ランダムウォークに関する話題から
—逆正弦法則について—

小杉　のぶ子　（東京海洋大学　海洋工学部）

1．1 次元対称単純ランダムウォーク

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は，単位時間ごとに独立に移動する粒子の運動で，以下の分布に従うとする．

$$X_i = \begin{cases} +1 & (\text{確率: } p) \\ -1 & (\text{確率: } q = 1-p) \end{cases}$$

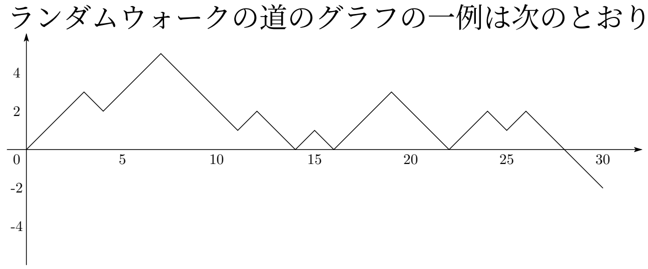
$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおくと，S_n は，時刻 n における位置を表す確率変数となる．以後，$p = q = 1/2$ の場合を考える．これは，１次元対称単純ランダムウォークと呼ばれる．(以下，ランダムウォークと呼ぶ.)

一般に，S_n のとる値は，$S_n = n - 2k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ となる．このとき，$X_i = +1$ となる確率変数が $n-k$ 個，$X_i = -1$ となる確率変数が k 個 ある．ここで，$S_n = 0$ となる場合は，n が偶数のときであることに注意する．また，

$$P(S_n = n - 2k) = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \qquad \left(= \frac{1}{2^n}\ {}_nC_k \right)$$

各 X_i について，期待値：$E[X_i] = 0$，分散：$Var(X_i) = 1$ となる．よって，$E[S_n] = E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = 0$, $Var(S_n) = Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = n$.

ランダムウォークの道のグラフの一例は次のとおり．



ここで，時刻 n までのすべての結果（道）の数は 2^n 個，おのおのの道のもつ確率は 2^{-n} となる．

2．ランダムウォークが原点へ戻る確率

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$f_0 = 0, \quad f_{2n} = \frac{1}{2n-1}\,u_{2n}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

とおくと，(i) 時刻 $2n$ に原点へ帰る確率 $= u_{2n}$，(ii) 時刻 $2n$ も含めて，それまでに原点へ帰らない確率 $= u_{2n}$，(iii) 時刻 $2n$ に原点へ初めて帰る確率 $= f_{2n}$ となる．さらに，$f = f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} + \cdots$ とおくと，f は，ある $n\,(\geq 1)$ があって，$S_{2n} = 0$ となる確率をあらわす．１次元対称単純ランダムウォークの場合は，$f = 1$ となる.（このことを「再帰的」であるという.）

3．リードを続ける確率

$p_{2k,2n}$ を，粒子が 0 から $2n$ の時間間隔のうち, 正の側で $2k$ 単位時間，負の側で $2n-2k$ 単位時間を過ごす確率を表すとする．このとき，$p_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k}$ が成り立つ.

次に，正の側で費やされる総時間の割合 k/n について考える．直感的には，正の側で過ごす時間の割合は $1/2$ に近いと考えられるが，実際は，$1/2$ に近い値をとる確率が最も少なく，逆に，$k/n = 0$ および $k/n = 1$ という端の値をとる確率が最も大きい．

u_{2n} をスターリングの公式 $(n! \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ e^{-n}\ (n \to \infty))$ で近似すると，$u_{2n} \sim 1/\sqrt{\pi n}$ となるので，

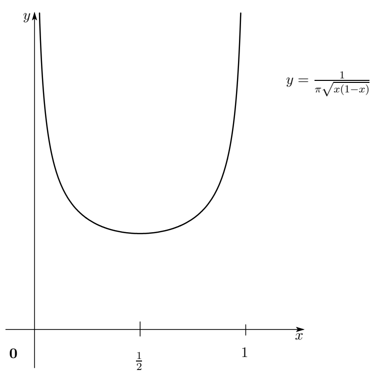
$$p_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\ \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}$$

正の側に滞在する時間の割合 k/n が a と $b\,(0 < a < b < 1)$ の間にある確率は

$$\sum_{a \le \frac{k}{n} \le b} p_{2k,2n} \sim \sum_{a \le \frac{k}{n} \le b} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{\pi} \sum_{a \le \frac{k}{n} \le b} \frac{1}{n}\ \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$$

と計算できる．$k/n = x$ とすると，右辺は次の積分を近似するリーマン和と考えられる．なお，次式の被積分関数は，以下の図のような概形となる．

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad \left(= \frac{2}{\pi}(\,\mathrm{arcsin}\sqrt{b} - \mathrm{arcsin}\sqrt{a}\,)\right)$$



定理 (逆正弦法則)
任意の $0 < \alpha < 1$ に対して，正の側で費やされる時間の割合 $x\,(= k/n)$ が $x < \alpha$ となる確率は次式に等しい

$$P(x < \alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\,arcsin\sqrt{\alpha}$$

参考文献

[1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, John Wiley and Sons, Inc.,New York-London-Sydney, 1968.

[2] W. Feller(河田龍夫　監訳), **確率論とその応用 I (上・下)**, 紀伊國屋書店, 1960,1961.

[3] 福島正俊, **確率論**, 裳華房, 2001.

[4] 池田信行, 小倉幸雄, 高橋陽一郎, 眞鍋昭治郎　共著, **確率論入門 I**, 培風館, 2006.