に成功した。今年は昨年維持できるようになったマツタケ菌糸を用いて成長速度を早めるための培地の検討を行うことにした。また、私たちが培養している菌糸がマツタケであるという証明をするために、DNA キットを使用した鑑定を行った。

マツタケの菌糸は、通常の培地では横方向へ広がっている。しかしマツタケの子実体は、平面的ではなく立体的である。マツタケの菌糸を平面的ではなく立体的に伸び広げれば、子実体形成へと近づくのではないかと考え、今回の実験を行った。

<実験仮説>

マツタケが本来生育する環境である土壌にできるだけ近づけた形状の培地を用いれば、立体的に菌糸が広がる。

<事前準備>

実験を行う場をビニールカーテンで区切り、その中でプラズマクラスターを約 24 時間つけ放しにすることで、できるだけ菌の少ない状態を作る。また、マツタケ菌を扱うときは、クリーンベンチ内で行う。

以下のすべての実験において、この無菌操作は共通で行う。

3. 実験内容

3. 1 マツタケ菌糸の立体化

3.1.1 クラッシュ培地の作成

<研究目的>

<マツタケ培地>

IFO-7 培地と浜田培地の 2 種類の培地を採用している（結崎祈 2014）。培地の組成は以下の通りである。

IFO-7 培地

乾燥酵母	1.5 g
グルコース	6.0 g
寒天	5.4 g
蒸留水	Σ 300ml

浜田培地

乾燥酵母	1.5 g
グルコース	6.0 g
寒天	5.4 g
磷酸カリウム	0.6 g
硫酸マグネシウム	0.3 g
蒸留水	Σ 300ml

<実験方法>

●クラッシュ培地の作成

メスを使用して、シャーレ内の培地を約 5 mm 角にきざみ、クラッシュ状にする。インキュベータ内で、28 度で約 7 ヶ月間培養した。マツタケ菌の培地には今回は 2 種類の培地においてクラッシュ状のものと、通常のものをそれぞれ 1 枚ずつ使用した。

●菌糸の広がった面積の算出法

菌糸の広がった所を円と考え、その円に 5mm 方眼の円に外接する正方形を重ねる。円の中に含まれたマス目を数え、その数をクラッシュ培地の菌糸が殖えた培地のかけらの個数とする。このとき、マス目に円の境界がある場合、円内の面積が広ければ円に含まれ、円外の場合は広ければ円に含まれないものとする。クラッシュ培地のかけらはすべて 5mm 角の立方体と考え、菌糸

が広がった範囲内のかけらの表面は全面均等に菌糸が広がっているものとする。

かけらの個数とかけらの表面積の積が菌糸の広がった面積となる。計算の際、円周率 π は 3.14 とする。

			1	2	3	4			
	5	6	7	8	9	10	11	12	
	13	14	15	16	17	18	19	20	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	61	62	63	64	65	66	67	68	
	69	70	71	72	73	74	75	76	
			77	78	79	80			

<実験結果>

通常のもは培地の表面上にしか菌糸が広がらなかったが、クラッシュ培地では培地の隙間に菌糸が入り込み、表面上だけでなく下方向にも伸びた。表面上の広がり、クラッシュ培地の場合、通常のものよりも 1 cm ほどせまくなっていた。算出法に従って面積を算出したところ、通常のものが 3846.5mm²、クラッシュしたものが 12000mm² となった。

なお、計算式は以下のとおりである。

・通常の培地

$$35(\text{mm}) \times 35(\text{mm}) \times 3.14 = 3846.5(\text{mm}^2)$$

・クラッシュ培地

$$5(\text{mm}) \times 5(\text{mm}) \times 6 = 150(\text{mm}^2)$$

$$150(\text{mm}^2) \times 80(\text{個}) = 12000(\text{mm}^2)$$

<実験考察>

この実験により、培地をクラッシュ状にするとマツタケ菌糸は横だけでなく下方向にも広がることがわかった。また、クラッシュ培地で広がった菌糸の総面積は通常の培地の約 4 倍になっていたことから、菌糸の成長速度は培地をクラッシュすることで上げることができるといえる。以上のことから、さらに厚みのある培地を作成し、菌糸を植え継げば上下左右に菌糸が広がり、さらに立体的に菌糸を広げられる可能性が考えられた。そこで、次により厚みのあるクラッシュ培地を作り、培養することにした。

3.1.2 フラスコクラッシュ培地の作成

<実験仮説>

より厚みのあるクラッシュ培地を作成し、菌糸を埋め込めばより立体的に菌糸が広がるのではないかと考えた。

<実験方法>

3.1.1 で用いた組成の培地をシャーレよりも深さのある 200ml の三角フラスコに作成し、薬匙を使用して約 5 mm 角にクラッシュする。この時メスを使用すると、メスの柄が短く作業がしづらいため、柄の長い薬匙を使用した。表面から約 1 cm の深さのところに菌糸を植え継ぎ、フラスコにパラフィルムを二重に巻いた後、28℃のインキュベータ内で約 7 ヶ月間培養した。

<実験結果>

植え継いだ周辺の培地が白っぽくなり、菌糸の広がりが確認できた。

<実験考察>

培地をクラッシュし、その中に菌糸を埋め込んだため、フラスコの外側から菌糸の広がりを観察することが困難になり、全方向に増えたかどうかを確認できなかった。固体の培地では、クラッシュされた培地の隙間をぬって立体的に菌糸が広がると考え、実験を行ったが、この方法では培地が不透明なため菌糸の観察が困難である。菌糸の広がりを正確に観察するためには、何らかの工夫が必要と考えられる。

3.1.3 液体培地

<実験仮説>

液体培地を使用すれば菌糸の伸びを妨げず、なおかつ菌糸の観察が可能になるのではないかと考えた。

<実験方法>

3.1.1 で用いた培地の組成から寒天を抜き、IFO-7 培地と浜田培地の液体培地を 500ml の三角フラスコに作成し、植え継ぎを行う。28℃のインキュベータ内で、約 5 ヶ月間培養した。

<実験結果>

植え継いだ菌糸の塊を核として、放射状に菌糸が伸びたが、半径 1.5cm ほどにしか広がらなかった。

<実験考察>

液体培地では固形培地と比べてあまり菌糸の広がりが見られなかった。このことから菌糸が伸び広がるためには、つたい広がるための地盤が必要だと考えられる。

3. 2 新規培地の検討

3.2. クエン酸およびフマル酸培地

<実験目的>

マツタケ菌の成長速度は非常に遅く、現在実験に使用している浜田培地と IFO-7 培地では成長に多くの時間がかかってしまう。そこで 3 年前「グルコースの代わりにクエン酸回路で作られる有機酸を培地に直接加えれば、マツタケ菌の成長速度が上がるのではないか」という仮説を立て実験を試みたが、実験環境が整っていなかったこと、pH 調整をしなかったため培地が固まらなかったことなどが原因でマツタケ菌が殖えなかった。

今回は実験環境を整え pH 調整を行い、再度実験を行った。

<実験仮説>

グルコースの代わりにクエン酸回路で作られる有機酸を培地に直接加えれば、マツタケ菌の成長速度が上がるのではないか。

<実験方法>

IFO-7 培地のグルコースの代わりに、それぞれクエン酸、フマル酸を加え、pH を 7 にできるだけ近づけた培地を作成し植え継ぎを行う。

クエン酸とフマル酸は 250ml の IFO-7 培地に含まれているグルコース 5g の分子量と、同じ分子量になるように加えた。

植え継ぎ後、シャーレにパラフィルムを二重に巻き、28℃のインキュベータ内で約 9 ヶ月間培養した。

<実験結果>

クエン酸を加えた培地は菌糸が枯れてし

まい殖えなかった。フマル酸を加えた培地は殖えたが、浜田培地や IFO-7 培地に比べて菌糸の成長速度が非常に遅かった。

<実験考察>

問題点を解決したが仮説は証明されなかった。今回の培地は pH を 7 にしたが、通常の培地は pH を 5.5 にしているため、この pH の差が、菌糸が殖えにくい原因の 1 つだと考えられる。今回の結果がクエン酸とフマル酸のみで見られるものなのかを確認するために、他の有機酸の場合も実験する必要があると考えられる。

3.2.2 おがくず培地

<実験目的>

3.1.1 での実験では寒天培地をクラッシュし、本来生育する環境である土壤に近づけた。新規培地の検討にあたり、シイタケの培養に使われているおがくず培地を使用すれば寒天培地よりも土壤に近い培地になると考え、実験を行った。

<実験仮説>

おがくず培地を使用すれば寒天培地よりもより立体的に菌糸が広がる。

<実験方法>

材料をすべて混ぜた後ポットに入れ、減菌のためにオートクレーブにかけて培地を作成する。表面から約 2cm の深さの所に菌糸を植え継ぎ、28℃のインキュベータ内で 7 ヶ月間培養した。培地の組成をまとめると以下のようなになる。

おがくず培地

おがくず(シラカバ) 900ml

米ぬか 300ml

水 715ml

<実験結果>

培地を 5 つ作成したが、3 つはカビに汚染されてしまった。残った 2 つの培地もポットの外側からは菌糸の広がりを確認できなかった。1 つだけポットを開け、中を観察したが、菌糸の広がりは見られなかった。

<実験考察>

寒天培地作成時と同環境で行ったのにもかかわらず、カビに汚染されてしまったため、この原因を突き止める必要がある。また、おがくずに使用されている木材の種類によって違いが生じるかどうか検討したい。

3. 3 マツタケのDNAを用いた判別法

3.3.1 実験目的

私たちは植え継ぎを繰り返し、マツタケ菌を増やしている。培養している菌糸が本当にマツタケの菌糸であるのかを確認するために DNA 抽出キットを使用し、判別を行った

3.3.2 実験仮説

現在培養している菌糸はマツタケの菌糸である。

3.3.3 実験方法

DNA 抽出キット (DNeasy® Plant Mini Kit (50)) に記されている操作手順に従い DNA を抽出する。その後、分光器で抽出で

きた DNA と濃度を計測する。計測の結果は以下のとおりである。

	抽出量	純度 260um/280um
サンプル 1	8.5μg/μL	1.25
サンプル 2	6.4μg/μL	1.25
サンプル 3	26.7μg/μL	25.8

これらのサンプルのうち、今回はサンプル 1 とサンプル 2 を PCR 法に用いた。PCR reaction mix の組成は以下のとおりである。

・ 12.5n g のゲノミック DNA	
サンプル A	0.085 μ g / μ L
サンプル B	0.064 μ g / μ L
・ TmF	10nm/ μ L
・ TmR	10nm/ μ L
・ PCRbuffer(×10)	2.5 μ L
・ dNTP	2.5 μ L
・ Tug polymerase	0.625U
・ DW	Σ25 μ L

使用したプライマーの塩基配列は以下のとおりである。

TmF CATT TTATTATACACTCGGT

TmR GACGATTAGAAGCCCGACCTA

また、サーマルサイクラーの reaction program は以下のとおりである。

①	95℃	10 分
②	95℃	30 秒
③	55℃	30 秒
④	72℃	1.5 分
②～④を 35 サイクル		
⑤	72℃	8.5 分
⑥	4℃	∞

その後、1.5% の agarose gel を使用して電気泳動を行った。

3.3.4 実験結果

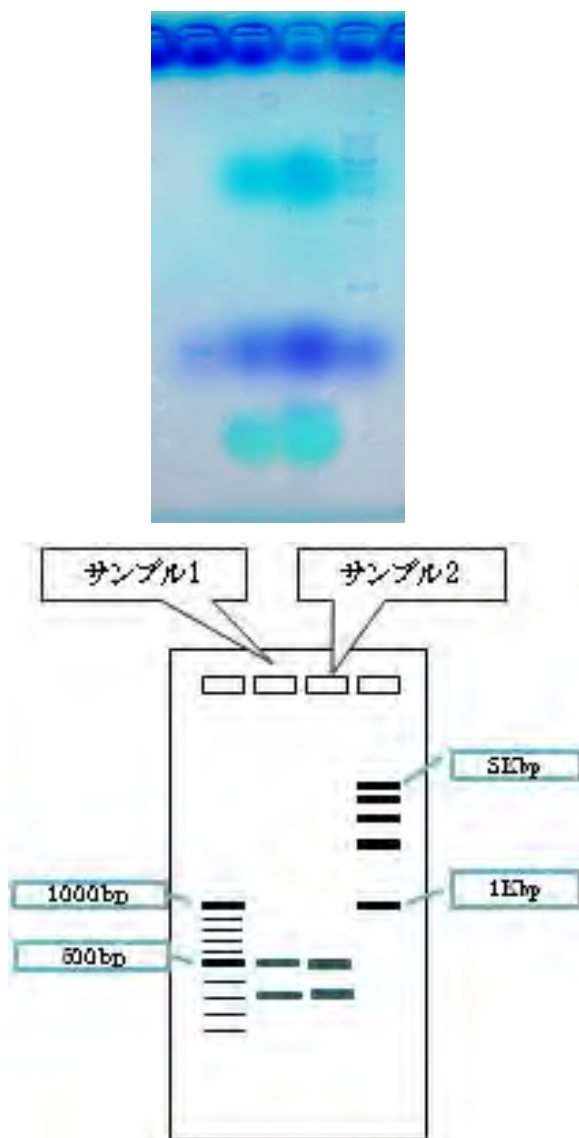


図 1

サンプルがマツタケである場合、図 1 の楕円の位置にバンドが現れる。しかし、今回の実験では 300bp の位置(図下側の楕円)にしかバンドが見られなかった。500bp の位置 (図上側の楕円)にも現れていたかもし

れないが、loading buffer と重なってしまい確認ができなかった。

3.3.5 実験考察

電気泳動のとき、agarose gel にある穴にマーカーとサンプルをマイクロピペットを使用して入れるのだが、これがうまく穴に入らず、バッファーへ流れ出てしまったことが、バンドが出なかった原因と考えられる。しかし、300bp の位置には印が出ているため、サンプルがマツタケである可能性が高いと考えられる。

4. 考察

今回の研究で、マツタケの菌糸は培地をクラッシュすれば培地の隙間をぬって広がるが、液体の培地では広がらなかった。このことからマツタケ菌糸が広がるためには、培地に強度が必要だと考えられる。しかし、マツタケは液体中でも菌糸を広げられるということから、酸素の少ない状態でも生育できると考えられる。

5. 今後の課題

今回の実験はいずれも大きな成果を得ることはできなかった。しかし、今回の実験からマツタケの菌糸が広がるためには培地に強度が必要だと考察できたので、どのぐらいの強度があれば菌糸は広がることのできるのかを調べるために固体と液体の間であるゲル状の培地を作成し、実験を行いたい。また、マツタケはアカマツの木の付近に生育するため、現在アカマツとマツタケ菌の関係性を調べるためのアカマツを育成している。このアカマツを利用した新規培地の検討も行いたいと考えている。3.3

節の実験が操作ミス等によりうまくいかなかったため、再度実験を行いたい。

6. 謝辞

本研究活動において、顧問の櫻井先生に、多大なご指導を受け賜いました。また、DNA の抽出、PCR 法、電気泳動法について、DNA 班の米田さんにご指導を受け賜いました。この場をかりて、深く感謝申し上げます。

植物の回転角の規則性

4 年 B 組 山田 莉彩
指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

これまで、私は植物の形態にみられる数学的な規則性について研究してきた。前回の研究から、セイタカアワダチソウの葉序の回転角は黄金角ではなくフィボナッチ数列に関する葉序の回転角であると結論付けた。しかし本研究の計測によって、黄金角ともフィボナッチ数列に関する葉序とも近似していないことが判明した。また、顕微鏡を使い維管束の配列を観察することによって葉序の回転角を導き出した結果、フィボナッチ数列の葉序になり、これは角度の計測で予想されていたものより黄金角に近似した値となった。さらに、文献調査により発見された葉序の回転角についての仮説を考察した。

キーワード 黄金角、セイタカアワダチソウ、葉序、維管束

2. 研究の背景と目的

私は、共同研究者とともに黄金比やフィボナッチ数列などの数学的な規則性が、植物の形態に見ることができるということを本で知り、興味を抱いた。そこで、植物に対して実際にどのように利用されているのか、自分の手で確認することとした。

