

非線形偏微分方程式系の応用解析

西田 孝明 (早稲田大学・基幹理工学部)

1 定式化

粘性・熱伝導性・圧縮性を考慮した一般の流体運動の方程式は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^i u^j + p \delta^{ij})}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mu' \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_k} \right) \right\} + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E u^j + p u^j)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} + \mu u^k \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_k} \right) + \mu' u^j \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_k} \right) \right\} + \rho u_i f_i,\end{aligned}$$

ここで $E = e + |u|^2/2$ で、圧力 p と内部エネルギー e は密度 ρ と温度 T の関数であり、粘性、熱伝導性を考慮しており、 f は外力である。

この方程式系に対する初期値・境界値問題は、一般の初期値に対して時間局所的に解の存在と一意性として解かれている。さらに、定数状態からのずれが小さい初期値のときには、時間大域的にも解かれ、時間とともにその定数状態への減衰あるいは漸近挙動が知られている。定常境界値問題も外力が小さいときには、定常解の存在と一意性が知られている。しかしながら、これらの小ささを仮定しないときには、ほとんど解明されていない。

例えば、Bénard の実験に対応してこの方程式系に対する熱対流問題のうちの最も簡単な次の境界値問題を考える。問題の領域は、水平な帯状領域 $\{x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, 0 < z < d\}$ とし、境界条件として、速度については stress free あるいは fixed を仮定し、温度に関しては領域の底の面では $T = T_0$ を、上の面では $T = T_1$ を与える。外力としては垂直下向きに重力のみが働くとする。このとき、任意の $\Delta T = T_0 - T_1 > 0$ に対して平衡解（熱伝導解）が存在する。従って、この熱伝導解について温度差を大きくしていく時のその安定性、不安定性を調べることは、平衡解の小さい近傍の問題であるが、物理的パラメーターが大きくなり上記の解析的に知られている状況から離れて行くことになる。その温度差が臨界値を越すとその熱伝導解は不安定化し、まず定常分岐を起こしていると考えられるが、質量保存則の非線形性が強くいまだ解析できていない。このようにこの方程式系に対する温度の考慮も必要な問題の数学的取扱い、極めて少ない。

そこで、熱対流問題の解析によく用いられるのは、この系を近似していると考えられている（即ち、この近似がどういう正当性を持つかは、数学的には分かっていない。）Oberbeck-Boussinesq 方程式であり、それを無次元化した系は、速度、圧力、温度について次のように与えられる。

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p = \Delta \vec{u} - \rho(T) \nabla z, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \Delta T.$$

ここで流体の圧縮性は、Oberbeck-Boussinesq 近似として密度の温度依存が、 $\rho(T) = G - \mathcal{R}_a T$ の形で重力・浮力の項にのみ仮定されており、 $\mathcal{P}_r = \mu/\kappa$ は Prandtl 数、 $\mathcal{R}_a$ は Rayleigh 数であり、これらが主たる分岐パラメーターとなる。殊に、 $\mathcal{R}_a = 0$ の時には、Navier-Stokes 方程式である。

考える領域は、水平な帯状領域 $\{x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, 0 < z < \pi\}$ とし、境界条件として、温度に関しては領域の底の面では $T = \pi$ を、上の面では $T = 0$ を考える。

このときすべてのパラメーター領域： $\mathcal{P}_r > 0, \mathcal{R}_a > 0$ において、

$$\vec{u} = 0, \quad T = \pi - z, \quad \rho = G - \mathcal{R}_a(\pi - z), \quad p = G(\pi - z) - \mathcal{R}_a\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi z + \frac{z^2}{2}\right) + p_a$$

により与えられる熱伝導解が、平衡状態である。

この平衡状態からの分岐問題を考えることが目的である。この時、平衡状態からの摂動が満たすべき方程式系は次である。

$$\frac{1}{\mathcal{P}_r} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p = \Delta \vec{u} + \mathcal{R}_a \theta \nabla z, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \theta = \Delta \theta + w.$$

以下では、はじめに最も簡単な境界条件である、速度について stress free を仮定し、摂動は水平方向に周期的、即ち、周期 $0 \leq x \leq 2\pi/a$, $0 \leq y \leq 2\pi/b$ を持つ場合を考え、更に、固有値の単純性を保証するために、次の偶関数・奇関数性を仮定する。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -u(-x, y, z) = u(x, -y, z), \quad v(x, y, z) = v(-x, y, z) = -v(x, -y, z), \\ w(x, y, z) &= w(-x, y, z) = w(x, -y, z), \quad \theta(x, y, z) = \theta(-x, y, z) = \theta(x, -y, z), \\ p(x, y, z) &= p(-x, y, z) = p(x, -y, z). \end{aligned}$$

この時、解は Fourier 級数展開でき、例えば温度は次の表示を持つ。

$$\theta(t, x, y, z) = \sum_{l, m, n} \theta_{lmn}(t) \cos alx \cos bmy \sin nz.$$

他の未知量も類似の表示式を持つ。解を考える関数空間は、次の Hilbert 空間である。

$$\begin{aligned} L_{a,b}^2 &= \{u, v, w, \theta, p \mid \sum_{l, m, n} \{u_{lmn}^2 + v_{lmn}^2 + w_{lmn}^2 + \theta_{lmn}^2 + p_{lmn}^2\} < \infty\} \\ H_{a,b}^2 &= \{u, v, w, \theta, p \mid \sum_{l, m, n} \{((al)^2 + (bm)^2 + n^2)^2 (u_{lmn}^2 + v_{lmn}^2 + w_{lmn}^2 + \theta_{lmn}^2) \\ &\quad + ((al)^2 + (bm)^2 + n^2) p_{lmn}^2\} < \infty\} \end{aligned}$$

