代用電荷法による数値等角写像

Numerical Conformal Mappings by the Charge Simulation Method

大学院教育イニシアティブ

「先端科学技術の芽を生み出す女性研究者育成」

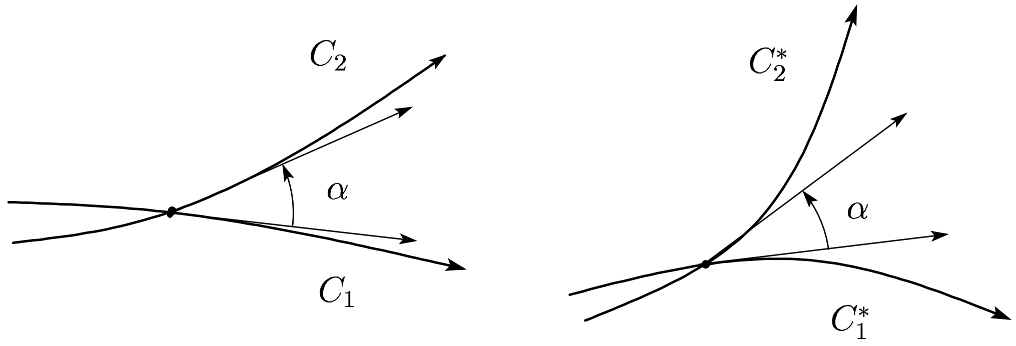
院生企画セミナー II（博士後期課程）

奈良女子大学 2009/12/07

天野　要

愛媛大学大学院理工学研究科

等角写像（Conformal Mapping）



$z = x + \mathrm{i}y$ 平面　　$w = u + \mathrm{i}v$ 平面

共形：局所的な相似性を保存

定理 1　解析関数 $w = f(z)$ で定義される写像は $f'(z) = 0$ となる点を除いて等角である.

定理 2　調和関数を 1 対 1 等角写像で変換した関数も調和関数である.

与えられた領域を簡単な領域に写像する解析関数は？

1. はじめに

数値等角写像（NCM: Numerical Conformal Mapping）

問題領域 $\Longleftrightarrow$ 標準領域

積分方程式法（IEM: Integral Equation Method）

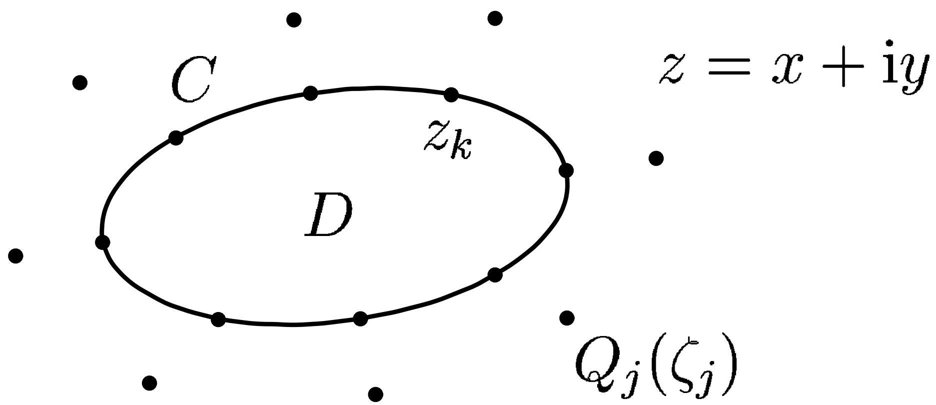
Symm の積分方程式法が著名

- G.T. Symm (Numer. Math., 1966, 1967, 1969)
- D. Gaier (Math. Z., 1976; in E.B. Cristoffel, Birkhäuser, 1981)
- J.K. Hayes, D.K. Kahaner and R.G. Kellner (Math. Comp., 1972)
- D.M. Hough and N. Papamichael (Numer. Math., 1981, 1983)

代用電荷法（CSM: Charge Simulation Method)