「セイタカアワダチソウの葉の付き方（葉序）の回転角に黄金角がみられるのではないか」ということを検証するため、3 年間で 4 回にわたり計測を続けてきた。その結果、以下の考察を得ることができた。

セイタカアワダチソウの葉序は、葉の原基が発生した瞬間はもともと黄金角だった。しかし、黄金角からずれ、セイタカアワダチソウの葉序の配列は、5/13 葉序（13 枚の葉が茎を中心として 5 回転すると、14 枚目が 1 枚目の葉に重なる葉のつき方）に近似した。

この考察を踏まえ、セイタカアワダチソウの葉序の回転角を、より精密に調べるため ImageJ という画像処理ソフトを用いて再度計測を行い、新たなアプローチで規則性を発見できないか試みることにした。また、葉の原基が発生する原理に関する先行研究を調査し、本研究の考察を深めていこうと考えた。

3. 研究内容

3. 1 基本事項

●黄金比・黄金角

黄金比 $1 : \phi$ は、人類が最も美しいと感じる比率であるとされている。例として、パルテノン神殿や、さまざまな絵画などの長方形の縦横の比率に使われている。この黄金比は、自然界によく見られる値である。その比は

$$1:\phi=1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

で表すことができる。

黄金角とは、円周 360° を $1:\phi$ に分けた角度の 1 に当たる部分のことで、約 137.5° になる (図 1)。

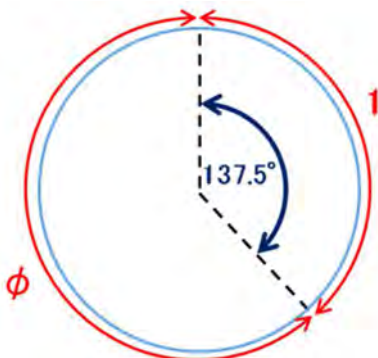


図 1 黄金比と黄金角の関係

●フィボナッチ数列に関する葉序

葉序の配列には、フィボナッチ数列に出現する数によって成り立っているパターンが存在する。例として、 $1/2$ 葉序、 $1/3$ 葉序、 $2/5$ 葉序、 $3/8$ 葉序、 $5/13$ 葉序などがあげられる。本研究では以前、セイタカアワダチソウの葉と葉の間の角度は 13 枚の葉が 5 回転すると 14 枚目が 1 枚目の葉に重なるという $5/13$ 葉序 (図 2) に近似していると結論付けた。このときの回転角は 138.5° であった。

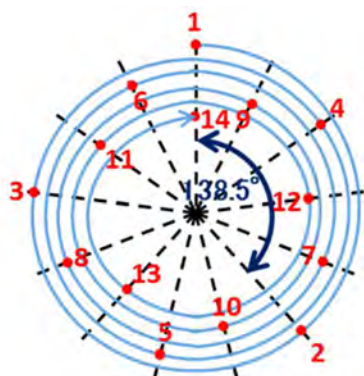


図 2 $5/13$ 葉序の回転の周期

3. 2 実験 1 : 葉と葉の間の角度の計測

3.2.1 目的

基本事項を踏まえ、葉の回転角には黄金比が適していると考えたため、それを画像処理ソフト ImageJ によってより正確に計測を行い検証する。

3.2.2 仮説

セイタカアワダチソウの茎に対する葉のつき方は、黄金角に従っている。

3.2.3 材料・方法

<標本>

平城宮跡のセイタカアワダチソウを採集
時期：2015 年 5 月～9 月 31 本

<方法>

セイタカアワダチソウを採取し、葉の付け根を残して葉を切る。その後、1 つ目と 2 つ目の付け根に、針を葉の中心に沿うように刺す。次に、茎の真上から写真撮影を行う。以上の操作を、全ての葉の付け根に対して繰り返す (図 3)。撮影した写真を使って、葉と葉の間の角を計測する。以前は分度器で計測していたが、今回は正確性と速度を重視し ImageJ という画像処理ソフトを使用した。

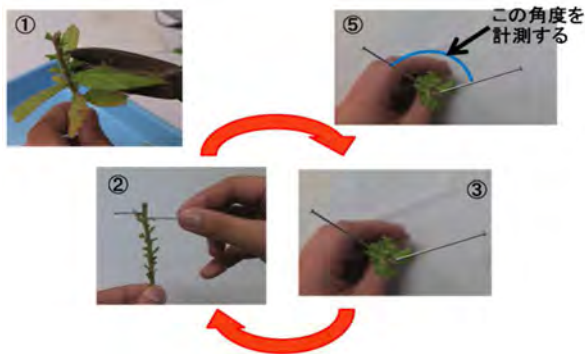
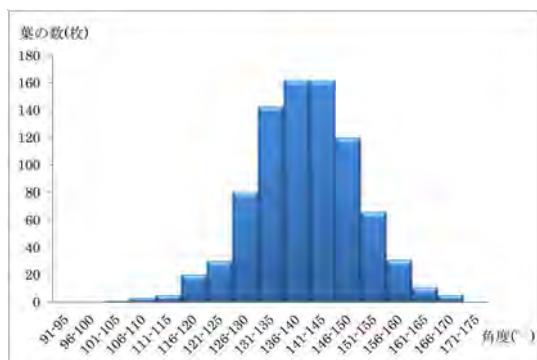


図 3 実験手順

3.2.4 実験結果

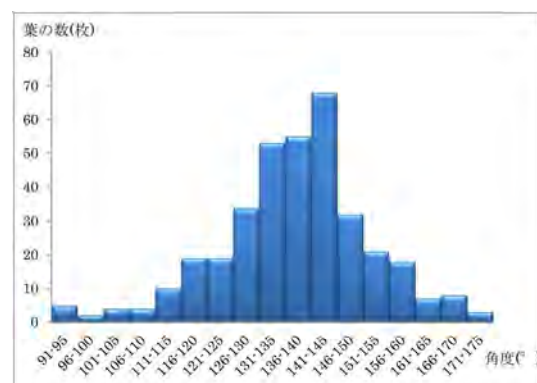
以下のグラフは、縦軸は調べた葉と葉の間の数、横軸は角度を表している。



平均値 139.227° 中央値 139.212°
標準偏差 9.934

3.2.5 考察

前回の計測結果



平均値 138.1° 中央値 140°

前回と比較して、今回は散らばりが少なくなった。また、131°～135°、136°～140°と141°～145°の3つが特に葉と葉の間の角度として多いことがわかる。平均値・中央値ともに黄金角 137.5° や 5/13 葉序の 138.5° に正確に近似しているとは言えない結果であった。しかし、平均値と中央値は近い値となった。1 個体あたりの平均値・中央値を計測すると、どれも黄金角 137.5° や、フィボナッチ数列に関する葉序

の回転角（黄金角に収束していく）が含まれる 135°～141° の範囲に収まった。そのため、セイタカアワダチソウの葉の回転角は、その範囲内（135°～141°）の回転角をもってついていくと考えられる。黄金角とは、植物体を茎頂から見たときに葉ができるだけ重ならないように配置できる角度である。よって計測結果から、セイタカアワダチソウの葉のつき方は、黄金角やフィボナッチ数列に関する葉序の回転角に近い回転角をとることで、葉が意図的に重なりにくく配置されていると考えられる。

3. 3 実験 2：維管束の観察

3.3.1 目的

実験 1 において、葉の位置は風や日光といった環境要因に大きく左右されるため、葉の間の角度を測る際に誤差が生じやすいという問題が発生した。この問題を解決するため、私は維管束という組織に着目した。セイタカアワダチソウのような双子葉類の植物には、道管と師管がまとめられた維管束という組織が茎の中に分布している。この維管束はどの葉にも 1 本ずつつながり、水分や養分を植物の体全体へ運んでいる。維管束の位置は外部環境によって左右されにくいと思われる。ゆえに、維管束の間の角を測ることで、葉の間の角度を直接計測するより正確に葉序の回転角を測定することができると考えた。そこで、セイタカアワダチソウの茎の断面を観察し、連続する葉に対応する維管束 2 つと全体の維管束の数から大まかな回転角を算出する。

3.3.2 仮定

この実験における維管束の数から回転角

を算出するにあたって、セイタカアワダチソウの維管束は以下の 5 つを満たしていると仮定した。

- ①維管束は茎の付け根から茎の頂上まで必ず同じ本数になっている。
- ②1 枚の葉につながる維管束の本数はどの葉でも一定で、3 本である。
- ③連続する葉に対応する維管束の、3 つある維管束のうち中央に位置する 1 本を、その葉に対応する維管束とする。
- ④1 つの維管束を点とみなし、点が円周上全体に等間隔に並んでいると考える。
- ⑤連続する葉に対応する維管束（点）の距離の比を間の維管束の個数から算出し、回転角とみなす。

今回の観察により、②の仮定は図 5 および図 6 で実証された。図 5 は図 4 における A で切った断面であり、図 6 は B で切った断面である。図 6 では、赤で囲まれた維管束が同心円状に並ぶ他の維管束と離れた位置にあるため、これは直前の葉に繋がっていた維管束であったということがわかる。図 5, 6 から、葉には始めは 3 本の維管束が分布しているということがわかる。

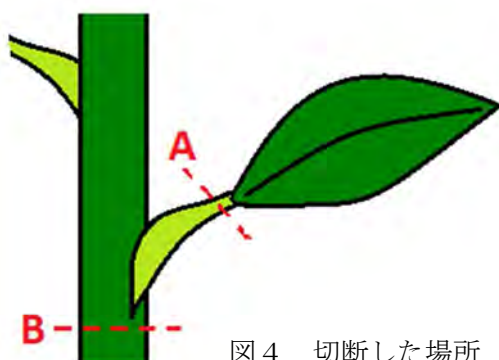


図 4 切断した場所



図 5 断面 A における切片

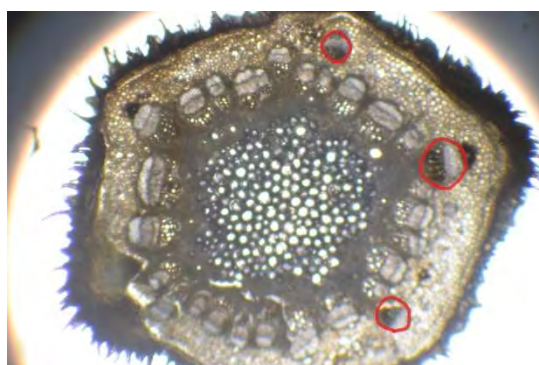


図 6 断面 B における切片

3.3.3 仮説

連続する 2 枚の葉に対応する維管束の間の角の理論値は黄金角に近似する。

3.3.4 材料・方法

<標本>

平城宮跡のセイタカアワダチソウ

<方法>

茎に対して横方向にカミソリで薄くスライスする。このように作成した横断切片を水で封入し、プレパラートを作製する。このプレパラートを光学顕微鏡に取り付けたカメラで撮影し、切片画像を得る。その後、切片画像から全体の維管束の数を数え、連続するにそれぞれつながる維管束同士の間の維管束を数える。

3.3.5 実験結果

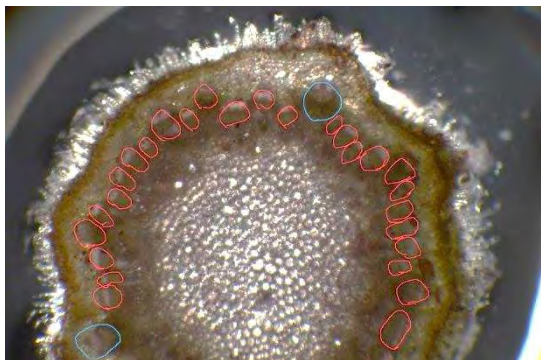


図7 切片(1)



図8 切片(2)

図7, 8は同じ切片を撮影した写真である。赤い丸で囲まれたものが維管束で、青い丸で囲まれたものが葉につながっていた維管束である（葉につながっていた維管束は隣り合う葉の間を何枚かに分けてスライスし、導き出したものであるため、撮影された切片は直接葉とつながっている場所ではない）。この写真から、全体の維管束の数は42個、劣弧上にある維管束の数は15個、優弧上にある維管束の数は25個なので、距離の比は $16:26=8:13$ となる(図9)。

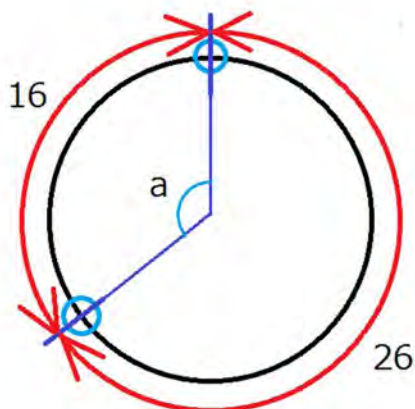


図9 連続する維管束の間の角

以上より回転角は、

$$\angle a = 360^\circ \times \frac{16}{42} = 137.143 \dots^\circ$$

と算出された。

3.3.6 考察

実験結果より求められた回転角は黄金比に近似する。また、それだけでなく、劣弧と優弧の比が $8:13$ であり、この回転角がフィボナッチ数列に関する葉序である $8/21$ 葉序のものであることもわかった。しかし維管束の総数や連続する葉同士の間での維管束の数は個体や取り出す葉と葉の間によっても異なるため、一概に $8/21$ 葉序と決定することはできない。今後は標本数を増やし、他の双子葉類も観察してこの仮説が正しいか引き続き検証を続けていきたい。

4. 考察

研究の成果として、セイタカアワダチソウの葉序の回転角は黄金角に近い値をとることがわかったが、黄金角に一致するという結果は得ることができなかった。現在、葉序の回転角が決定される仕組みと

して、近藤滋が植物の成長ホルモンに着目した説を唱えている。彼の仮説では、シュートでの葉の原基の形成は植物ホルモンの濃度勾配によることを根幹としている。彼は、植物の回転の角度は常に一定であり、植物ホルモンによる原基発生の阻害効果は発生源（葉の原基）からの距離に反比例すると仮定した。その上で、彼はその植物ホルモンの濃度勾配が葉の原基を黄金角にして発生させていると唱えている。この仮説から、植物は葉の発生の段階では黄金角の構造を取っていると考えられる。

一方、実験 1（直接葉と葉の間の角の計測）の結果から、葉と葉の間の角度は黄金比に近似しないという結論が出た。植物が日光をできるだけたくさん受け、効率よく光合成をおこなうために黄金角を回転角に設定しているとすれば、葉が発生する瞬間ではなく葉が日光を実際に受けるときの形態から計測した方がより目的に適していると考えたため、この方法を選んだ。ゆえに近藤滋の仮説と実験 1 から、発生の段階では黄金角にプログラムされていた葉序が、環境によって影響を受けることで葉序の回転角は黄金角からずれていったのではないかと考えられる。

実験 2 では、植物の維管束に着目した。維管束という組織は、シダ植物および種子植物のみに見られる構造である。フィボナッチ数列に関する葉序をもつ植物は、すべてこの植物に該当し、維管束の構造がみられる。植物は、茎頂分裂組織、根端分裂組織、側部分裂組織という 3 種類の分裂組織が分裂していくことで生長する。茎頂分裂組織は、葉の原基が発生する場所で、根端分裂組織は、根の伸長する場所である。ま

た側部分裂組織とは、維管束植物のいわゆる形成層のことを指す。維管束は（特にセイタカアワダチソウを含む被子植物において）一次成長で茎頂分裂組織の細胞分裂によって発生し、二次成長で側部分裂組織の細胞分裂によって成長する。そして、近藤滋の仮説は茎頂分裂組織において葉序の角が黄金角になっているというものであった。これらを踏まえ、維管束は茎頂分裂組織から発生するから、実験 2 において維管束から導き出した葉序の回転角は黄金角に近似したため、本研究は彼の仮説を裏付けていると考えられる。