2 Oberbeck-Boussinesq 方程式の分岐問題

まず方程式系を線形化してその固有値固有関数を調べる。その際、未知関数 θ, p をスケール変換して、パラメーターとして $R = \sqrt{\mathcal{P}_r \mathcal{R}_a}$ を用いる。:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla p = \mathcal{P} \Delta \vec{u} + R \theta \nabla z, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + R w, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

線形系は、自己共役で実の固有値のみを持つ。即ち、解として、次の形を仮定できて

$$\theta(t, x, y, z) = \theta_{lmn}(0) e^{\lambda t} \cos a l x \cos b m y \sin n z,$$

λ に関する固有値問題が得られ、その系は陽に解けて、各 l, m, n に対して次の固有値が得られる。

$$\lambda_3 = -\mathcal{P}_r A^2, \\ \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ -(1 + \mathcal{P}_r) A^2 \pm \sqrt{(1 + \mathcal{P}_r)^2 A^4 + 4 \frac{(a^2 l^2 + b^2 m^2) R^2 - \mathcal{P}_r A^6}{A^2}} \right\},$$

ここで

$$A^2 = a^2 l^2 + b^2 m^2 + n^2.$$

各モード (l, m, n) について、 λ_3 と λ_- は常に負であるが、

$$R^2 = \mathcal{P}_r \mathcal{R}_a = \frac{\mathcal{P}_r A^6}{(a^2 l^2 + b^2 m^2)} \quad \text{の時に} \quad \lambda_+ \text{ は、符号を変える。}$$

従って、 (a, b) を固定した時に臨界 Rayleigh 数は、

$$\mathcal{R}_c = \inf_{l, m, n} \frac{(a^2 l^2 + b^2 m^2 + n^2)^3}{(a^2 l^2 + b^2 m^2)} \geq 6.75$$

である。即ち、固定した a と b の値に対して、Rayleigh 数を増大してゆくときに、その最大固有値が零を横切る 臨界 Rayleigh 数に達した時に、それが、単純固有値であれば、通常定常分岐理論が適用でき、その臨界 Rayleigh 数から定常分岐が起っていることがわかる。最小の臨界 Rayleigh 数 $\mathcal{R}_c = 6.75$ であるが、これは例えば、 $a = 1/\sqrt{2}, b = 0$ の時には、 $(l, m, n) = (1, 0, 1)$ 、あるいは、 $a = 1/2\sqrt{2}, b = \sqrt{3}a$ の時には $(l, m, n) = (2, 0, 1), (l, m, n) = (1, 1, 1)$ 、等で達成される。この臨界 Rayleigh 数は、元の系の熱伝導解の線形安定性・不安定性の境を示すが、Joseph ([10] 1965) は、エネルギー法と変分法を用いて、臨界 Rayleigh 数以下では、大域的にも熱伝導解の非線形安定性が、成り立つことを示した。従って、この定常分岐では、Rayleigh 数が増大する方に分岐曲線が出ていることもわかる。

単純定常分岐定理

X, Y をバナッハ空間とし、 $\mathcal{F}(u, \mu)$ は、 $X \times R$ の原点近傍から Y への二回連続的微分可能な写像で、 $\mathcal{F}(0, \mu) = 0$ とし、次を仮定する。

(i) $\mathcal{N}(D_u \mathcal{F}(0, 0))$ は一次元で、 u_0 で張られる。

(ii) $\mathcal{R}(D_u \mathcal{F}(0, 0))$ の補空間は、一次元である。

(iii) $D_{u, \mu} \mathcal{F}(0, 0) u_0 \notin \mathcal{R}(D_u \mathcal{F}(0, 0))$ とする。

この時、 $(0, 0)$ の近傍の $\mathcal{F} = 0$ の解は、 $\{(0, \mu)\} \cup \{(u(s), \mu(s))\}$ からなる。ここで、 $-s_0 < s < s_0$ に対して、 $u(s) = su_0 + s\phi(s)$ で、 ϕ, μ は、一回連続的微分可能であり、 $\phi(s) \in \mathcal{R}(D_u \mathcal{F}(0, 0))$ かつ $\phi(0) = 0, \mu(0) = 0$ である。

この分岐によって現れる解の安定性に関する定理もある。([4] 1973) 更に、臨界固有値が、0 ではなく、純虚数のときの周期解が現れる Hopf 分岐の定理 ([5] 1977) もある。

3 ロール型、長方形型、六角形型の解

パターン形成を明瞭に見るために、 $a = 1/2\sqrt{2}$ と取り aspect 比を $b/a = \sqrt{3}$ と選ぶと、臨界 Rayleigh 数は、 $\mathcal{R}_c = 6.75$ であるが、その時の最大固有値 $\lambda = 0$ は、2次元の固有空間を持っている。一つの固有関数は、ロール型の解であり、他の固有関数は、長方形型の解であり、それらのある一次結合は、六角形型の解を与える。

ロール型の解は、モードが $(l, m, n) = (2, 0, 1)$ に対応し、温度に対する固有関数は、

$$\theta = \theta_{201} \cos(2ax) \sin z .$$

である。他の未知関数も類似の表示を持つ。

長方形型の解は、モードが $(l, m, n) = (1, 1, 1)$ に対応し、温度に対する固有関数は、

$$\theta = \theta_{111} \cos(ax) \cos(\sqrt{3}ay) \sin z .$$

である。

六角形型の解は、モードがそれらの一次結合に対応し、温度に対する固有関数は、

$$\theta = \theta_{hex} \{ 2 \cos(ax) \cos(\sqrt{3}ay) \sin z + \cos(2ax) \sin z \} .$$