- 天野 (情報処理学会論文誌，1987)

2. 代用電荷法の原理



$$\Delta g(z) = 0 \ (z \in D), \quad g(z) = b(z) \ (z \in C)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad g(z) = g(x, y), \quad b(z) = b(x, y)$$

近似解の表現

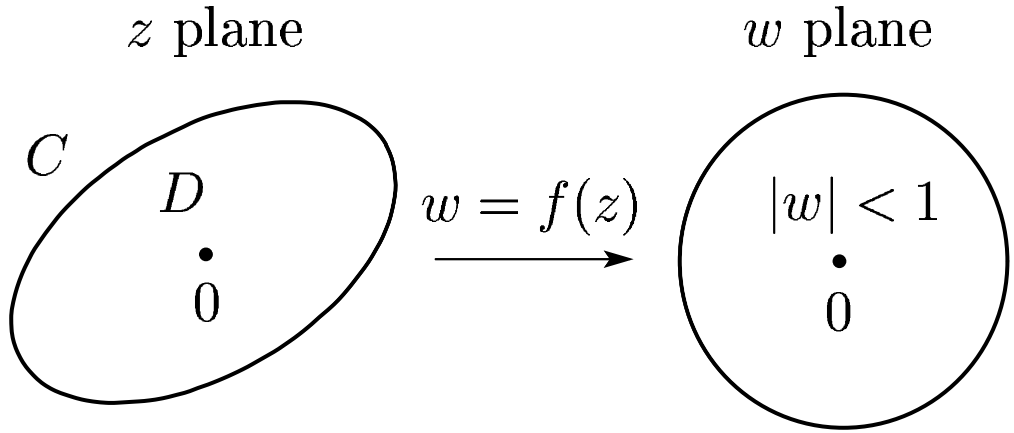
$$g(z) \simeq G(z) = \sum_{j=1}^{N} Q_j \log|z - \zeta_j|$$

拘束条件（選点的な境界条件）

$$G(z_k) = \sum_{j=1}^{N} Q_j \log|z_k - \zeta_j| = b(z_k), \quad k = 1, \ldots, N$$

３．代用電荷法による数値等角写像１

Riemann の写像定理



この等角写像は正規化条件 $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0\ (z_0 \in D)$ で一意に定まる．

座標系を $z_0 = 0$ にとって，

写像関数を

$$f(z) = z\exp(g(z) + \mathrm{i}h(z))$$

と表現すれば,

(i) 正規化条件

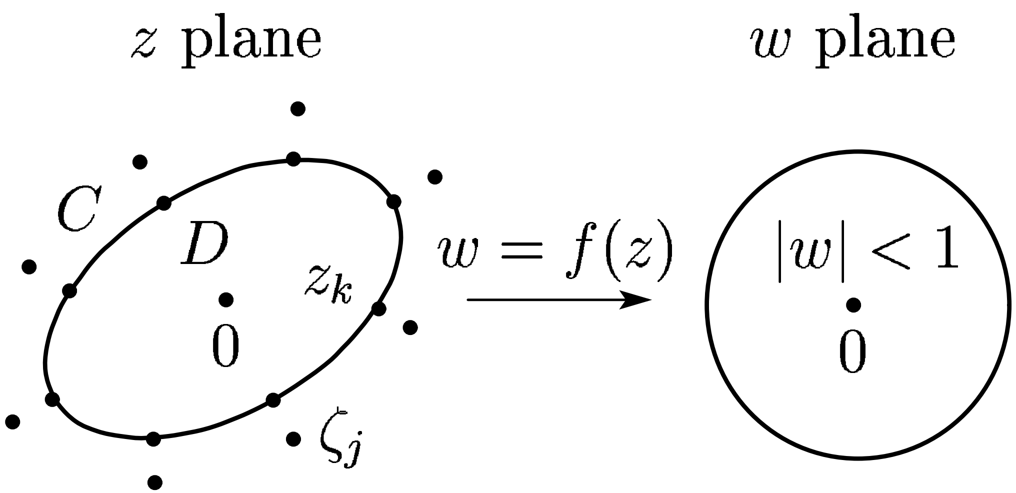
$$f(0) = 0, \quad f'(0) > 0, \quad \text{i.e.,} \quad h(0) = 0,$$

(ii) 境界条件

$$|f(z)| = 1, \quad \text{i.e.,} \quad g(z) = -\log|z| \quad (z \in C).$$

問題はこのような $g(z)$ と $h(z)$ を求めることに帰着する.