ただし、二次成長での側部分裂組織の細胞分裂によって、一次成長で形成された維管束の数から維管束の数が増えたということも考えられる。事実、今回の実験 2 において、写真から維管束は茎の上から下まで常にすべて同じ本数でないことがわかっている。また、個体によって維管束の数が多い、茎が太い個体ほど維管束の数が多かったことから、おそらく二次成長での側部分裂組織で維管束が増えるような何らかの現象が起きていると思われる。今後は実験 2 をさらに発展させることで、この疑問を解決していきたい。また、実験 1 と実験 2 での結果の整合性についてもさらに考察を深めたいと考えている。

維管束植物について調べていると、化石植物の中には維管束が 1 本しかないものがあるということがわかった。維管束の構造は進化によって獲得していったものであるから、仮に維管束の数が進化の過程で増えると考えれば、維管束が増えることでその分だけ葉序の回転角のバリエーションも増えることになる。もしこれが正しいとすれ

ば、維管束の数という側面からみても、日光の効率的な傍受に最適な角度である黄金角に進化の過程で近づいていっているといえるかもしれない。

5. 今後の展望

今後も、維管束による回転角の算出を続けていきたい。また、維管束による回転角測定法は、維管束が同心円状にならんでいる双子葉類の植物ならば同様に算出できるため、ハウセンカなど維管束が観察しやすい他の植物の回転角についても調べていきたいと思う。

維管束を顕微鏡観察する方法は植物の断面の切片をできるだけ薄くスライスしなければならない。加えて隣り合う葉の回転角を求めるには、葉と葉の間の茎を等間隔に20枚以上切片を切る。そして隣り合う葉につながっている維管束が最終的にどれなのか追わなければならない。この作業は非常に時間と労力を要し、データを大量に集めるには効率が悪い。ゆえに、この実験方法の簡素化・効率化を目指したいと思っている。

またそもそも、維管束からの回転角測定には3節で述べたように、

- ①維管束は茎の付け根から茎の頂上まで必ず同じ本数になっている。
- ②1枚の葉につながる維管束の本数はどの葉でも一定で、3本である。
- ③連続する葉に対応する維管束の、3つある維管束のうち中央に位置する1本を、その葉に対応する維管束とする。
- ④1つの維管束を点とみなし、点が円周上全体に等間隔に並んでいると考える。
- ⑤連続する葉に対応する維管束（点）の

距離の比を間の維管束の個数から算出し、回転角とみなす。

の5つの仮定を満たしているという前提で議論および実験を進めている。

特に仮定①は、1本の維管束が2本に分岐したり、2本の維管束が1本に統合されたりすることもあり、すべての個体に当てはまるわけではない。ゆえに、この仮定が妥当であるか精査しなければならない。これを調べた上で、維管束の本数が何の要素によって決まるのか研究していきたい。

さらに、考察で説明した近藤滋氏の説についても引き続き研究し考察を続けたい。この仮説が正しいか証明するには、まずシュートのメリステムから発生している物質が原基の出現を促進する物質であるのか、阻害する物質であるのか、また具体的にどのような物質であるのかを解明しなくてはならない。また、実際に植物のシュートでの原基の発生の状態を疑似的に再現できれば、この学説が正しいことが証明できるだろう。

まとめると、

- 維管束による回転角の算出
- 実験方法の簡素化・効率化
- 実験の仮定の妥当性の確認
- 学説への数学的・生物学的考察

の4点が今後の主な課題である。

6. 参考文献

- [1] ImageJ - RSB Home Page
<http://imagej.nih.gov/ij/>
- [2] S.Douady, Y.Couder, Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Growth Process (1991)

- [3] 「波紋と螺旋とフィボナッチ：数理の眼鏡でみえてくる生命の形の神秘」、近藤 滋、学研メディカル秀潤社(2013)
- [4] こんどうしげるの生命科学の明日はどっちだ 第14回:全ての植物をフィボナッチの呪いから救い出す
- <http://www.fbs.osaka-u.ac.jp/labs/skondo/saibokogaku/fibonacchi.html>

7. 謝辞

これまで私を指導してくださった櫻井先生、また同じ研究班で私の研究に協力してくださった出水明日香さんに、深く感謝の意を表します。

シュートにおける葉の発生

4 年 C 組 出水明日香
指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

セイタカアワダチソウのシュートでの葉の配列を調べるため、シュート付近の顕微鏡写真を撮り、葉と葉の間の角度を測ろうと試みた。

キーワード シュート、セイタカアワダチソウ、葉序

2. 研究の背景と目的

私は本を読み、植物の葉や種子などの配列に数学的な規則性がみられることを知った。そのひとつに、黄金角があげられる。葉を黄金角に従って配列すると、葉同士が重なることはない。そこで昨年まで、「葉の並び方(葉序)は黄金角に従っている」という仮説を立て、研究を続けてきた。標本は、葉序を調べるのに計測しやすいという点から、セイタカアワダチソウを用いた。その結果、セイタカアワダチソウの葉序は黄金角ではなく、上から数えて1番目の葉と14枚目の葉が5回転すると重なる、5/13 葉序に近似していると結論付けられた。ここで私は、この葉序は葉が発生したときから変化していないのか、それとも葉が発生してから成長していくうちに、5/13 葉序へと変化していくのか疑問に思った。そこで、葉が発生するシュート付近での葉序を調べ、葉が広がっている場所の葉序である 5/13 葉序に近似しているのかを調べることにした。

3. 研究内容

3. 1 実験目的

セイタカアワダチソウのシュート付近での葉序を調べることによって、研究背景で述べたように、セイタカアワダチソウの葉序は変化しないのか、成長するに従って 5/13 葉序へと変化するのかを確認する。

3. 2 実験仮説

シュート付近の葉序は黄金角に従っている。

3. 3 実験方法

＜材料＞ セイタカアワダチソウ

＜方法＞

セイタカアワダチソウの先端にある、まだ広がっていない葉が集まっている部分(シュート)を、実体顕微鏡を使いながらピンセットで剥くことが出来るところまで剥く。剥き終わったら実体顕微鏡を通して真上から写真を撮り、角度を計測する。

3. 4 実験結果

<結果1>



図1 葉が集まっている部分の断面

図1の赤い曲線1本が1枚の葉を表している。写真の中に見られる葉脈の配列に規則性があるように見られる

<結果2>

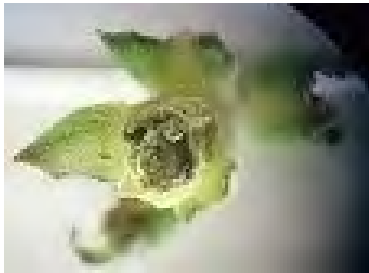


図2 シュート付近まで葉を剥いた状態

茶色く変色している。また、そのためどこまでが一つの葉なのかわからない。

<結果3>



図3 シュート付近まで葉を剥いた状態

茶色く変色している。また、実体顕微鏡では観察できないほど葉が小さい。

3. 5 実験考察

実体顕微鏡を用いての撮影であるということもあり、厳密に真上から撮ることが難しいことがわかった。また、標本のサイズが小さいため、実体顕微鏡では、詳細を観察するには限界があることがわかった。また、標本が小さいため、それぞれの葉がどの順で出現しているのかを判定することが困難だった。これらのことより、当初の予定であったシュートでの葉と葉の間の角度を測るところまで至らなかった。

4. 考察

以前、葉と葉の間の角を調べていた時と同じ方法で実験を行おうとしたが、シュートのサイズが小さいため、同じ方法で実験することはできなかった。シュート付近の葉序について調べるためには別の方法を考えなければならない。

考えられる方法としては、図1のような葉が集まっている場所の断面図から計測するという方法である。シュート付近まで葉を剥くと、観察する対象が小さくなる。また剥いているときに葉が傷ついたり変色したりすることが多かった。図1の段階では葉はまだ広がっていないため、広がりきった部分と比べることができる。

5. 今後の展望

シュート付近の葉序を調べるのが困難だった。そのため、考察で挙げた方法で研究を進めていきたいと思う。また、植物の

葉序はオーキシンと呼ばれるホルモンによって決定される、と書かれた論文を見つけ、興味を持った。そこで、何の物質によって葉序が決定されるのか、植物によってどのように物質の量などが異なっているのか、など葉と葉の間の角度を計測するだけではなく、何が原因となってその葉序が形成されていくかなど、計測以外に別の角度からも調べていきたいと思う。

6. 参考文献

- [1] 近藤滋の生命科学の明日はどっちだ!?
<http://www.fbs.osaka-u.ac.jp/labs/skondo/saibokogaku/fibonacci.html>

7. 謝辞

実験方法など相談にのってくださった山田莉彩さん、指導してくださった櫻井先生に感謝の意を表します。

ミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシについて

4年C組 高畑 菜々子
4年C組 中村 友柚
4年C組 西村 咲野
指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

ミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシ（ミドリゾウリムシから細胞内共生細菌であるクロレラを除去した個体）を培養して、増殖曲線（成長曲線）を描き、そこにクロロゴンニウムの増殖を追う形でミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシが増殖するという関係性を確かめることを目標とし、実験、培養の経過の観察、個体数の計測を重ねてきた。

キーワード ミドリゾウリムシ、シロミドリゾウリムシ、増殖曲線

2. 研究背景、目的

私たちは、細胞内共生への興味と石油を分泌するバクテリアの改良への興味をそれぞれ持っていた。ミドリゾウリムシが細胞内共生細菌としてクロレラを体内に共生させているという点、マルトース（糖）を分泌し、その糖はバイオマスエネルギーとして利用価値があるという点から、ミドリゾウリムシを共通の研究対象とした。そこで、ミドリゾウリムシの培養を始めたが、培養中にカビが生え、フラスコ内のミドリゾウリムシの全滅が何度も起こってしまった。そのためまずは、培養の安定をめざし、その指標としてのシロミドリゾウリムシ、ミドリゾウリムシの増殖曲線を描くことにした。



図1 *Paramecium.ursaria*
ミドリゾウリムシ)

3. 研究内容

3. 1 目的

ミドリゾウリムシは細胞内共生細菌であるクロレラがあるため、養分であるマルトースが供給され、エサがなくなってもある程度の期間個体数を維持できていると思われる。これに対して、シロミドリゾウリムシは細胞内共生をしているクロレラが存在しないため、餌であるクロロゴンニウムの減少に伴い最大数になった後は減少の一途を辿ると

思われる。これらの現象を確認する。

3. 2 仮説

同じ条件下で、異なるフラスコに同数のミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシを培養した場合、ミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシがフラスコ内で最大数に増えた後、ミドリゾウリムシのみが最大数のままある程度の期間保たれる。

3. 3 実験

3.3.1 実験に用いた培地（簡易クロロゴニウム培地）の作成方法

- ① 100ml のメスシリンダーに酢酸ナトリウムを 2 g（酢酸ナトリウム三水和物の場合は 3.3 g）、Yeast extract を 10 g 入れる。
- ② その上から蒸留水を加えて、全量を 100ml にする。
- ③ よく混合し、50ml チューブ 2 本に分注して冷凍保存する。

※濃縮培地をミドリゾウリムシ培地作成時には 100 倍、クロロゴニウム培地作成時には 20 倍に希釈して使用する。

3.3.2 ミドリゾウリムシ、シロミドリゾウリムシ、クロロゴニウム培地の作成方法

- ① 前述した簡易クロロゴニウム培地を解凍し、2ml ずつ 100ml フラスコ（クロロゴニウム用）、300ml フラスコ（ミドリゾウリムシ、シロミドリゾウリムシ用）に入れる。
- ② Volvic (KIRIN のミネラルウォーター) を 40ml (100ml フラスコの場合)、200ml (300ml フラスコの場合) の線まで入れる。

- ③ フラスコの口を綿栓で塞ぎ、綿栓をアルミホイルで包む。その後オートクレーブに入れ、121℃、20 分、20atm で滅菌する。

※培地は植え継ぎ前日に作製するか、まとめて作製した場合は 22℃の暗所で保管された培地（作製より二か月以内のもの）を使用する。

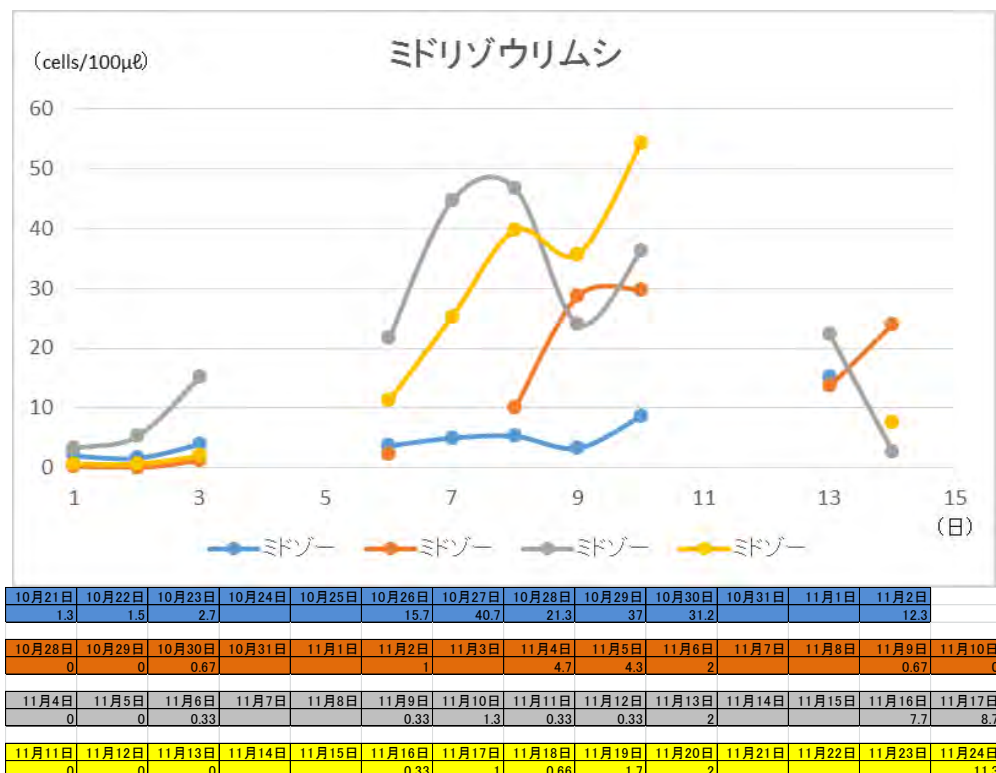
3.3.3 ミドリゾウリムシ、シロミドリゾウリムシ、クロロゴニウムの植え継ぎ方法

- ① アルコールでフラスコ等器具類の表面を消毒し、クリーンベンチ内に入れる。
 - ② クロロゴニウム、シロミドリゾウリムシ、ミドリゾウリムシの順に 3.3.1 で作製した培地に植え継ぐ。
 - ③ 植え継いだフラスコは、温度が 23℃で保たれるインキュベーターで保管する。
- ※クロロゴニウムが 4 日で最大数に達し、ミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシは 1 週間から 2 週間で最大数に達するとされたため、植え継ぎはまとめて 1 週間に 1 度行った。