である。

この場合には、固有空間が2次元であり単純分岐定理を直接適用することはできない。しかしながら、元の関数空間 $H_{a, \sqrt{3}a}^2$ をロールが現れる部分空間 H_{roll}^2 に制限して、単純分岐定理を適用することができる。即ち、例えば温度に関しては、次の表示ができる部分空間とする。

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=even}^{\infty} \theta_{l,0,n} \cos(alx) \sin(nz) .$$

これには、長方形型や六角形型の固有関数は含まれず、固有値 $\lambda = 0$ は、 $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_c = 6.75$ で単純となり、定常分岐定理が適用できて、この点から、 $\mathcal{R}_a > \mathcal{R}_c$ の方向にロール型の分岐解が得られる。同様に長方形型の解を得るには、関数空間 $H_{a,\sqrt{3}a}^2$ を部分空間 H_{rect}^2 に次のように制限する。

$$\begin{aligned} \theta = & \sum_{n=odd}^{\infty} \sum_{l+m=even, l, m=odd}^{\infty} \theta_{l,m,n} \cos(alx) \cos(\sqrt{3}amy) \sin(nz) \\ & + \sum_{n=even}^{\infty} \sum_{l+m=even, l, m=even}^{\infty} \theta_{l,m,n} \cos(alx) \cos(\sqrt{3}amy) \sin(nz) . \end{aligned}$$

他の未知関数も類似の表示を持つ。こうして、この部分空間では、同じく、長方形型の分岐解が得られる。六角形型の解は、 $x - y$ 平面上 $2\pi/3$ の回転不変性を持つから、部分空間 H_{hexa}^2 を次のように定める。

$$\begin{aligned} \theta = & \sum_{l,m,n}^{\infty} \sum_{l+m=even}^{\infty} \theta_{l,m,n} \{ \cos(alx) \cos(\sqrt{3}amy) \\ & + \cos(a(\frac{l-3m}{2})x) \cos(\sqrt{3}a(\frac{l+m}{2})y) \\ & + \cos(a(\frac{l+3m}{2})x) \cos(\sqrt{3}a(\frac{l-m}{2})y) \} \sin(nz) . \end{aligned}$$

他の未知関数も類似の表示を持つ。この部分空間では、六角形型の分岐解が得られる。

ここで、これらの三つの分岐解は、同じ臨界 Rayleigh 数 $\mathcal{R}_c = 6.75$ で零解からそれぞれに分岐し、その分岐曲線は、Joseph の上述の定理によって $\mathcal{R}_a > \mathcal{R}_c$ の方向に独立に出ており、しかもそれぞれの部分空間では安定に出ていることが分かる。(cf. [4]) 以上古典的な結果である。しかしながら、多重固有値からの分岐であり、元の空間 $H_{a,\sqrt{3}a}^2$ でそのそれらの安定性は分からない。それらを調べる方法の一つとして、次がある。

4 中心多様体

線形化した系が解析半群をなす場合の中心多様体定理は、次のように述べられる。

$$\frac{dw}{dt} = L_0 w + N(w) \quad w(0) = w_0$$

W をバナッハ空間とし、線形作用素 L_0 は、 $\mathcal{D}(L_0) \subset W \rightarrow W$ の楔型作用素で、解析半群を生成し、コンパクトなレゾルVENTを持つとする。半線形作用素 $N(w)$ は、 $V = \mathcal{D}((-L_0)^\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$ の原点近傍から W へ連続的に微分可能で、その微分 $DN(w) \in \mathcal{L}(V; W)$ は、そこで Lipschitz 連続、 $N(0) = 0$ とする。 $L = L_0 + DN(0)$ のスペクトル $\sigma(L)$ は、すべて λ 平面の左半分にあり、 $\sigma(L) \cap \{\Re \lambda = 0\}$ は、有限個の固有値のみからなる。その時、この有限次元の固有空間への射影 P を用いて $X = PW$

として、 $W = X \oplus Y$ であり、 $A = L|_X$, $B = L|_Y$ と分解できて、 $\Re \sigma(A) = 0$, $\Re \sigma(B) < 0$ とする。この時、系は次の形にかける。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = By + g(x, y).$$

ここで、 $f = P(N(w) - DN(0)w)$, $g = (I - P)(N(w) - DN(0)w)$

中心多様体の存在定理

この系の不変多様体 $y = h(x) : X \rightarrow V$ が、 $\|x\| < \exists \delta$ で存在し、一回微分が Lipschitz 連続で、 $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$ 、 $\|h(x)\|_\alpha = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ である。

安定性定理

中心多様体上の系

$$\frac{du}{dt} = Au + f(u, h(u)), \quad u(0) = u_0 \in X$$

の原点近傍の解が、元の系の原点近傍の解の安定性を決定する。

中心多様体の近似を求めるための定理もある。その近似多様体を用いた系を考えれば、原点近傍の解の安定性等もわかる。Dan Henry の本にまとめられている。中心多様体の計算は、藤村一山田 ([6])、小川 ([21]) にある。

5 大域的分岐問題

ここでは、これらの三つの分岐解の分岐曲線を延長して、元の関数空間 $H_{a, \sqrt{3}a}^2$ での時間発展に関する安定性・不安定性、それによる二次分岐などを調べ、より大域的な分岐図を求める。