代用電荷法の適用



$$g(z) + \mathrm{i}h(z) \simeq G(z) + \mathrm{i}H(z) = \sum_{j=1}^{N} Q_j \log(z - \zeta_j) + \mathrm{i}c$$

条件 $H(0) = 0$ から $c = -\sum_{j=1}^{N} Q_j \arg(-\zeta_j)$ で,

$$G(z) + \mathrm{i}H(z) = \sum_{j=1}^{N} Q_j \left[\log|z - \zeta_j| + \mathrm{i} \arg\left(1 - \frac{z}{\zeta_j}\right) \right].$$

スキーム　近似写像関数を

$$F(z) = z\exp(G(z) + \mathrm{i}H(z))$$

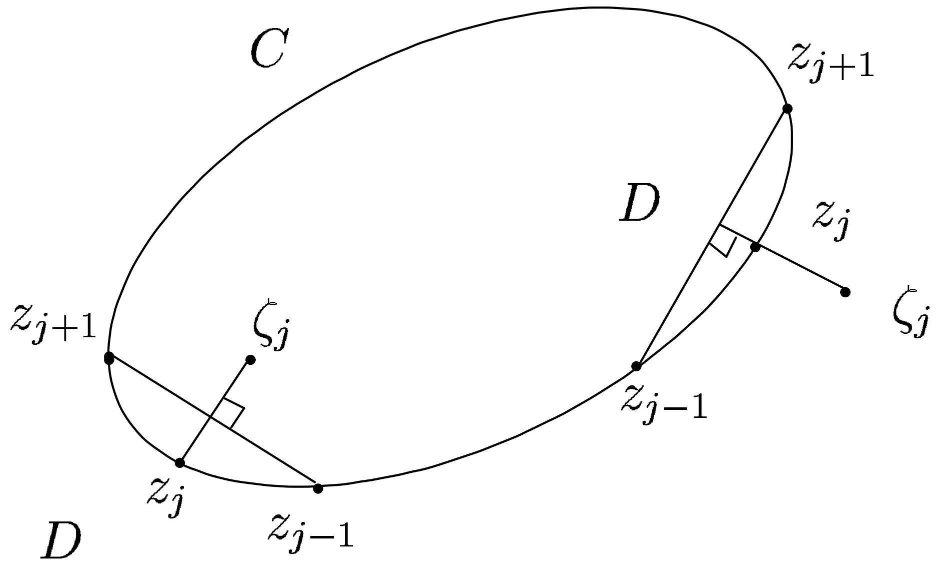
$$G(z) + \mathrm{i}H(z) = \sum_{j=1}^{N} Q_j \left\{ \log|z - \zeta_j| + \mathrm{i}\arg\left(1 - \frac{z}{\zeta_j}\right) \right\}$$