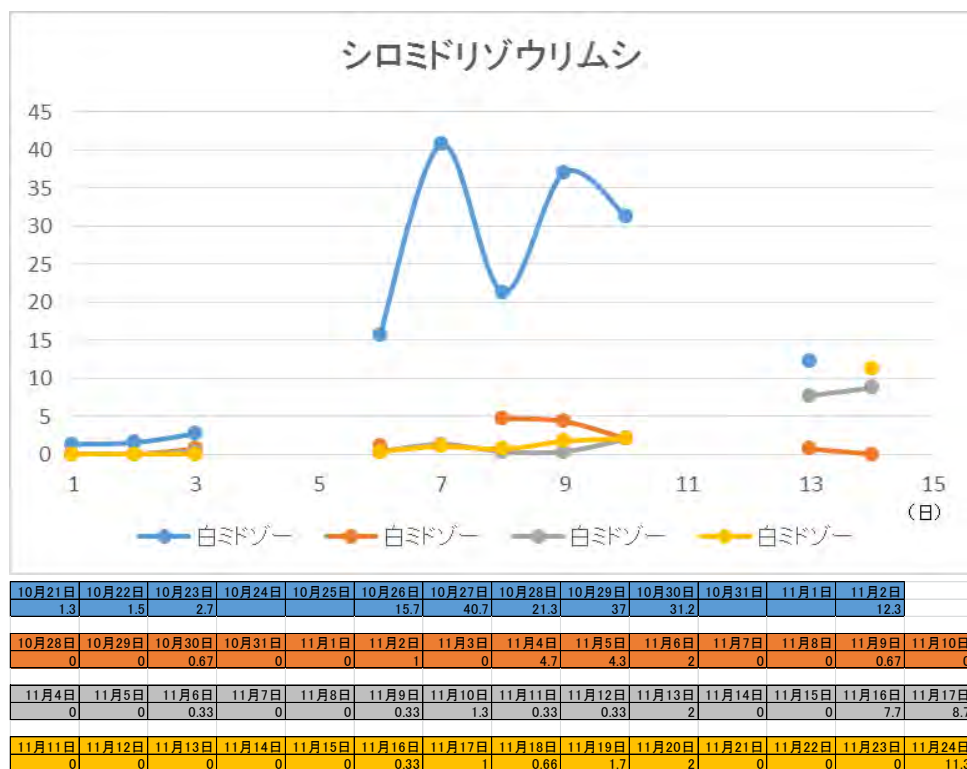
3.3.3 個体数のカウント方法

ミドリゾウリムシ、シロミドリゾウリムシ共にフラスコ内から 1ml を採集する。そこからさらに 100 μ l を採集し、シャーレ上に 10 ドロップに分ける (1 ドロップは約 10 μ l)。その後、実体顕微鏡で観察し、10 ドロップ内に確認されたミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシ、それぞれの総数をカウントする。同様の操作を 3 回行い、その総数の平均を、その日確認できたミドリゾウリムシ及びシロミドリゾウリムシの総数とした。

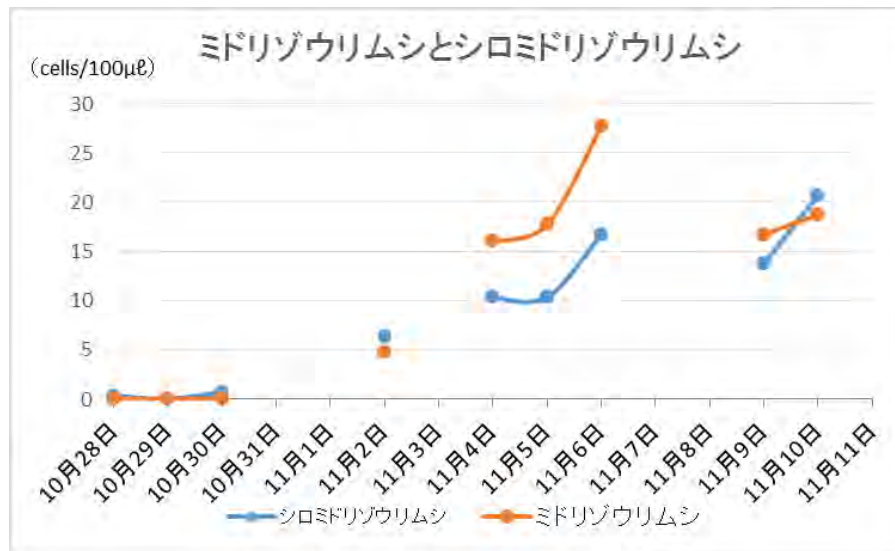
3. 4 実験結果



グラフ 1 ミドリゾウリムシの増殖曲線とデータ



グラフ 2 シロミドリゾウリムシの増殖曲線とデータ



グラフ3 ミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシ

グラフ1 とグラフ2は、1週間以上続けて200ml フラスコ(培地量は100ml)で培養したものである。

グラフ3は、ミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシを各200ml フラスコ(培地量は100ml)で、10月27日から11月10日まで培養したものであり、植え継ぎの際にはそれぞれ個体数が同じになるようにした。

4. 考察

シロミドリゾウリムシがミドリゾウリムシに比べて培養が難しいことが分かった。このことはグラフ2の個体数が増えないことから読み取れる。またグラフ3より、植え継いだ当初は、ミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシとで増殖速度の差があまり無かったが、植え継いで一週間ぐらい経つと数値の伸び方に差が現れたことからいえる。しかし、平日のみに計測を行ったためデータが欠損している。そのため曲線という形で仮説を実証できるような数値の

変動をみることはできなかった。

5. 今後の課題

<現時点での問題点>

- ①植え継ぎの際、3.3.3で出された平均値を利用し、フラスコ内の個体数が同数になるように計算した上で植え継いでいるのだが、全溶液量100ml中の100μlを採取し、その中の個体数を計測するという方法を取っているため、統計的な誤差が生じる。
- ②シロミドリゾウリムシの増殖が不安定である。
- ③土日分のデータの欠損が増殖曲線を描くうえで、大きな障害である。
- ④植え継いでから数日は、3.3.3の方法でミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシの個体数をカウントしても、個体が存在しないことが多い。

<解決策>

- ①問題点の②については、個体数を計測する際、フラスコではなく、ディプレッシ

ョンスライドガラス(容量 1 ml くぼみを 3 つ持つスライドガラス)で培養することにより全体の数を減らし、常に培地内の個体数を把握できるようにする。または、個体数の計測のために取り出す培地量を $100\mu\text{l}$ から $1000\mu\text{l}(1\text{ml})$ に変更する。

②シロミドリゾウリムシがミドリゾウリムシに比べ増殖しにくい理由ははっきりとはわかっていない。おそらくシロミドリゾウリムシの増殖を抑制する理由は、到達できる最高の細胞密度がミドリゾウリムシのものよりも低いためであるか、クロゴニウムを取り出したことによって、カビなどに対する免疫のようなものが欠如していると私たちは予想した。今後、原因を確定させていきたい。

③植え継いでから数日は、ミドリゾウリムシとシロミドリゾウリムシの培地から 1ml を採集した後、それを 10 ドロップに分け、 $100\mu\text{l}$ 中の個体数をカウントし、ある程度個体数が増えたら、3.3.3 の方法に移行していきたい。

6. 謝辞

今回の研究を行うにあたってご指導してくださった櫻井先生及び、ミドリゾウリムシ、シロミドリゾウリムシを提供していただき、ご指導くださった神戸大学の洲崎先生にこの場をかりて御礼申し上げます。

生物を使った水質浄化

5年B組 飯野 さくら

指導教員 矢野 幸洋

1. 要約

昨年度、アサリやシジミがどれくらいの水質浄化作用を持っているのかを調べ、水質浄化の度合いは、濁度や色度を測定することによって数値化できるということがわかった。今年度は、実験に用いる生物が一番力を発揮できる環境で実験を行うことによって、数値化の精度を上げることができるのではないかと考え、アサリの活動が活発になる条件をさがした。

キーワード 水質浄化、アサリ、数値化

2. 研究の背景と目的

生物が汚染された水を浄化できるということに疑問を持ち、昨年度、アサリとシジミを使った実験を行った。その実験の中で、濁度や色度、COD, pH などを用いることによって、水がどれくらい浄化されたかを目視での確認だけではなく、数値としても表せるようになった。今年度は、昨年よりも細かい条件をつけて実験を行うことで、アサリにとって一番良い実験方法を見つけ、安定した数値化ができるようになることを目標とした。

・濁度—ポリスチレン標準液による

測定範囲は 0~20 度、測定波長は 870nm

・色度—塩化白金酸コバルト標準液による

測定範囲は 0~50 度、測定波長は 390nm

3. 研究内容

◆水質浄化実験に適している溶液

＜実験 1＞

方法

海水 人工海水 100ml

とぎ汁 人工海水 100ml に米のとぎ汁 5ml

牛乳 人工海水 100ml に牛乳 5ml

の 3 種類の溶液にそれぞれ 5 匹のアサリを入れる

結果

・外観

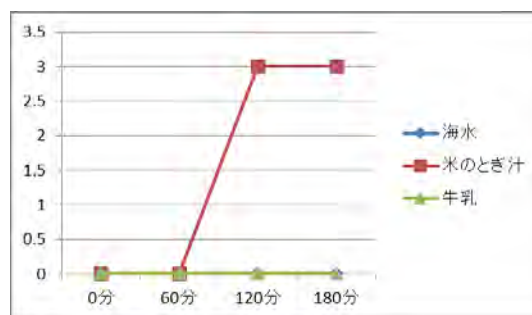
とぎ汁では濁りが見られなくなった。海水と牛乳に変化はなかった。



図 1 実験前
(左から海水、牛乳、米のとぎ汁)



図2 実験後
(左から海水、牛乳、米のとぎ汁)



グラフ2 色度の時間変化

規則性はみられなかった。

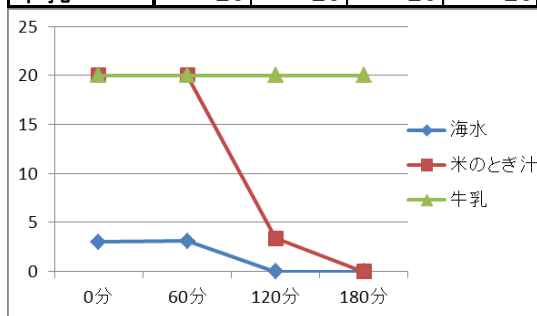
・COD

とぎ汁と牛乳で濁っているため、色の变化が識別できず、変化を観察することができなかった。

・濁度

測定できる最大値が20のため、20となっているものは、20よりも値が大きい可能性がある。

	0分	60分	120分	180分
海水	3	3.1	0	0
米のとぎ汁	20	20	3.4	0
牛乳	20	20	20	20



グラフ1 濁度の時間変化

米のとぎ汁を使ったときの濁度の下がりが顕著にでた。

・色度

	0分	60分	120分	180分
海水	0	0	0	0
米のとぎ汁	0	0	3	3
牛乳	0	0	0	0

<実験2>

方法

人工海水にデンプンを溶かした溶液Aとデンプンを溶かして熱を加えた溶液Bを30分ごとにそれぞれヨウ素液で染色する。

結果

デンプン溶液の濃度によってヨウ素液の色が変化することを期待したが、変化はなかった。

◆温度による変化

<実験3-1>

方法

100mlの人工海水に5mlの米のとぎ汁と、5匹のアサリを入れ、4℃・18℃・28℃の3つの温度に置いた3種類を用意し、実験の開始時と終了時にCODを、30分ごとに濁度と色度をそれぞれ計測する。

なお、この実験は2回実施した。

結果

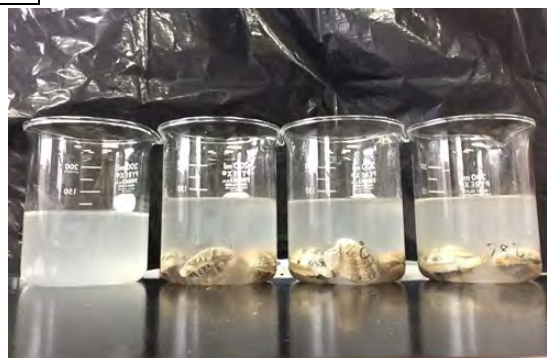


図3 実験前
(左から元の溶液、4℃、18℃、28℃)



図4 実験後
(左から元の溶液、4℃、18℃、28℃)

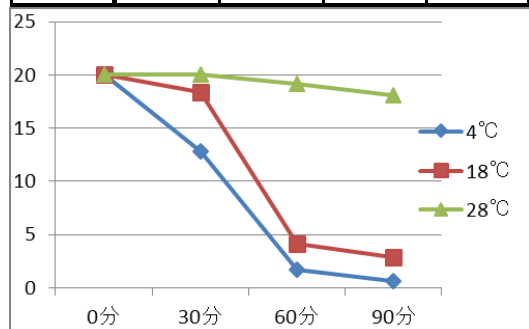
(1回目)

・COD

識別できなかった。

・濁度

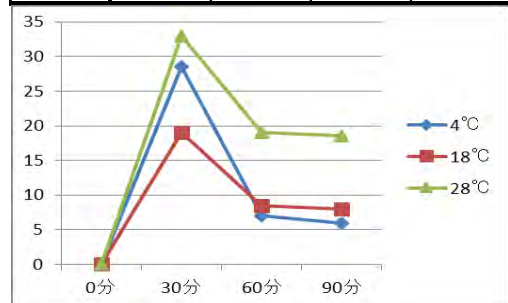
	0分	30分	60分	90分
4℃	20	12.8	1.7	0.6
18℃	20	18.4	4.1	2.9
28℃	20	20	19.2	18.1



グラフ3 濁度の時間変化

・色度

	0分	30分	60分	90分
4℃	0	28.5	7	6
18℃	0	19	8.5	8
28℃	0	33	19	18.5

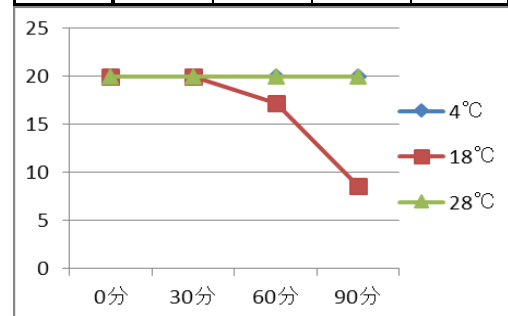


グラフ4 色度の時間変化

(2回目)

・濁度

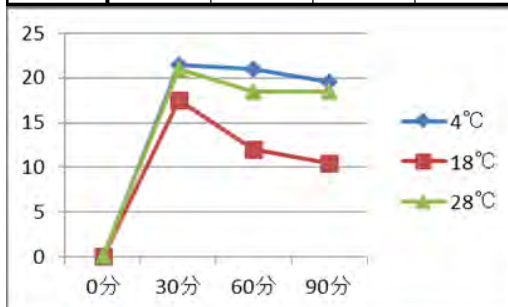
	0分	30分	60分	90分
4℃	20	20	20	20
18℃	20	20	17.2	8.6
28℃	20	20	20	20



グラフ5 濁度の時間変化

・色度

	0分	30分	60分	90分
4℃	0	21.5	21	19.5
18℃	0	17.5	12	10.5
28℃	0	21	18.5	18.5



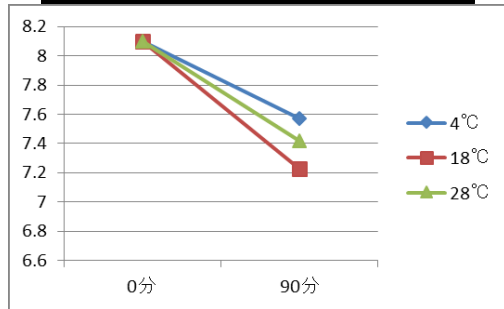
グラフ6 色度の時間変化

・ COD

識別できなかった。

・ pH

	0分	90分
4℃	8.1	7.57
18℃	8.1	7.23
28℃	8.1	7.42



グラフ 7 pH の時間変化

<実験 3 - 2 >

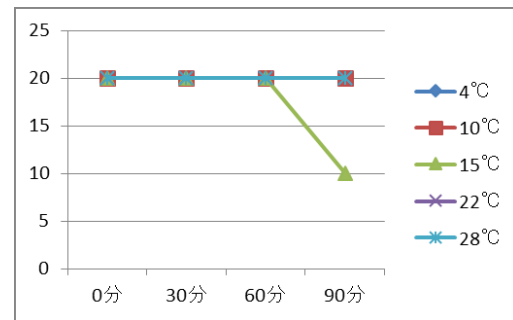
方法

実験 1 を細かい条件で行うため、100ml の人工海水に 5ml の米のとぎ汁と、5 匹のアサリを入れ、4℃・10℃・15℃・22℃・28℃の 5 つの温度に置いた 5 種類を用意し、実験の開始時と終了時に COD、30 分ごとに濁度と色度をそれぞれ計測する。