まず、定常解の偏微分方程式系は、無限次元の問題であるが、それを有限次元の問題で近似する。未知関数 $\{u, v, w, \theta, p\}$ に関する方程式は、第一節の級数展開によって、

$$\{u_{l,m,n}, v_{l,m,n}, w_{l,m,n}, \theta_{l,m,n}, p_{l,m,n}\}$$

に関する無限連立の二次方程式系であるが、これを有限個の

$$\{u_{l,m,n}, v_{l,m,n}, w_{l,m,n}, \theta_{l,m,n}, p_{l,m,n}, \quad l + m + n \leq N\}$$

に関する有限連立二次方程式として Galerkin 近似する。これは、 U でその有限個の未知量を表すとその方程式は、

$$F(U; \mathcal{R}_a, \mathcal{P}_r) = 0$$

の形に書ける。これを $\mathcal{R}_a, \mathcal{P}_r$ を固定して、次のニュートン法で解く。

$$U_{k+1} = U_k - DF(U_k)^{-1} F(U_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

ここで、 DF は、 F の u に関する Fréchet 微分で、初期値 U_0 は、適当に与える。

以下では、 $a = 1/2\sqrt{2}$ と取り aspect 比を $b/a = \sqrt{3}$ と固定して、ニュートン法により数値計算して得られた定常解の等高線を描いている。

ロール型の解。

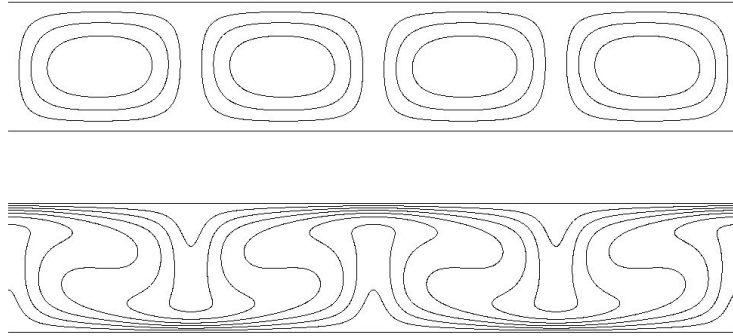


図 1: $\mathcal{R}_a = 10.0 \mathcal{R}_c$, $\mathcal{P}_r = 10.0$

図 1 では、横軸は、 $0 \leq x \leq 2\pi/a$, 縦軸は、 $0 \leq z \leq \pi$ の範囲として、ロール型解の $y = \text{const.}$ の断面での、上が流れ関数の等高線、下が温度の等温線である。即ち、中央部で流体は上昇しそのすぐ両横で下降している。

解の安定性に関しては、得られた定常解の周りで発展方程式として線形化しその固有値を求める。すべての固有値の実部が負であれば、安定であり、一つでも正があれば、不安定である。このロール型解は、時間発展に関して安定である。

長方形型の解。

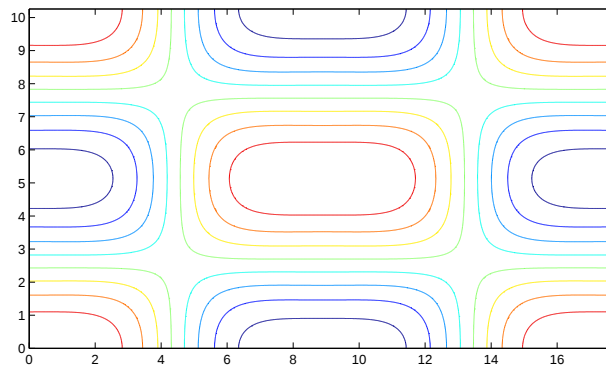


図 2: 中間の水平面 $z = \pi/2$ における温度の等温線である。

図 2 は、 $\mathcal{R}_a = 1.5 \mathcal{R}_c$ の時の長方形型の解である。ここで横軸は、 $0 \leq x \leq 2\pi/a$ で、縦軸は、 $0 \leq y \leq 2\pi/b$ の範囲を取っている。

安定性に関しては、長方形型の解は、 $\mathcal{R}_c < \mathcal{R}_a < 1.42 \mathcal{R}_c$ では、安定であるが、 $\mathcal{R}_a \simeq 1.43 \mathcal{R}_c$ で安定性を失い、そこから長方形・六角形の混合型の解へと図 4 の様に

2 次分岐を起こしている。即ち、図 2 の長方形型の解は、既に不安定になっている解である。

六角形型の解。

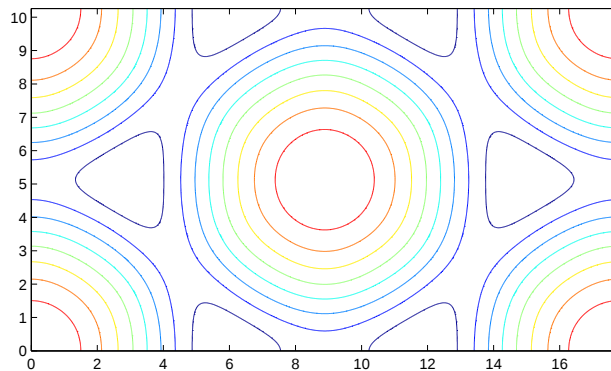


図 3: $\mathcal{R}_a = 2.0 \mathcal{R}_c$ の六角形型の等温線

六角形型の解は、分岐直後 $\mathcal{R}_c < \mathcal{R}_a < 1.83 \mathcal{R}_c$ は、不安定である。ところが、 $\mathcal{R}_a \simeq 1.84 \mathcal{R}_c$ で上記の混合型の分岐曲線と交叉した後、 $1.85 \mathcal{R}_c < \mathcal{R}_a$ では、安定になっている。図 3 は、安定になった六角形型の解の等温線である。安定性に関係なく六角形型の解は、きれいに $2\pi/3$ の回転対称性を持っているのが分かる。