と表現すれば，未定係数 $Q_1, \ldots, Q_N$ は連立 1 次方程式（拘束条件）

$$\sum_{j=1}^{N} Q_j \log|z_k - \zeta_j| = -\log|z_k| \quad (k = 1, \ldots, N)$$

を解いて得られる．

電荷点と拘束点の配置

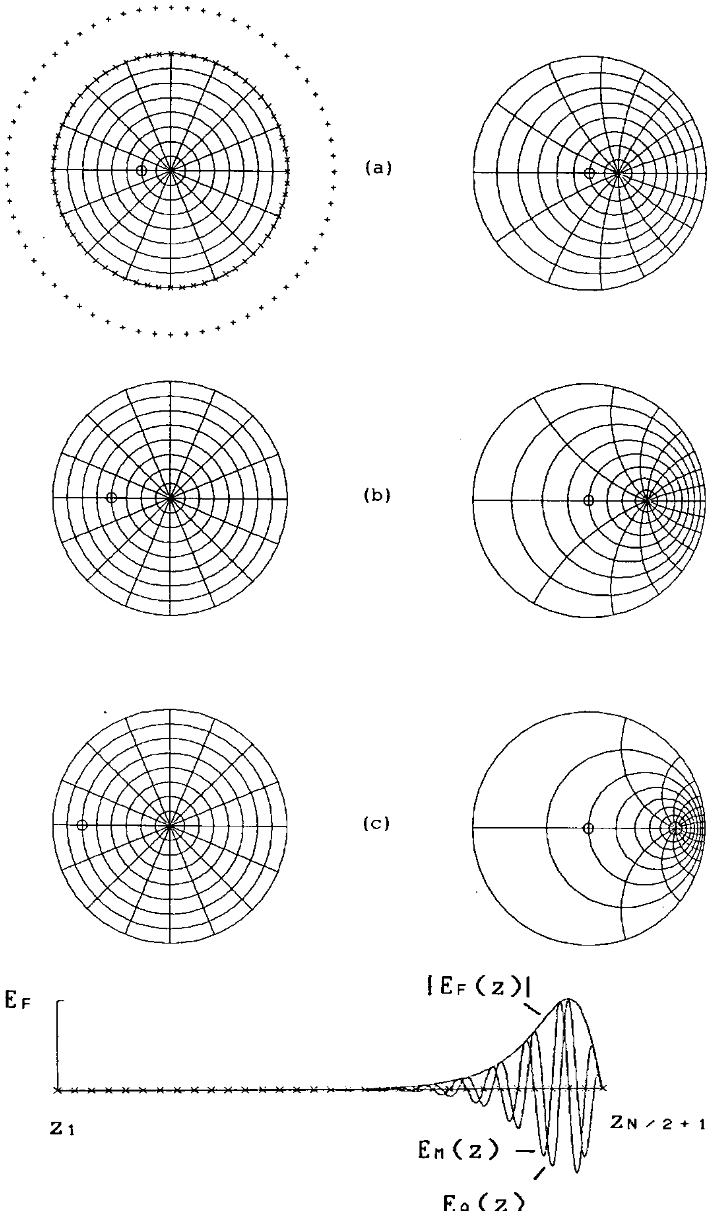