結果

・ 濁度

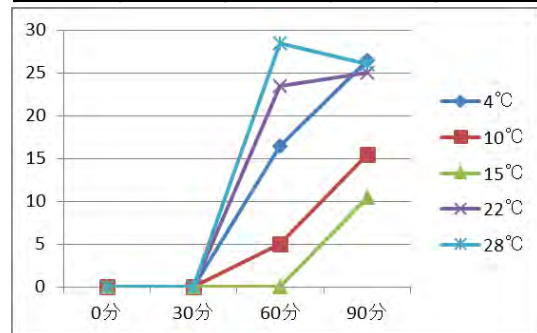
	0分	30分	60分	90分
4℃	20	20	20	20
10℃	20	20	20	20
15℃	20	20	20	10
22℃	20	20	20	20
28℃	20	20	20	20



グラフ 8 濁度の時間変化

・ 色度

	0分	30分	60分	90分
4℃	0	0	16.5	26.5
10℃	0	0	5	15.5
15℃	0	0	0	10.5
22℃	0	0	23.5	25
28℃	0	0	28.5	26



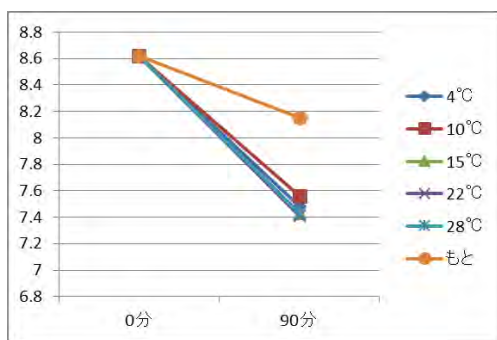
グラフ 9 色度の時間変化

・ COD

識別できなかった。

・ pH

	0分	90分
4℃	8.62	7.48
10℃	8.62	7.56
15℃	8.62	7.43
22℃	8.62	7.41
28℃	8.62	7.43
もと	8.62	8.15



グラフ 10 pH の時間変化

◆明暗とアサリの数による変化

<実験 4>

方法

100ml の人工海水に 5ml の米のとぎ汁を加え、アサリの数と保存する場所の明るさを変えた次の 6 種類を用意し、実験の開始時と終了時に COD を、30 分ごとに濁度と色度をそれぞれ計測する。

明 1：アサリを 1 匹入れ明るい場所に置く

明 4：アサリを 4 匹入れ明るい場所に置く

明 8：アサリを 8 匹入れ明るい場所に置く

暗 1：アサリを 1 匹入れ暗い場所に置く

暗 4：アサリを 4 匹入れ暗い場所に置く

暗 8：アサリを 8 匹入れ暗い場所に置く

なお、この実験は 2 回実施した。

結果



図 5 実験前
(左から元の溶液、明 1、明 4、明 8)

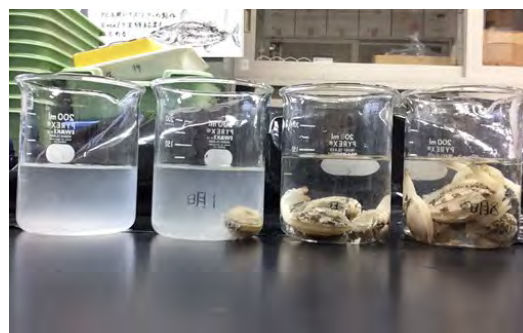


図 6 実験後
(左から元の溶液、明 1、明 4、明 8)

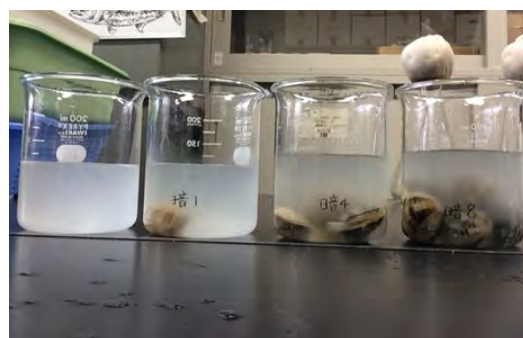


図 7 実験前
(左から元の溶液、暗 1、暗 4、暗 8)

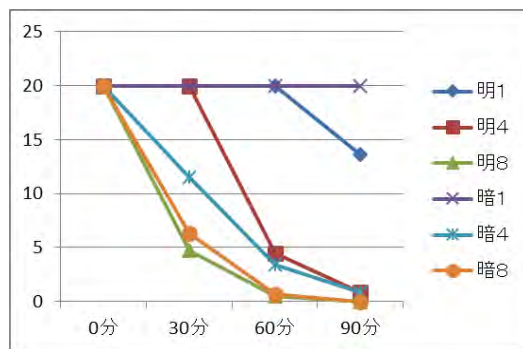


図 8 実験後
(左から元の溶液、暗 1、暗 4、暗 8)

(1 回目)

・濁度

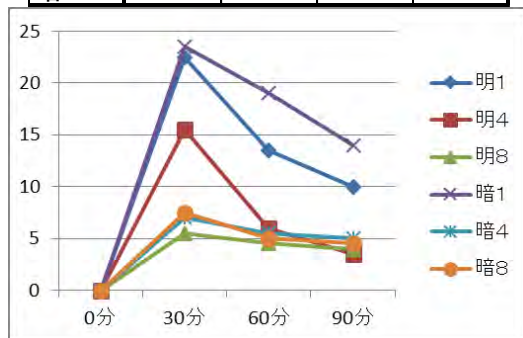
	0分	30分	60分	90分
明1	20	20	20	13.6
明4	20	20	4.5	0.9
明8	20	4.7	0.5	0
暗1	20	20	20	20
暗4	20	11.5	3.4	0.9
暗8	20	6.3	0.7	0



グラフ 11 濁度の時間変化

・色度

	0分	30分	60分	90分
明1	0	22.5	13.5	10
明4	0	15.5	6	3.5
明8	0	5.5	4.5	4
暗1	0	23.5	19	14
暗4	0	7	5.5	5
暗8	0	7.5	5	4.5



グラフ 12 色度の時間変化

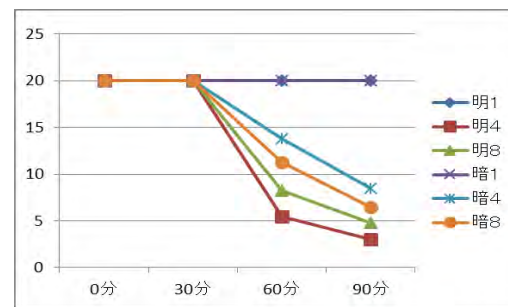
・COD

識別できなかった。

(2回目)

・濁度

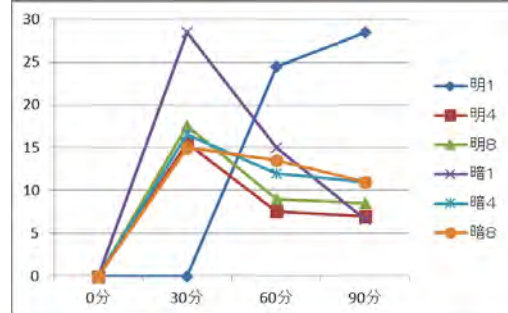
	0分	30分	60分	90分
明1	20	20	20	20
明4	20	20	5.5	3
明8	20	20	8.2	4.8
暗1	20	20	20	20
暗4	20	20	13.8	8.5
暗8	20	20	11.3	6.5



グラフ 13 濁度の時間変化

・色度

	0分	30分	60分	90分
明1	0	0	24.5	28.5
明4	0	15.5	7.5	7
明8	0	17.5	9	8.5
暗1	0	28.5	15	6.6
暗4	0	16.5	12	11
暗8	0	15	13.5	11



グラフ 14 色度の時間変化

・COD

識別できなかった。

4. 考察

色度は一度上昇してから減少する傾向が見られた。人工海水の色度が 0 のため、アサリが何らかの影響を与えていると考えられるが、原因はわからなかった。

◆何を使って溶液を汚すか

- ・濁度の減少が著しいため、米のとぎ汁が適している。
- ・牛乳は色が濃く、少量で濁ってしまうため、この実験には適していない。

◆温度による変化

- ・4℃は、実験 1 では最も濁度が減少してい

るが、ほかの実験ではほとんど変化がないため、誤差だと考えられる。

- ・15℃から18℃の比較的低温が適している。
- ・米のとぎ汁はアルカリ性であり、アサリによって浄化さえることで、中性に近づいている。また、アサリを入れていなかったものも多少中性に近づいているが、これは、空気中の二酸化炭素の影響だと考えられる。

◆明暗とアサリの数による変化

- ・アサリの数が多いほど浄化は速く行われ、個体差も出にくい。ただ、個体数が多いため、フンも多く排出されることと、8匹の場合変化がはやすぎるため、実験には4匹が適している。
- ・明暗による差はみられなかったため、影響はないと考えられる。

5. 今後の課題

生物を用いた実験のため、個体差が出やすく、もっと実験の回数を重ねて正確なデータをとる必要がある。また、色度が一度上昇してから減少する原因を調べる。

6. 謝辞

今回の研究をするにあたり、指導してくださいました矢野先生に、深く感謝いたします。

抹茶の科学

～水の硬度が抹茶の泡立ちを変える～

5年B組 松井絵莉子

指導教員 櫻井 昭

1. 要約

茶の湯を完成させた千利休の言葉とされる茶訓に「茶は服のよきように点て」がある。お客様が飲みやすいお茶を点てなさい、ということである。

飲みやすいお茶、つまりおいしい抹茶とはどのような抹茶なのか。

抹茶は茶筌で点てるので、おいしい抹茶とは泡立ちのよい抹茶なのではないかと仮説を立てた。そこで、味覚と泡立ちの関係、泡立ちと水の硬度の関係を分析した。その結果、泡立ちがよいとおいしいと感じる人が多く、泡立ちがよい水には最適な硬度があることがわかった。また、水の硬度の算出に用いるイオンである Ca^{2+} と Mg^{2+} の濃度を変えた水を用いて、泡立ちを調べることにより、抹茶の泡立ちは、水の硬度に依存していることを裏付けることができた。さらに、抹茶を泡立たせる茶葉成分の抽出量が、水の硬度により異なることを突き止めた。

キーワード 抹茶、泡、水の硬度、マグネシウム、カルシウム、茶葉サポニン

2. 研究の背景と目的

私は茶道同好会に所属し活動している。お客様に最高のおもてなしをするために、おいしい抹茶を点てるにはどうすればよいかを科学的に検証した。

一般的に抹茶（薄茶）を点てるのには硬度の低い軟水が適しているとされ、沸騰させた後、70－85度に冷ましてから使用するのがよいといわれている（[1]参考）。

WHO 飲料水水質ガイドラインで硬度は以下のように分類されている。

- ・軟水は硬度 0－60 未満
- ・中程度の軟水は硬度 60－120 未満
- ・硬水は硬度 120－180 未満
- ・非常な硬水は硬度 180 以上

※水の硬度は一般的に以下の方法で算出されている

$$\text{硬度(mg/L)} = \text{Ca 量(mg/L)} \times 2.5 + \text{Mg 量(mg/L)} \times 4.1$$

どの程度の硬度の水が抹茶を点てるのに適しているのか、水の硬度に注目して、実験した。

3. 実験内容

3. 1 味覚実験

3.1.1 実験仮説

日本の水のほとんどが軟水で、ヨーロッパや北米には硬水が多く存在する。日本は国土が狭く地層に浸透する時間が短く、ヨ

ヨーロッパや北米の大陸では地層に接する時間が長いことが、軟水と硬水を生み出す原因のひとつとされている。また、主に旨みを味わう日本茶には軟水が、主に香りを楽しむ中国茶や紅茶には硬水が最適だとされている ([2]参考)。

抹茶の場合も日本茶と同じように軟水が適しているのではないかと予想し、実験を開始した。

3.1.2 実験方法

硬度の異なる水で実際に抹茶を点て、硬度による味の違いを、人の味覚を用い調べた。硬度の異なる水として、硬度 30 (市販の水)、奈良県の水道水(硬度 40 度台)、硬度 97 (市販の水)、温泉水(硬度 約 150)、硬度 304 (市販の水)、硬度 1468 (市販の水) の 6 種類の水で比較した。手順は下記のように行なった。

- ①抹茶茶碗に抹茶の粉を二杓入れる。実験には、苦味が少なく、色鮮やかとされる抹茶を使用する。
- ②①にお湯(ポットで一度沸騰させ、80 度 に設定)を柄杓の半量入れる。
- ③それぞれ、20 秒間、茶筌 (百本立) で抹茶を点てる。
- ④味見協力者 (12 歳～78 歳) に味を比較してもらう。口の中を同じ条件にし、また抹茶の味を引き立たせるため、抹茶を飲む前に同じ落雁を一人一つずつ食べてもらう。また、味見協力者には水の種類は伝えずに行った。

3.1.3 実験結果

3.1.3-1 水道水 (硬度 40 度台)、硬度 30、硬度 1468 の比較

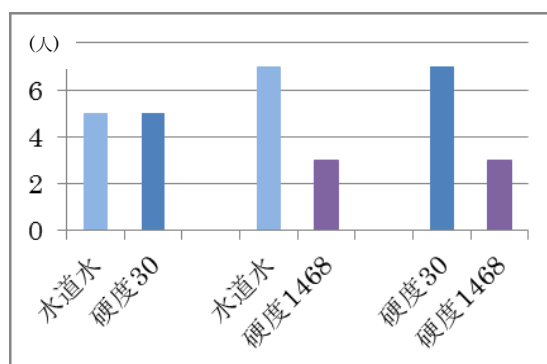
水道水と硬度 30 の味見実験では、味にあまり差がないと答えた人が 6 割でどちらがおいしいかの意見もわかれた (グラフ 1)。また、抹茶の泡立ちや泡の細かさに差はなかった (写真 1)。

水道水と硬度 1468、硬度 30 と硬度 1468 との比較では 8 割～9 割の人が硬度 1468 の方が苦いと答えた。硬度 1468 のほうがおいしいと答えた人は、普段から苦味を好む人であった (グラフ 1)。硬度 1468 で点てた抹茶は、水道水や硬度 30 で点てた抹茶より泡立ちにくく、泡の大きさが不均一であった (写真 1)。

硬度約 40 (水道水) 硬度 30 (市販の水) 硬度 1468 (市販の水)



写真 1



グラフ 1

水道水、硬度 30、硬度 1468 の比較
どちらがおいしいと感じたか

3.1.33-2 硬度 30 と温泉水 (硬度 約 150) の比較

温泉地で見つけた飲泉用の温泉水で抹茶

を点てるとどうなるのか、試してみた。
3.1.3-1 で水道水と硬度 30 には、泡立ちと味に差がないことがわかったため、硬度が安定している硬度 30 の市販の水と比べることにした。温泉水が塩っぱいのでおいしいと感じると答えた人は 10 人中 6 人で、4 人は温泉の独特の匂い、味でおいしくないという意見が出た（グラフ 2）。温泉水は硬度 30 より泡立ちやすく、泡がさらにきめ細かくなった（写真 2）。

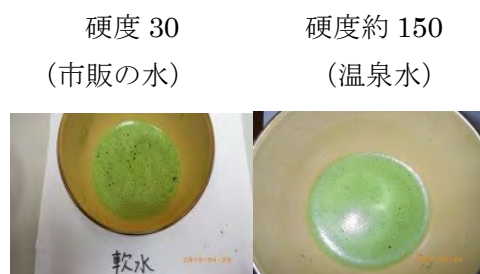
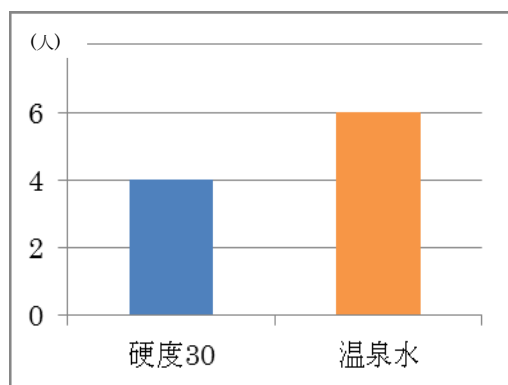