混合型の解。

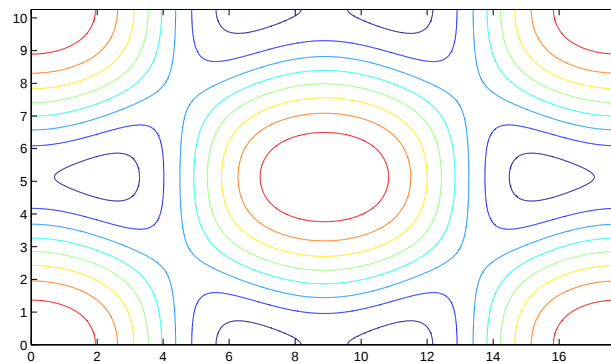


図 4: $\mathcal{R}_a = 1.5 \mathcal{R}_c$ の混合型の等温線

混合型の解の図 4 は、長方形型から六角形型の方に分岐した直後である。

$1.44 \mathcal{R}_c < \mathcal{R}_a < 1.83 \mathcal{R}_c$ では、横長であるが六角形に近づいていることが分かる。この間安定である。その後、この混合型の解の分岐曲線は、六角形型の解の分岐曲線と交叉して安定性を交換して、不安定になる。不安定になった後では、縦長に変化している。

以上の分岐曲線の概略図を描いたものが、次の図 8 である。横軸は、自明解を示す直線である。 $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_c$ から一番上に出ているように描かれているのが、ロール型解の分岐

曲線で、一番下に出ているように描かれているのが、長方形型の解の分岐曲線で、それらは、お互いに直交する方向に出ている。それらの中間に出ているように描かれているのが、六角形型の解の分岐曲線である。下の長方形型の解の分岐曲線から二次分岐しているのが、混合型と呼んでいる解の分岐曲線で、それは、途中で、六角形型の解の分岐曲線と交叉している。六角形型の解は、その交叉の後、安定になる。ロール型の解は、この範囲では、ずーっと安定である。

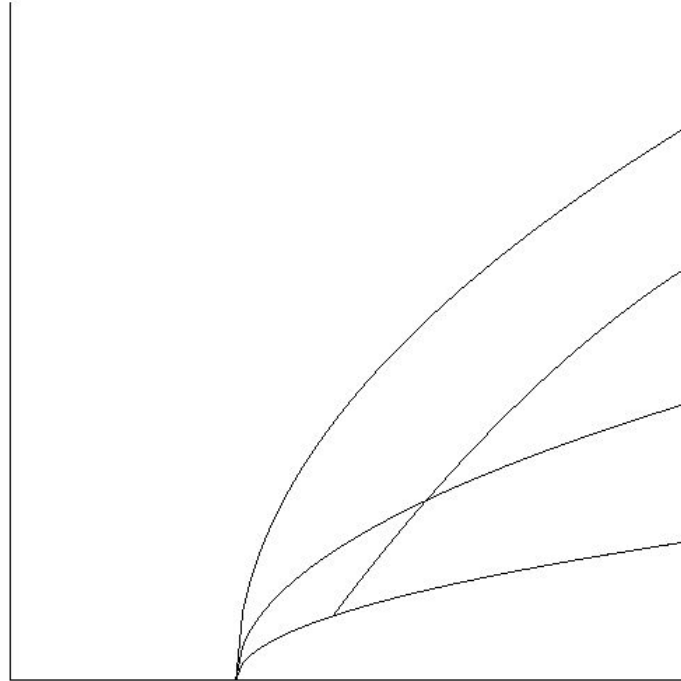


図 5: 横軸は、 $0.0 \leq \mathcal{R}_a \leq 3.0 \mathcal{R}_c$ の範囲であり、縦軸は、温度の $\theta_{2,0,1}$, $\theta_{1,1,1}$ を表している。

この分岐図の正当性の証明は、今後の数学の問題である。即ち、分岐曲線が、このようになっており、2次分岐点の特定とか曲線の交叉の証明など。ロール型の解については、後述する。

平面の周期領域 $0 \leq x \leq 2\pi/a$, $0 \leq y \leq 2\pi/b$ に関する注意。

この領域を摂動すると、臨界 Rayleigh 数 $\mathcal{R}_c = 6.75$ は、もちろん変化し、3つの型の解の分岐は、同時には起らなくなるし、六角形型の解の分岐曲線と混合型の分岐曲線の交叉も特別の場合を除いて無くなる。もちろん六角形型の解自身が、正六角形ではなくなっているが。

6 境界条件の変更

流体の下境界をなす平面上での速度の境界条件をもっと物理的に自然な、固定境界条件に変えると、自明解の周りでの線形化方程式の固有値問題も、陽的には解けなくなる。解の展開には、次の様に $-1/2 \leq z \leq 1/2$ として、例えば Chebyshev の多項式が必要になる。

$$w(t, x, y, z) = \sum_{l,m,n} w_{lmn}(t) \cos(\tilde{a}lx) \cos(\tilde{b}my) T_n(2z) \quad .$$