写真 2



グラフ 2 硬度 30 と温泉水の比較
 どちらがおいしいと感じたか

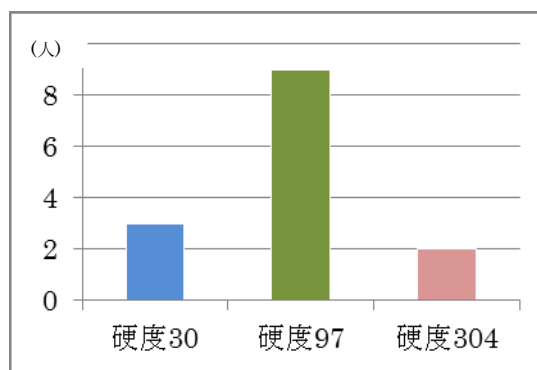
3.1.33-3 硬度 30 と硬度 97、硬度 304 の比較

硬度 30、97、304 の味見実験では、硬度 97 が 1 番おいしいと答えた人が 14 人中 9 人であった（グラフ 3）。その理由に柔らかい茶の味がした、まろやかな味がした、な

どが挙げられた。また、硬度 304 で点てた抹茶は後味が気になったという意見が多かった。硬度 97 は最も泡立ちやすく、また最も泡がきめ細かくなった（写真 3）。



写真 3



グラフ 3

硬度 30、硬度 97、硬度 304 の比較
 どれが最もおいしいと感じたか

3.1.4 実験考察

水道水と硬度 30 でそれぞれ点てた抹茶に差がなかった理由は、奈良県の水道水の硬度は平均 40 台であるため、硬度 30 と硬度が同程度であるからだと考えられた。

温泉水の泡立ちがよかった理由を、硬度によるものではないかと考え、温泉水の硬度を求めることにした。

温泉水の硬度を計算式により計算してみると約 150 で、硬度 30 と 1468 の中間の硬度であることより、硬度が高いほど泡立ちが悪くなるわけではないことがわかった。

温泉の独特の匂いや味のない、硬度 30 から 1468 の間の硬度の水であれば、泡立ちのよいおいしい抹茶を点てることのできるのではないかと考えた。そこで 3.1.3-3 の実験を行った。その結果、硬度 97 が一番おいしいと答えた人が多かった。また、硬度 97 のとき一番泡立ちがよく、泡がきめ細かくなったため、抹茶の泡立ちがよければおいしいと感じる人が多いと推測した。

3. 2 水の硬度と泡の容積

3.2.1 実験仮説

抹茶の泡立ちがおいしさに関連すると考えられるため、硬度の異なる水（硬度 30～1468）で抹茶を点て、抹茶の泡立ち方に違いが生じるか調べることにした。最もおいしいと答えた人が多かった硬度 97 付近の水で点てた抹茶が最も泡立ちがよいと予想した。

3.2.2 実験方法

- ①抹茶 0.5g にポットで沸騰させ、80 度設定した水 50ml を入れてそれぞれ、20 秒間、茶筌（百本立）で抹茶を泡立てメスシリンダーに全量流し入れる。
- ②直後に全体の容積に対する泡の容積の割合を比較する。
- ③泡の容積が時間経過によって減少するかどうか、時間の経過とともに泡の容積と全体の容積の割合を記録する。

3.2.3 実験結果

3.2.3-1 硬度 30、97、304、1468 比較

抹茶を点てたときの印象どおり、硬度 97 のとき一番泡立ちがよく、生成された泡の容積が最も大きくなった。次に泡の容積が

大きかったのは、硬度 304、硬度 30 の順だった。硬度 1468 では泡立ちが 1 番悪く、生成された泡の容積も 1 番小さくなった（写真 4）。

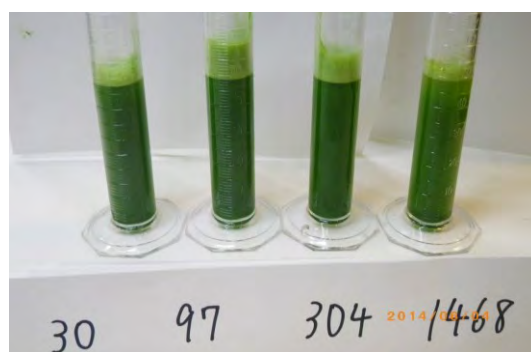
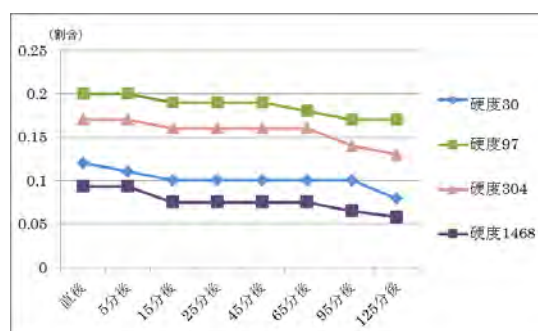


写真 4 メスシリンダーに流し入れた
泡立て直後の抹茶

時間が経っても 4 種類とも泡の容積は比較的保たれていた（グラフ 4）。

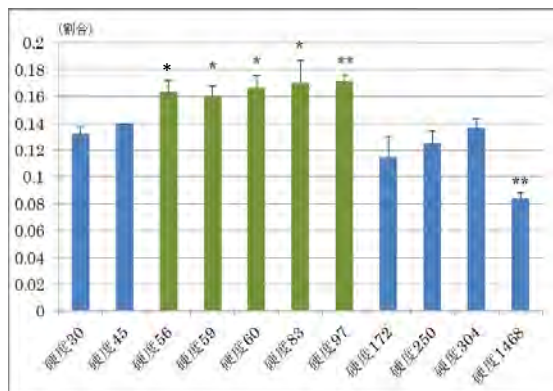


グラフ 4 経時的変化

3.2.3-2 硬度 30～1468 比較

抹茶の泡立ちに最適な硬度を見つけるために、ほかの硬度の水でも抹茶を点てて全体の容積に対する泡の容積の割合を比較することにした。（グラフ 5）。その結果、硬度 56～97 で点てた抹茶がよく泡立ったため、中程度の軟水が最適であることがわかった。

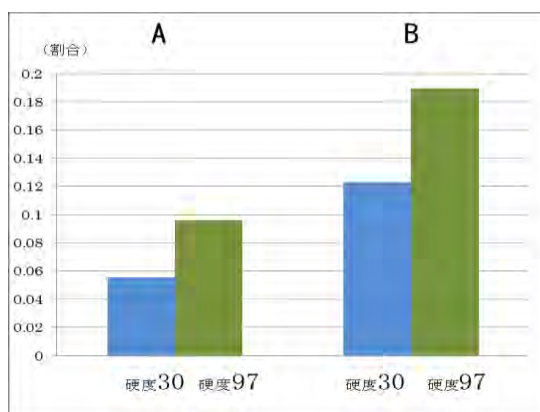
*:ttest(vs 30)p<0.05 **:ttest(vs 30)p<0.01



グラフ5 水の硬度による泡立ちの違い

3.2.3-3 確認実験

水の硬度を知らせずに抹茶を点てても同じ結果になるのか確かめるために、茶道経験者 A (76 歳女性)、B (51 歳女性) に実験協力をお願いした。硬度 30 と硬度 97 の 2 種類の水で 3.2.2 と同様に抹茶を点てて全体の容積に対する泡の容積の割合を比較した。3.2.3-1, 3.2.3-2 の結果と同じく、実験協力者 A、B とともに硬度 30 より硬度 97 の方がより泡立った。



グラフ6 水の硬度による泡立ちの違い

3.2.4 実験考察

他の硬度の水に比べて、硬度 56～97 で点

てた抹茶の泡立ちがよかったことから、水の硬度が泡立ちに関連していることがわかった。水の硬度を決定する Ca^{2+} と Mg^{2+} が抹茶の泡立ちに関与していると考えられた。

3.3 イオンと泡の容積

3.3.1 実験仮説

水の硬度が泡立ちの差異の原因なのか、水の硬度の算出に用いる、 Ca^{2+} と Mg^{2+} の抹茶の泡立ちへの影響を調べることにした。抹茶の泡立ちが最もよくなる Ca^{2+} 濃度と Mg^{2+} 濃度が存在すると予想した。

3.3.2 実験方法

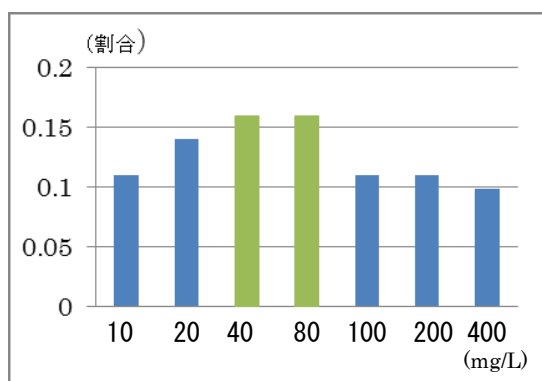
- ①純水に CaCl_2 を加え、濃度の異なる水溶液をつくる。(Ca10mg/L・20mg/L・40mg/L・80 mg/L・100mg/L・200mg/L・400mg/L)
- ②純水に MgCl_2 を加え、濃度の異なる水溶液をつくる。(Mg2.5mg/L・5mg/L・10mg/L・20 mg/L・40mg/L・80mg/L)
- ①②ともに市販の水の Ca^{2+} 濃度、 Mg^{2+} 濃度を参考に設定した。
- ③それぞれ濃度の異なる水溶液で 3.2.2 と同条件で抹茶を点てて、メスシリンダーに全量流し入れ、直後に全体の容積に対する泡の容積の割合を比較する。

3.3.3 実験結果

Ca^{2+} 濃度によって、抹茶の泡立ちは変化した。1 番泡立ちがよかったのは、40-80mg/L であった (グラフ 7)。硬度計算すると、

$$40(\text{mg/L}) \times 2.5 + 0(\text{mg/L}) \times 4.1 = 100$$

$$80(\text{mg/L}) \times 2.5 + 0(\text{mg/L}) \times 4.1 = 200$$
 で前者の方は、3.2.3.2 の最適硬度とほぼ一致した。

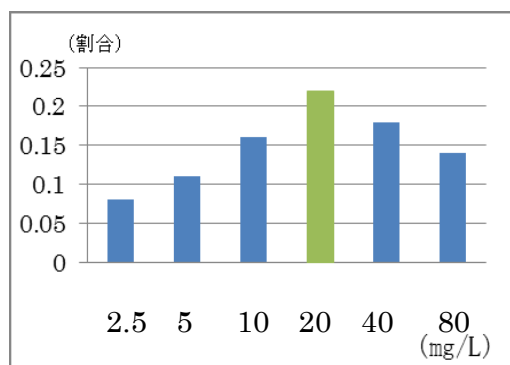


グラフ7 Ca²⁺濃度と泡の容積

Mg²⁺濃度によって、抹茶の泡立ちは変化し、一番泡立ちがよかったのは、20mg/Lであった（グラフ8）。硬度計算すると

$$0(\text{mg/L}) \times 2.5 + 20(\text{mg/L}) \times 4.1 = 82$$

で、3.2.3.2の最適硬度と一致した。

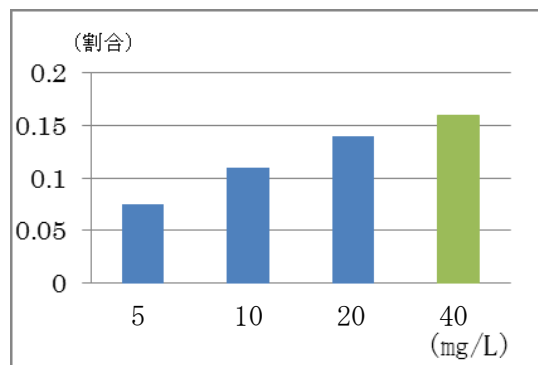


グラフ8 Mg²⁺濃度と泡の容積

抹茶の泡立ちにはCa²⁺とMg²⁺が適量必要であり、過剰だと阻害することがわかった。水の硬度が抹茶の泡立ちに影響を与えていることが裏付けられた。

また、温泉水（ナトリウム塩化物泉）が硬度が約150と高めであるにもかかわらず、泡立ちがよかった理由にNa⁺が関係していると予想した。そこで、Na⁺の量を変えて純水に加え作成した水溶液で抹茶を点てて同様に比較した。その結果、Na⁺も抹茶の

泡立ちに影響するイオンであることがわかった（グラフ9）。



グラフ9 Na⁺濃度と泡の容積

3. 4 水の硬度と茶葉サポニン溶出量

3.4.1 実験仮説

抹茶の茶葉中に含まれる成分には以下のものがある。

テアニン アミノ酸のうち、茶葉中のみに含まれるテアニンの味はよく上品な旨みと表現される

タンニン カテキン類で、渋み・苦味の要素とされている

※抹茶の茶葉はある一定期間黒い覆いをかけて育てられ、渋みの成分(タンニン)が少なく、旨み成分(テアニン)の多い、抹茶に適した高級茶葉になる（覆下栽培）（写真5）。



写真5 覆下栽培

カフェイン すっきりした苦味で茶を飲んだあとの爽快感 を与えてくれる
サポニン 水に混ぜると溶解し、ふり混ぜると石鹸のように泡が立つなどの界面活性作用がある

水の硬度が抹茶の泡立ちに影響を与える理由に、抹茶の泡立ちに関係する茶葉中のサポニンが関係している可能性があると考えた。泡立ちが最もよかった硬度 97 において茶葉サポニンが最も多く溶出されると予想して、水の硬度によって茶葉サポニンの溶出量に差があるのかを調べることにした。

3.4.2 実験方法

- ①硬度の異なる 3 種類の水（硬度 30、硬度 97、硬度 1468）を用い、実験 3-2-2 と同条件で抹茶を点てる。
- ②抹茶液 2ml（硬度 30、硬度 97、硬度 1468 で点てた 3 種類の抹茶液それぞれ液相部分から採取）を固相抽出カラム (Sep-Pak Plus C18 カートリッジ: Waters) に注入する。
- ③蒸留水 8ml を流して水溶性ペクチン画分を除去する。
- ④20%メタノール水溶液 15ml をカラムに通してカテキン類を除去する。
- ⑤80%メタノール水溶液 5ml を通して茶葉サポニン画分を回収する。
- ⑥茶葉サポニン画分をエバポレーターにて濃縮乾固後、蒸留水 4ml に溶解する。
- ⑦試料液 1ml に 5%フェノール水溶液 1ml + 濃硫酸 5ml を加え、80℃で 30 分間処理する。
- ⑧室温に戻した反応液の吸光度（490 nm）を測定することで茶葉サポニン含量を比

較する（[3]参考）。

3.4.3 実験結果

抹茶の泡立ちが最もよい硬度 97 の液相中では、茶葉サポニンが最も多く溶出された（表 1）。次に硬度 30、硬度 1468 の順であった。茶葉サポニンの溶出には、水の硬度に関係するイオンが、影響を与えることがわかった。

表 1 吸光度（490nm）の測定結果

	1 回目	2 回目	3 回目
硬度 30	0.213	0.257	0.261
硬度 97	0.269	0.263	0.308
硬度 1468	0.207	0.236	0.238

4. 考察

今回の実験により、抹茶に使用する水の硬度は、抹茶の味に影響を与えることがわかった。その理由のひとつに水の硬度によって抹茶を点てたときの泡立ちに差があることがあげられる。抹茶の泡立ちには、Mg と Ca が適量必要であり、過剰だと阻害することがわかった。

一般的に抹茶の泡立ちに欠かせないものは 3 つある。まず、1 つめは、抹茶茶碗と茶筌である。抹茶を点てる際、茶碗からの適度の反発力を受け、竹製の茶筌が変形しながら泡立ちに有効的に働く。茶碗内面にある凹凸により茶筌の先がはね、この振動が味を損ねずに抹茶を攪拌・溶解する（[4]参考）。私は、実際に抹茶茶碗ではない内面が平滑なガラス容器で抹茶を点ててみたが、ほとんど泡立たなかった（写真 6）。



写真6 ガラス容器で点てた抹茶

※今回のすべての実験は、毎回、同条件にするため同じ抹茶茶碗と茶筌を用いて実験した。

2 つめは、石臼で挽いたきめ細かい抹茶である。てん茶（抹茶に挽く前の原茶）を石臼で 10 数 μm 前後の粒子に挽く。微細に挽くことによって粒子数が増加して泡立ちやすくなる ([5]参考)。私は、実際にすり鉢・すり棒で粗挽きしたてん茶を点ててみたことがあるがまったく泡立たなかった (写真7)。



写真7 泡立たない粗挽きてん茶

※今回のすべての実験は、毎回、同条件にするため同じ抹茶を用いて実験した。

3 つめは、茶葉中のサポニンである。今回の実験より、水の硬度に関連するイオンが適量あると茶葉サポニン溶出を促進し、過剰であると溶出を抑制することがわかった。

水の硬度が抹茶の泡立ちを変える理由は、水の硬度に関連するイオンが抹茶茶葉中のサポニン溶出に影響を与えているためだと考えられる。

また、Na については大豆サポニンが NaCl の添加によって、界面張力を低下させるという報告がある ([6]参考)。同様に茶葉中のサポニンが NaCl の添加によって抹茶の界面張力を低下させ、液体の中に空気を抱え込むことになり、泡立ちをよくした可能性も考えられる。

先行研究では、水の硬度が低ければ低いほど抹茶の泡立ちがよいという報告 ([7], [8]参考) があるのに対して、実際に抹茶を点てた本研究では、抹茶の泡立ちには最適な水の硬度があることを発見した。

5. 結論

中程度の軟水で点てた抹茶は、抹茶の泡立ちに関係する茶葉サポニンが多く溶出されるため、泡立ちがよい。よって、おいしい抹茶を点てるには、中程度の軟水を選択すればよい。

6. 歴史：茶の湯と名水

古くから茶の湯に利用されてきた名水で抹茶を点ててみた。

①離宮の水（大阪府島本町）

②御井の清水（兵庫県淡路島）

どちらも泡立ちがよく、泡がきめ細かくなった。メスシリンダーに流し入れたとこ

ろ、どちらも硬度 30 より 1.15 倍泡立ちがよかった。水の硬度を調べてみたところ、①は硬度約 87、②は硬度約 97 であった。

茶人が好んで使用してきた水は、今回の実験結果と一致する中程度の軟水であり、抹茶に適していると科学的に実証できたと思う。

7. 今後の課題と展望

茶筌を使うことにより、茶葉の中にある味に芳しくない不可溶性の物質、タンニンなどは、液から逃れようとして液体の表面に移動する。そのとき、泡は水の表面そのものであるから、きめ細かい泡が多いと抹茶の味を阻害する成分の逃げ場所が増え、抹茶の味がよくなるとされる ([4]参考)。今後は、このタンニンをはじめ、テアニン、カフェインなどの茶葉中の味に影響を与える成分と水の硬度との関係について検証してみたいと思う。

抹茶に適した水の硬度があることと同様に他の飲みものや食べものにも適切な水の硬度が存在すると考えられる。例えば、コーヒーの香り成分や出汁の旨み成分の抽出など、世の中の飲食物を調理する際に使用する水の硬度を変えることでよりおいしくなれば、豊かな食生活を人々に提供することができると思う。

8. 参考文献

- [1] 小山園 抹茶の点て方
<http://www.marukyu-koyamaen.co.jp/>
- [2] エビアン ミネラル量と水の硬度
<http://www.evian.co.jp/water/type/04>
- [3] 「緑茶浸出液中の茶葉サポニンと水溶性ペクチンの分析」、島田和子、日本家政学会誌(2003)
- [4] 「茶の湯の科学入門」、堀内國彦、淡交社(2010)
- [5] 「粒度の異なる抹茶の起泡性と泡沫径」、沢村信一 他(2012)
- [6] 「大豆サポニンの界面活性」、合谷祥一、山野善正(1991)
- [7] 「抹茶の起泡性に及ぼす NaCl, CaCl₂, MgCl₂, 脂質の影響」、前田昭子、日比善子、早川史子(1998)
- [8] 「水の硬度が抹茶の起泡性に及ぼす影響」、池田博子(2006)

9. 謝辞

茶道同好会部員をはじめとする味覚実験に協力していただいた方々、そしてこの研究、論文作成につき指導していただいた櫻井昭先生にこの場をかりて御礼申し上げます。

活 動 報 告

ISSS (TJ-SSFタイ政府主催科学フェア) 参加報告

2015年度は国際交流事業ISSSとして、タイで開催されたサイエンスフェアであるTJ-SSF (Thailand-Japan Student Science Fair 2015 “Seeding Innovations through Fostering Thailand-Japan Youth Friendship”) にサイエンス研究会4, 5年生5名が参加しました。化学班がサイエンス研究会を代表して、ポスター発表「Dye-sensitized solar battery experiment」を行いました。

期間 2015年12月20日(日)～24日(金)

会場 Princess Chulabhorn Science High School Phetchaburi (以下、PCSHS-P)

参加校 日本25校、タイ41校

参加者 5年A組 稲石 大義、西本 有里、4年B組 山田 莉彩、
4年C組 出水 明日香、中谷 駿介

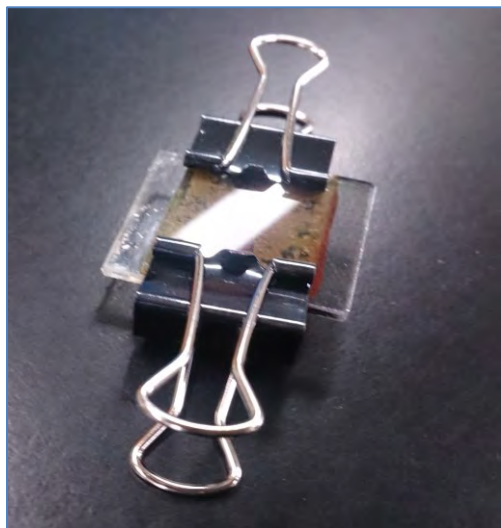
日程 (タイでの活動)

月日	訪問先等(発着)	時刻	実施内容	宿泊地
12/21 (月)	関西国際空港発 バンコク国際空港着 PCSHS-P	深夜 早朝 午後	TG673バンコク行き バンコク到着 PCSHS-P到着 文化交流	生徒 寄宿舎 教員 ホテル
12/22 (火)	PCSHS-P	午前 午後	オープニングセレモニー 講演会 ポスタープレゼンテーション	同上
12/23 (水)	PCSHS-P	全日 夜	口頭発表会 (グループ別) ポスタープレゼンテーション 天体観測	同上
12/24 (木)	環境研究所 PCSHS-P	午前 午後	フィールドトリップ まとめ・発表	同上
12/25 (金)	PCSHS-P バンコク国際空港発 関西空港着	3:40発 11:00発 18:10着	先方手配送迎車にて移動 TG672関西空港行き直行便 帰国	

このサイエンスフェアで化学班がポスター発表を行った

「Dye-sensitized solar battery experiment」の概要が次ページにあります。英語でのプレゼンテーションを堂々と行い、タイの生徒とも積極的に交流しました。





NISHIMOTO Yuri

INAISHI Tomoki

Instructor MUSO Tomoko

Instructor KOSHINO Shozo

Nara Women's University Secondary School,
Nara, 630-8305, Japan

Abstract

The organic dye-sensitized batteries were studied. These batteries make voltage by titanium oxide's ability to absorb ultraviolet rays which excites electrons to create charges. It is said that it becomes possible to generate power by not only ultraviolet rays but also by light whose wavelength is longer than ultraviolet by mixing organic dye with titanium oxide. By changing how to make the titanium oxide paste and using these properties, we expected to generate more voltage. When we made the sample, we added only Polyethylene glycol into the titanium oxide paste and then heated the mixture, which changed the thickness. To study the relationship between the thickness and electromotive force, we heated them. However, the surface of the paste of the sample which contained only Polyethylene glycol cracked and peeled off from the glass substrate when it absorbed the dye, so it did not work as expected. Then, we had doubts about the methodology of adding only Poly-ethylene glycol to the paste and continued our research by studying other methods of making the paste. So, we decided that instead of focusing on the old way of making the paste by using Polyethylene, we decided to use acetic acid.

Keywords: dye-sensitized solar battery, titanium oxide, acetic acid

Dye-sensitized solar battery experiment

Introduction

Since the Great East Japan earthquake occurred, nuclear power plants in Japan have been stopped due to safety concerns, causing shortages of power in many regions. These days we have to secure energy sources, and we realized that solar power may be a solution.

Solar batteries can generate semi-permanent power in any location if there are the facilities which are required. Solar power is different from thermal power or nuclear power generation, and it is good for the environment because it does not produce any toxic gases or liquids. On the other hand, current solar batteries are said to be dangerous if the building in which it is located does not meet the earthquake resistance standards, so many wooden buildings are not suitable sites. Furthermore, the color is dark, so places in which these can be located is limited. So we thought that if we could produce a small, light, clear battery we could position them in different places such as on windows or walls and produce more electricity.

One type of solar battery, that we studied, that can achieve this purpose are dye-sensitized solar batteries. Dye-sensitized solar batteries don't require expensive materials, can be made at low cost, and plastic can be used as a base, so we can make them lighter and smaller. With these advantages we can also place them where we can't place them now. In addition, we can make semi-transparent or change its color, through altering the pigments, some groups are investigating alternative designs. For example, with a clear solar battery, they can be placed on widows, without impacting the view.

Last year we studied about the relationship between a paste's thickness and the electricity which is generated. This year we changed the materials of the paste, and determined that the best condition is that of using fine crystals of TiO_2 which become a porous structure and the surface area becomes larger which can absorb the pigment better. This time we mixed Polyethylene glycol which is a type of polymeric material into the TiO_2 paste.

How to Produce Electricity

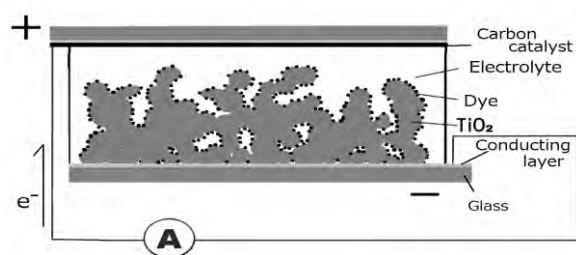


Figure 1

As shown in Figure 1, dye-sensitized solar batteries are constructed by using a transparent electrode organic pigment which absorbs visible rays. The TiO_2 's porous structure which connects the organic pigment electrolyte solution contains I^- and the opposite cathode which is covered by a black lead. This dye sensitive solar battery principle of power generating occurs like this:

1. The organic pigment absorbs visible rays causing the electronics which is in the pigment to excite and go into the TiO_2 coating.
2. The electrons on the transparent electrode move to the opposite cathode through the outside circuit.
3. I^{3-} which is the electrode solution gets additional electrons which have reached to the opposite cathode and change into I^- .
4. On the other hand, the organic pigment which lost electrons becomes oxidized and gets electrons from I^- which are in the electrolyte solution and regenerates.

When these reactions are constant, direct current is produced. Because of these processes, dye-sensitized solar batteries produce electricity from light.

Materials and Methods

The first step is to establish the best way to produce TiO_2 crystals. The other factors, such as the color of paste, should be considered after that.

The objective of the following three experiments is to find the best TiO_2 crystal construction.

Overview

Experiment I

In the experiment I, the focus is to be put on the

the thickness of TiO_2 paste coating the transparent electrode.

We tested the pastes of three different thickness with the three different heating powers.

We also used two different temperatures approx. 80°C and 120°C when baking the paste. However we couldn't collect reliable data. That's because we couldn't make exact measurement of the heating power.

Experiment II

In the experiment II, the focus is put on to establish how the differences in thickness of the paste and heating power used in making the paste affect the amount of generated power. We measured how much power is generated from the six different batteries A to E with six different pastes in thickness and heating power. Cracks on the surface of the paste is to be examined.

Experiment III

After Experiment II, we realized the need of an additional experiment, which is Experiment III. That is because the result of Experiment II is totally different from our expectations. In Experiment III, we tested three different substances to be put in the paste. We measured the three different batteries and measured how much power is generated.

Experiment I

Objective

To find the best thickness of the paste under some different conditions

Hypothesis

The thinner paste has the less number of cracks.

Materials

The powder of TiO_2 (8g), PEG(4g), Pure water(16g), Detergent (including 42% surface active agent), Ethanol

Preparation

(1) Produce TiO_2 paste

- [1.] Melt PEG in water
- [2.] Make 20% PEG solution.
- [3.] Churn TiO_2 and PEG for 30 minutes.
- [4.] Put the mixture in the bottle with a syringe.

(2) Cleanse conducting glass with three kinds of liquid: a) five fold dilution of detergent b) pure water c) ethanol

· Pick the conducting glass with a tweezer and wash it by shaking it in the liquid.

· In the same way, cleanse the tweezer and the glass stick.

Procedure

(1) Coat conducting glass

- After washing the glass, stick tape as shown in Figure 2 on the conducting side.

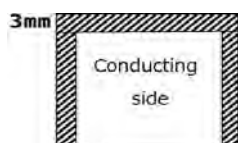


Figure 2

- After shaking the bottle, put the paste on the glass.
- Make the thickness even and remove the bubbles by sliding the glass stick.

(2) Bake TiO₂ paste

- Put the glass with the paste on the stainless board not to be heated directly. In addition, put the windshield around the glass.
- Bake it by Gus burner for 20 minutes.
- Cool it to normal temperature for 15 minutes.

Below is the table to indicated the combination of the different thicknesses and the different heating powers.

Thickness \ Temp.		1	2	3
Temp.	80°C	A	C	E
	120°C	B	D	F

Table 1

Observation

Several cracks were spotted on the surface of every paste.

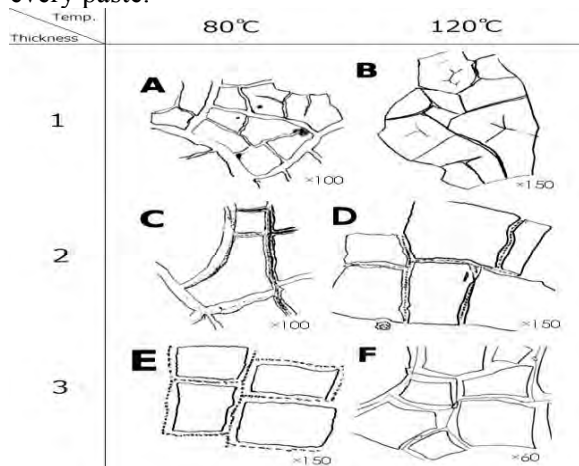


Figure 3

We observed the size and condition with an optical microscope. Below is the sketch of them on Figure 3, and the graph about crack's size on Figure 4.

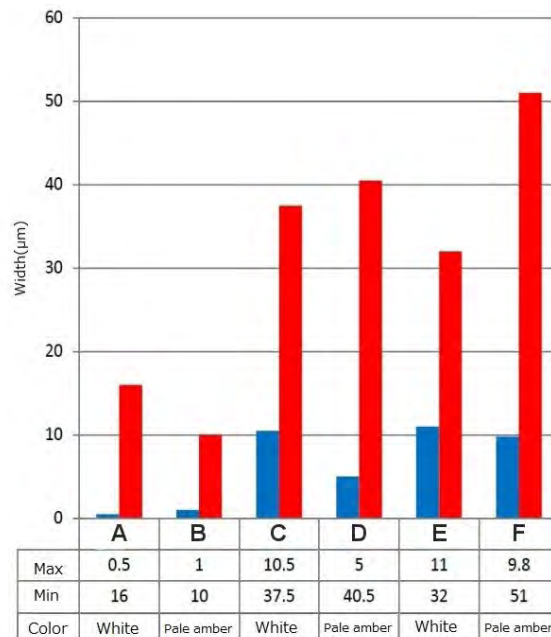


Figure 4

Experiment II

Objective

To confirm that the paste with the fewer cracks produces the larger amount of electricity

Hypothesis

The paste with the fewer cracks produces the larger amount of electricity.