従って、前述のように解析的に、臨界 Rayleigh 数を求めて、そこで分岐が起っていることを単純定常分岐定理を用いて証明することは、現在出来ない。

この展開を用いて、有限次元で近似した線形化方程式の固有値問題を計算機で求めると、臨界 Rayleigh 数 $\mathcal{R}_c$ は、 $1100.6 \dots$ で、前節の周期領域に対応する x, y 方向の周期領域は、 $0 \leq x \leq 2\pi/\tilde{a}$, $0 \leq y \leq 2\pi/\tilde{b}$, $\tilde{a} = 1.341 \dots$, $\tilde{b} = \sqrt{3}\tilde{a}$ となる。前の境界条件の時の臨界 Rayleigh 数 $\mathcal{R}_0$ 及び周期領域の係数 a_0 は、 z 方向を 1 に無次元化すると、夫々、 $\mathcal{R}_0 = 6.75 \times \pi^4 = 657.5 \dots$, $a_0 = \pi/2\sqrt{2} = 1.1107 \dots$ であった。

この境界条件の場合に、前節同様に有限次元に落して、 $\mathcal{R}_a = 2\mathcal{R}_c$ の時に六角形型の解を数値計算して求めたのが次の図 6 である。計算はめんどどうになるが、図そのものは、前節のそれとあまり変わらない。

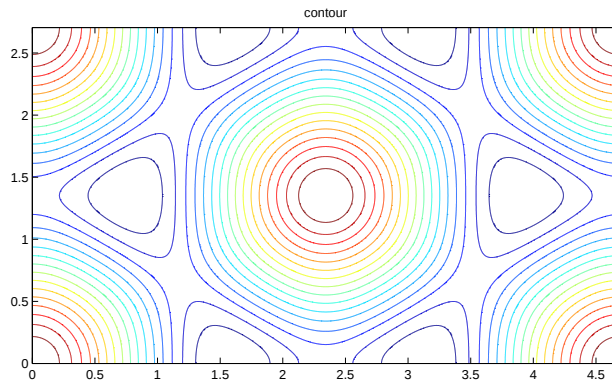


図 6: 中間の水平面 $z = 0$ における温度の等温線である。

六角形型のこの解の存在証明は、前節と同じく今後の問題である。

流体の上面が自由表面の時には、Bénard-Marangoni 熱対流であり、問題が準線形になるために、分岐定理の適用は困難になり、数値計算はさらに困難になる。最近、最初の定常分岐と Hopf 分岐の解析的証明ができた。（cf. [18] [19]）

7 大域的な解の計算機援用存在証明

半線形偏微分方程式系の解の構成的近似として、孤立解があるとするとき Galerkin 近似によって、いくらでも正確な近似解が存在すると云う Schauder の不動点定理を利用した次の定理がある。 $X \subset Y \subset W \subset Z$ をバナッハ空間とし、埋込み $X \subset Y$ は、コンパクトとする。方程式

$$\mathcal{F}(u) \equiv Au + B(u, u) = 0$$

において、 $A : X \rightarrow Z$ は線形作用素、 $B : Y \rightarrow Z$ は双線形作用素で、

$$\|B(u, v)\|_Z \leq K_2 \|u\|_Y \|v\|_Y, \quad \|B(u, v)\|_W \leq K_2 \|u\|_X \|v\|_X$$

とする。有限次元への射影 $P_N : u \in Z \rightarrow Z_N$ が、

$$\begin{aligned} \forall w \in W, w_N = P_N w, \|w_N - w\|_Z &\leq \frac{1}{N} \|w\|_W \\ \forall u \in X, u_N = P_N u, \|u_N - u\|_Y &\leq \frac{1}{N} \|u\|_X \end{aligned}$$

をみたし、 A と可換であるとする。

定理

孤立解 u における線形化方程式を $L(u)v \equiv Av + B(u, v) + B(v, u) = f$ としたとき、孤立している、即ち、ある $K_1 < \infty$ が存在して、

$$\|L(u)^{-1}f\|_X \leq K_1 \|f\|_Z$$

とすると、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある N_0 が存在して、任意の $N > N_0$ に対してある $w \in X_N$ が在り、

$$Aw + P_N B(w, w) = 0, \quad \|w - u\|_Y < \epsilon$$

が成り立つ。

実際に数値的に解を求めるのは、Newton 法によることが多い。その方法を解の存在証明に結びつける簡易 Newton 法による収束証明は、上述の設定下に、次の形でまとめられる。

定理

$\bar{u} \in X_N$ を、数値的に求めた良い近似とする、即ち、

$$A\bar{u} + P_N B(\bar{u}, \bar{u}) = R_N \quad \|R_N\| < \epsilon \ll 1$$

であって、この近似解における線形化方程式を $L(\bar{u})v \equiv Av + B(\bar{u}, v) + B(v, \bar{u}) = f$ としたとき、ある $K_1 < \infty$ が存在して、

$$\|L(\bar{u})^{-1}f\|_X \leq K_1 \|f\|_Z$$

が成り立つと仮定する。 $\epsilon_1 = \|B(\bar{u}, \bar{u}) - P_N B(\bar{u}, \bar{u})\| (< \frac{1}{N} \|\bar{u}\|_X^2) \ll 1$ として
 評価 $K_1(\epsilon + \epsilon_1 + K_2 \alpha^2) < \alpha$ が成り立つならば、真の解 $u \in X$ が、 $\|u - \bar{u}\| < \alpha$
 に存在する。

具体的にロール型の解を Rayleigh 数について大域的に求めるために、空間 2 次元であ
 ることから、流れ関数を用いれば、問題は次の様に書換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi &= \mathcal{P}_r \Delta^2 \psi + R \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta \theta + R \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} . \end{aligned}$$

速度の境界条件は stress free とすると、解は次の展開を持つと考えられる。

$$\psi(t, x, z) = \sum_{l,n} \psi_{ln}(t) \sin(alx) \sin(nz) , \quad \theta(t, x, z) = \sum_{l,n} \theta_{ln}(t) \cos(alx) \sin(nz) .$$

関数空間は、この展開を持つ周期性を考慮した $H^4 \otimes H^2$ である。

定常ロール型解の大域的な分岐曲線は、時間依存しない方程式と解の展開を前と同様に
 有限次元 $l + n \leq N$ で Galerkin 近似して、Newton 法を用いた数値計算によって次の
 図 7 の様に得られる。 $a = 1/2 \sqrt{2}$ とし、横軸は、Rayleigh 数で、縦軸は、 $\psi_{2,1}$ である。
 Rayleigh 数を増加させると、 $\mathcal{R}_a \simeq 42$ 辺りで、線形化方程式の固有値は、複素共役の
 2 根が虚軸を横切り不安定化している。即ち、Hopf 分岐が起っている。その時間的周期
 解は、時間依存の上の方程式を時間微分を差分化して数値計算で得られる。([15] 1999)
 不安定化の前後でも定常ロール型解の形は、ほとんど変化しない。

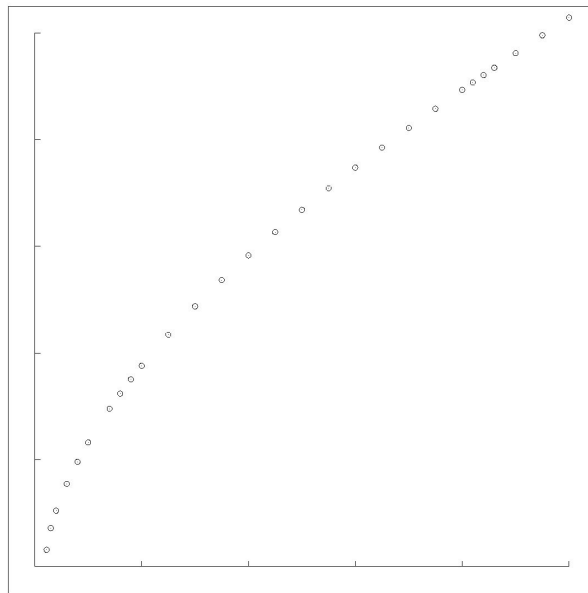


図 7: (2, 1) モードのロール型解の大域的分岐曲線 $0 \leq \mathcal{R}_a \leq 50 \mathcal{R}_c$.

定常ロール型解の最初の分岐点 $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_c$ から離れた所での存在証明を行うために、定常問題を不動点形式に書換える。境界条件を考慮して Δ^2 及び Δ の逆作用素を作用させると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\mathcal{P}_r} \left\{ \Delta^{-2} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right) \right\} \\ \theta &= \Delta^{-1} \left(R \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

これらの式を $H^3 \otimes H^1$ で考えると、右辺の非線形項 ($\mathcal{F}$ と記す。) はコンパクト作用素になっている。従って、 $\mathcal{R}_a, \mathcal{P}_r$ を固定して、この空間に適当な有界閉凸集合 $\mathcal{W}$ を見つけて

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$$

を示せば、Schauder の不動点定理によって不動点、即ち、定常ロール型の解の存在が証明できる。この $\mathcal{W}$ は、上述の数値計算によって求めた近似解 ψ_N, θ_N の小さい近傍として構成する。この包含関係が実際に成立することを計算機を利用して示す。即ち、計算機援用証明法として行う。具体的には、 $\mathcal{W}$ を上記のような有限次元部分での ψ_N, θ_N の小さい近傍と残りの無限次元部分での零の小さい近傍の和集合に分け、有限次元部分には、簡易 Newton 法を用いて評価し無限次元部分は、ノルムで評価する。いずれの評価にも区間演算による誤差評価が必要である。 $\mathcal{R}_a \simeq 10 \times \mathcal{R}_c$ くらいまでが、現在証明可能である。[25] を参照されたい。

二次分岐点あるいは分岐曲線の交差点を特定するための数値計算には、ニュートン法を用いているために困難が生じる。即ち、分岐点等では、線形化方程式が零固有値を持つためにニュートン法で必要な線形化方程式の逆作用素を作用させる事が出来なくなるからである。しかしながら、多くの場合には、分岐を起す前の解と分岐した解とは、別の部分空間に属している。従って、このような分岐点では、それぞれの部分空間を用いることと Bordering algorism を用いれば、数値計算および計算機援用証明が可能になる。

分岐曲線の追跡

$$u = u(R) \quad \text{such that} \quad \mathcal{F}(u, R) = 0.$$

$$u_{n+1} = u_n - \mathcal{F}_u(u_n, R)^{-1} \mathcal{F}(u_n, R).$$

定常二次分岐点

$$\mathcal{F}(u_0, R_0) = 0, \quad \mathcal{F}_u(u_0, R_0) \Phi = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_u(u, R) & 0 & \mathcal{F}_R(u, R) \\ \mathcal{F}_{uu}(u, R) \Phi & \mathcal{F}_u(u, R) & \mathcal{F}_{uR}(u, R) \Phi \\ 0 & \Phi^t & 0 \end{pmatrix}$$

もし

$$u = u(R) \in X_0 \subset\subset X \text{ such that } \mathcal{F}(u, R) = 0 ,$$

が成立てば、それぞれ

$$u , \delta u \in X_0 , \quad \Phi , \delta \Phi \in X , \quad R , \delta R \in \mathbf{R} .$$

と、取ることが出来て、拡大したこの行列は可逆になる。

例

(4,0,1) モードからの分岐：

$$Pr = 10 , N = 24 , Ra = 32.04265 \cdots , r = 4.74706 \cdots , Nuss = 2.55038 \cdots$$