Materials

Pentax of mallow blue (0.5g), Pure water (20ml), Electrolyte solution which include Iodide ion, Pencil (6B)

Preparation

(1) Dye extraction

- Added water 20ml to Pentax of mallow blue and left it for 10 minutes.
- Take out the Pentax with squeezing.

(2) Adsorption

Take the pigment by a tweezer, put it on the TiO₂ coat 3 or 4 drops and left it for 10 minutes.

(3) Making of electrodes

Coat the conduction surface by painting with a pencil, holding the glass with a tweezer.

(4) Building batteries

- Put the glass with black lead on the glass covered with TiO₂ paste and absorbed pigment.
- Hold an edge with a clip.
- Add a couple of drops of electricity solutions from the other edge and hold the other end with a clip fasted.

Procedure

1. Measure the amount of the power generated by the batteries from A to B. We measured their reverse voltage and resistance in two situations, without light and with LED's light from the distance.
2. Measure the amount of electricity generated from the pairs of the batteries. Because of the lack of equipment, we couldn't measure the six different batteries simultaneously, so we measured the three different pairs (AB,CD,EF) at the same time on different days.
3. In addition we grouped the six batteries into two groups in terms of the sun light angles: ABEF and CD. They have the totally opposite angles.
4. We also made a difference between ABCD and EF in terms of the timing to measure after pouring electrolyte solution.
5. We measured batteries A, B, C and D in couple of hours after pouring it. On the other hand we measured batteries E and F three days after pouring it.

Observation

Measuring the batteries individuality

The table shows that the resistance value isn't stable. We recorded the maximum and the minimum. In the left side is the minimum, and in the right side is maximum.

Date : A~D 12/25 12:30 cloudy

E,F 12/22 15:30

A	Voltage (mV)
No light	0.9
LED	1.1
Sunlight	11.6

B	Voltage(mV)	Resistance(kΩ)	
No light	0.0	0.844	0.874
LED	0.0	0.816	0.821
Sunlight	0.3	0.771	0.784

C	Voltage (mV)	Resistance (k Ω)	
No light	0.0	14.51	15.54
LED	-0.80	13.83	14.40

D	Voltage (mV)	Resistance (k Ω)	
No light	0.0	105.7	107.6
LED	-3.7	104.9	105.5
Sunlight	18.2	100.2	101.2

E	Voltage (mV)	F	Voltage(mV)
NO light	5.0	No light	33.9
LED	6.8	LED	19.5

Without light, Most of their electromotive values are near 0mV, and only in the battery we measured 5.0. There is a stark contrast between F and the other batteries.

Under the LED light, most of them changed positive cathode from the side of black lead to the side of TiO₂ coats .

Under the sun light, the side of black lead became the active cathode. With LED light, the resistances inside the batteries became a little smaller, and with sunlight, it became very smaller. Measuring in same date and time

Date:12/25 14:45~ cloudy

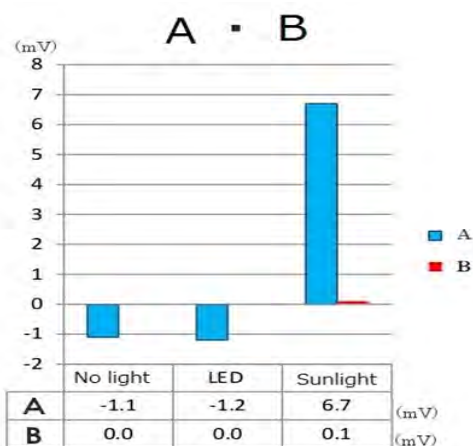


Figure 5

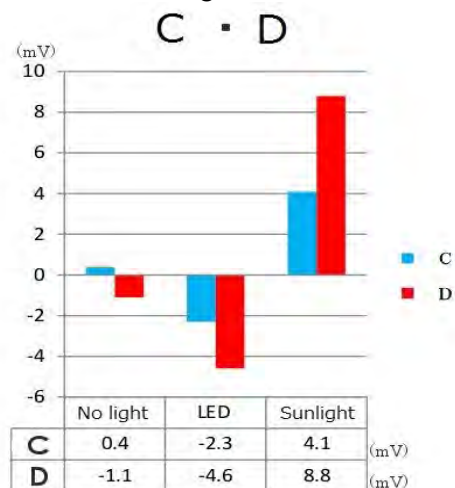


Figure 6

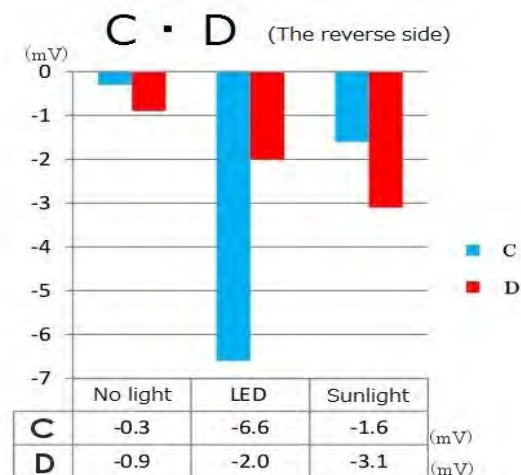


Figure 7

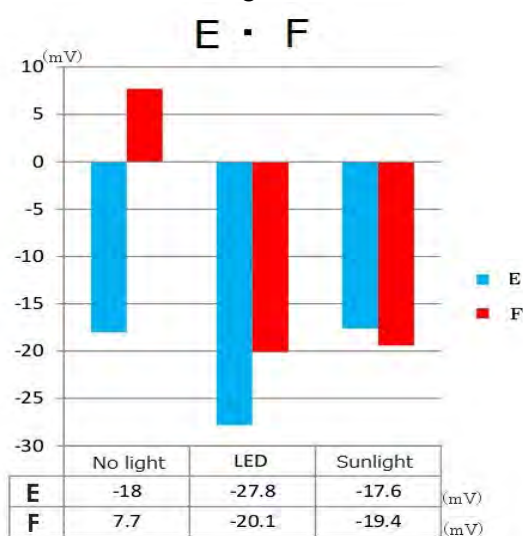


Figure 8

The graphs 5-8 show the amount of electricity generated under several conditions. The battery A produced electricity but the battery B produced little. (Figure 5) Both of the batteries C and D produced electromotive force and the battery D produced more. (Figure 6)

The batteries of larger number of crackers produced the less amount of electricity. In addition, when we shined from the side of black lead, the active cathode changed from the originally side and became the TiO_2 side. (Figure 7) The electromotive force of the batteries E and F without the light was far from 0mV. (Figure 8)

Experiment III

Overview

As shown in Figure 5-8, we measured the opposite direction of electricity against our expectations. So we decided to make an additional experiment.

We guessed that the temperature is closely related with the peeling off. So we raised the heating temperature to 450°C . As a result of the experiment it turned out that the temperature is not the culprit. That's because we couldn't see a big difference between the two different temperatures. From this comes an inference that other factors are involved.

Objective

To find the best substance to be put in the paste in order to make the battery more effective

To confirm what is the best of the substances, such as, acetic acid and PEG or the combination.

To confirm that TiO_2 peeled off when we poured electrolyte solution, which adverse the electric current.

Materials

7.5g of powdered TiO_2 , 15g of pure water, PEG

Preparation

Make three types of TiO_2 paste

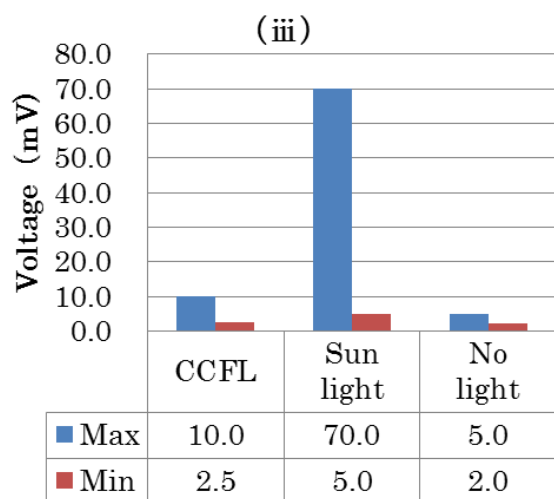
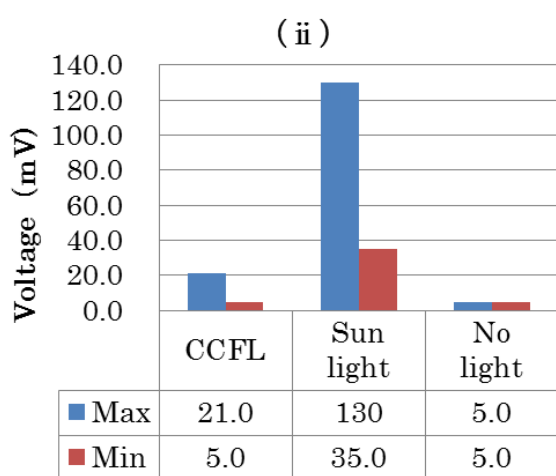
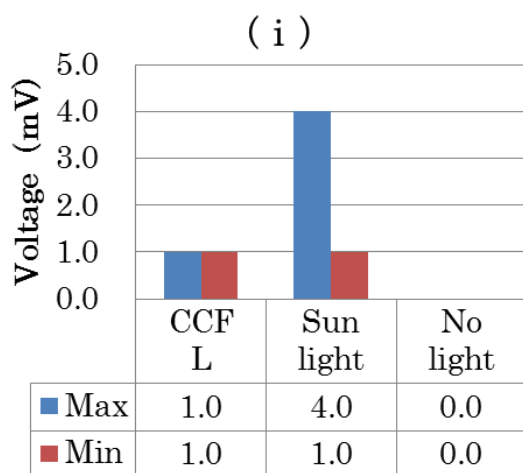
- The paste which includes only pure water.
Mix the 7.5g of powdered TiO_2 and pure water 15g for 30 minutes
- The paste which includes only acetic acid
 - Make acetic acid 3% aqueous solution
 - Mix 15g of the Acetic acid solution and 7.5g of the powdered TiO_2 for 30 minutes
- The paste which includes acetic acid and PEG. Mix 7.5g of powdered TiO_2 , 15g of acetic acid 15g and 4g of PEG4g for 30 minutes.

Procedures

- Put the paste on the glass
- Put the paste in the same way as the experiment I.
- Bake TiO_2 paste
- We heated the glass covered with TiO_2 paste in electric furnace in 450°C for 15 minutes.
- Get together and absorb dye
- We took them together like the experiment III.
- Power generation experiment
- We measured electromotive force of three kinds under three situations; sunlight, fluorescent lamp and no light

Observation

All of three batteries measured the biggest number immediately after started measuring and kept the number around minimum number. The battery (1) took very different number from others, so there might be something wrong when we measured.



C onclusions

From these results, we confirmed that the thinner paste produces the larger amount of electricity. At the same time we find that the most important factor to make an effective battery is the number of cracks on the surface of the paste. The thinner paste produces the fewer number of the cracks on the surface. In order to make an

effective battery, it is crucial to make the paste as thin as possible.

As for the substance to be used in making the paste, the use of both acetic acid and PEG is the most effective.

The types of light are also a very important factor to be considered. Under the fluorescent lamp, the battery produces less electricity than under the sun. That's because the fluorescent light includes less shorter-wavelength under ultraviolet rays.

F urther challenge

A stable and effective battery requires electrolyte to exist as long as possible without evaporating. It might be possible to lower the melting point of electrolyte but it is also important to devise a good way of preventing electrolyte from evaporating.

We also need to establish what color of dye is the most effective and how the dye is put in the paste. In these experiments we coat the solid paste with the dye. Another alternative is to put the dye in the paste material before it is put into a mold.

A cknowledgment

We are grateful to Mr. Koshino and Ms. Muso for helpful advice and support.

2015年度
スーパーサイエンスハイスクール
サイエンス研究会 研究論文集

2016年(平成28年) 3月1日 発行

国立大学法人 奈良女子大学附属中等教育学校
〒630-8305 奈良市東紀寺町1丁目60-1

TEL. 0742-26-2571

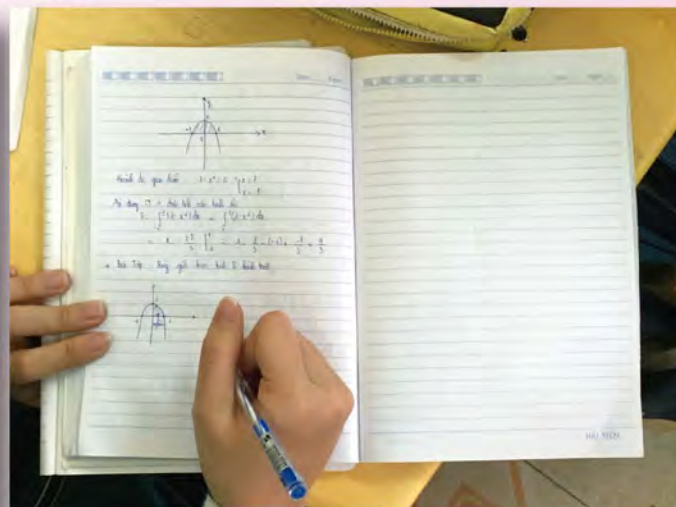
FAX 0742-20-3660

<http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/>

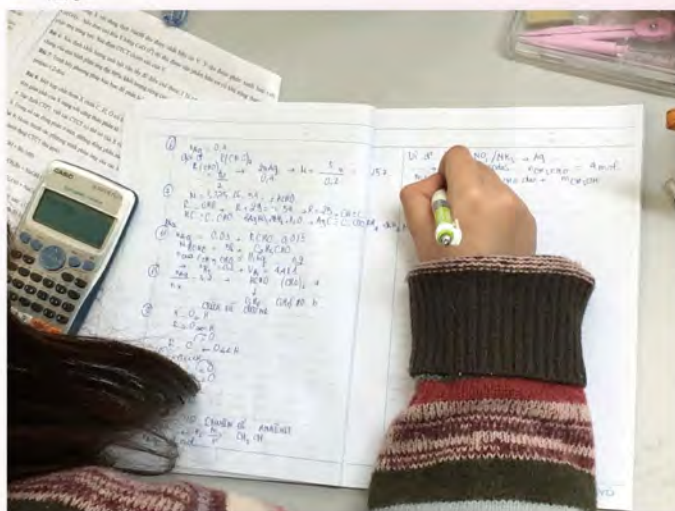
情報



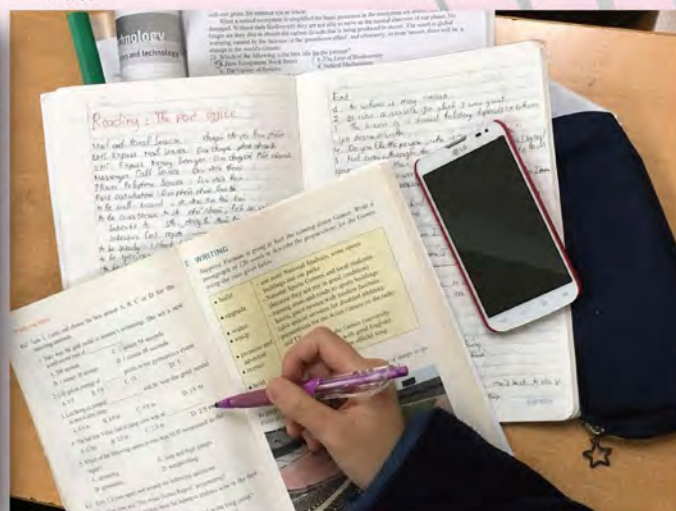
数学



化学



英語



世界の学び:ベトナム国家大学ハノイ自然科学大学附属英才高校(各教科のノート)