(4,0,1) モードからの二次分岐：

$$Pr = 10 , N = 24 , Ra = 85.00512 \cdots , r = 12.59335 \cdots , Nuss = 4.09340 \cdots$$

Hopf 二次分岐点

$$\mathcal{F}(u_0, R_0) = 0 , \quad \mathcal{F}_u(u_0, R_0) \Phi = \lambda \Phi ,$$

$$\lambda = i\omega , \quad \omega \in \mathbf{R} .$$

この時には、 $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$, Φ_1, Φ_2 : 実数値 として、

$$\mathcal{F}(u_0, R_0) = 0 ,$$

$$\mathcal{F}_u(u_0, R_0) \Phi_1 = -\omega \Phi_2 ,$$

$$\mathcal{F}_u(u_0, R_0) \Phi_2 = \omega \Phi_1 .$$

例

(2,0,1) モードからの Hopf 分岐：

$$Pr = 10 , N = 24 , Ra = 277.36398 \cdots , r = 41.09096 \cdots ,$$

$$\lambda = i \times 40.72434 \cdots , Nuss = 6.68442 \cdots$$

$$Pr = 10 , N = 32 , Ra = 277.36479 \cdots , r = 41.09108 \cdots ,$$

$$\lambda = i \times 40.72440 \cdots , Nuss = 6.68450 \cdots$$

参考文献

- [1] Bénard, H. : Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Gén. Sci. Pure Appl.*, **11** (1900) pp.1261–1271, pp.1309–1328
- [2] Bolton, E. W. and Busse, F. H. : Stability of convection rolls in a layer with stress-free boundaries. *J. Fluid Mech.* **150** (1985) 487–498
- [3] Boussinesq, J. : *Théorie analytique de la chaleur*, Vol.2. Paris, Gauthier-Villars (1903)
- [4] Crandall, M. G. and Rabinowitz, P. H. : Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **52** (1973) 161–180
- [5] Crandall, M. G. and Rabinowitz, P. H. : The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **67** (1977) 53–72
- [6] Fujimura, Kaoru and Yamada, Syouko : Pattern formation in thermal convection on a hexagonal lattice. *Lecture at the Workshop on Recent Topics in Nonlinear Partial Differential Equation*, Yuzawa (2003)
- [7] Golubitsky, M., Swift, J. W. and Knobloch, E. : Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Bénard convection. *Physica D.* **10** (1984) 249–276
- [8] Henry, D. : *"Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations"*, Springer-Verlag, 1981
- [9] Iohara, T., Nishida, T., Teramoto, Y. and Yoshihara, H. : "Bénard-Marangoni convection with a deformable surface", *Kokyuroku, RIMS, Kyoto Univ.*, **974** (1996) pp.30–42
- [10] Joseph, D. D. : On the stability of the Boussinesq equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **20** (1965) 59–71
- [11] Kagei, Y. and Wahl, W. v. : The Eckhaus criterion for convection roll solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations. *Intern. J. Nonlin. Mech.* **32** (1997) 563–620
- [12] Kawanago, T. : Computer assisted proof to symmetry-breaking bifurcation phenomena in nonlinear vibration. *Japan J. Indust, Appl. Math.*, **21** (2004) 75–108
- [13] Kirchgässner, K. and Kielhöfer, H.: Stability and bifurcation in fluid dynamics. *Rocky Mountain J. Math.* **3** (1973) 275–318
- [14] 西浦 廉政 : 「非線形の現象と解析」, 日本評論社 (1 9 7 9) 『一様性を破って－不安定性、分岐、パターン形成』 3 1 頁－5 4 頁

- [15] 西田 孝明 : 数学セミナー、38 巻 (1999) 6 月号、『流体の偏微分方程式』25 頁－29 頁
- [16] Nishida, T., Ikeda, T. and Yoshihara, H.: Pattern formation of heat convection problems. Math. Model Numer. Simul. ed. by Miyoshi, T. Springer(2001) 209–218
- [17] Nishida, T., Teramoto, Y. and Yoshihara, H.: Hopf bifurcation in viscous incompressible flow down an inclined plane. J. Math. Fluid Mechanics. (2005) 1–43
- [18] Nishida, T. and Teramoto, Y.: On a linearized system arising in the study of Bénard-Marangoni convection. Proc. of Kyoto Conference on Navier-Stokes Equations and their Applications, ed. by Giga, Kozono, Okamoto and Shibata, Kokyuroku Bessatsu B1, RIMS, Kyoto University, (2007) pp.271-286
- [19] Nishida, T. and Teramoto, Y.: Bifurcation theorem for the model system of Bénard-Marangoni convection. J. Math. Fluid Mechanics. (2008) 1–24
- [20] Oberbeck, A. : Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei der Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. Annalen der Physik und Chemie **7** , (1879) p.271
- [21] 小川 知之 : ベナール対流におけるヘキサゴンパターンと複合ロールの安定性、数理研講究録、原稿 (2004)
- [22] Rayleigh, L. : On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Phil. Mag. Ser. 6, **32** (1916) 529–546
- [23] Urabe, M. : Galerkin’s procedure for nonlinear periodic systems. Arch. Rat. Mech. Anal., **20** (1965) 120–152
- [24] Velte, W. : Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen. Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1964) 97–125
- [25] Watanabe, Y., Yamamoto, N., Nakao, M. and Nishida, T.: A numerical verification method for bifurcated solutions of Rayleigh-Bénard Problems . J. Math. Fluid Mechanics. **6** (2004) 1–20
- [26] Yudovich, V. I. : On the onset of convection. P. M. M. (J. Appl. Math. Mech.) **30** (1966) 1193–1199