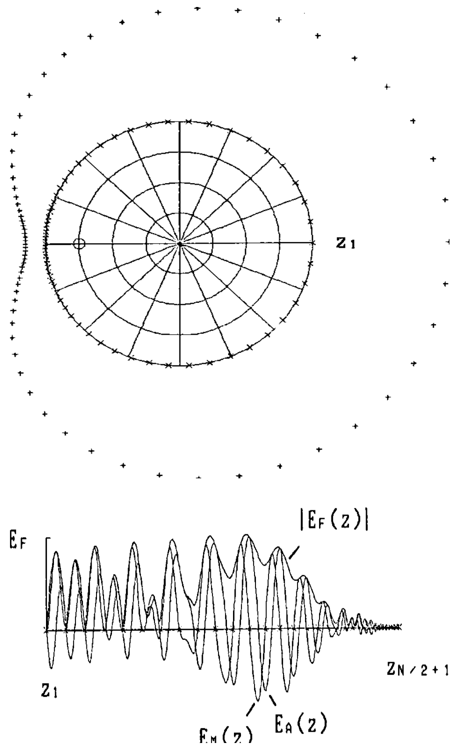
1. 拘束点を C 上に一様配置し,
2. 電荷点を

$$\zeta_j = z_j - \mathrm{i}q(z_{j+1} - z_{j-1}) \quad (j = 1, \ldots, N)$$

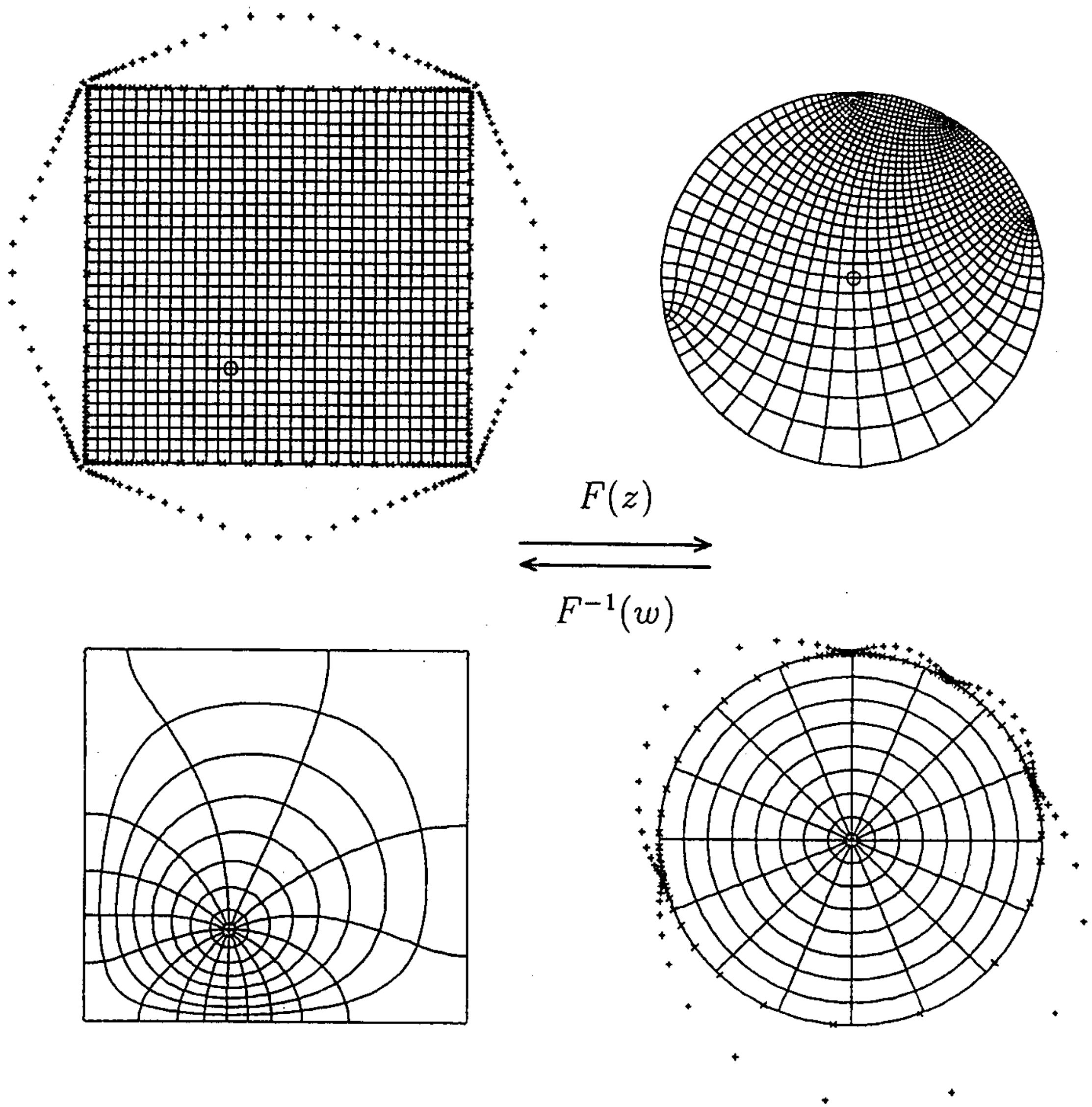
と配置する（$q > 0$ はパラメータ）.

1. 偏心円板



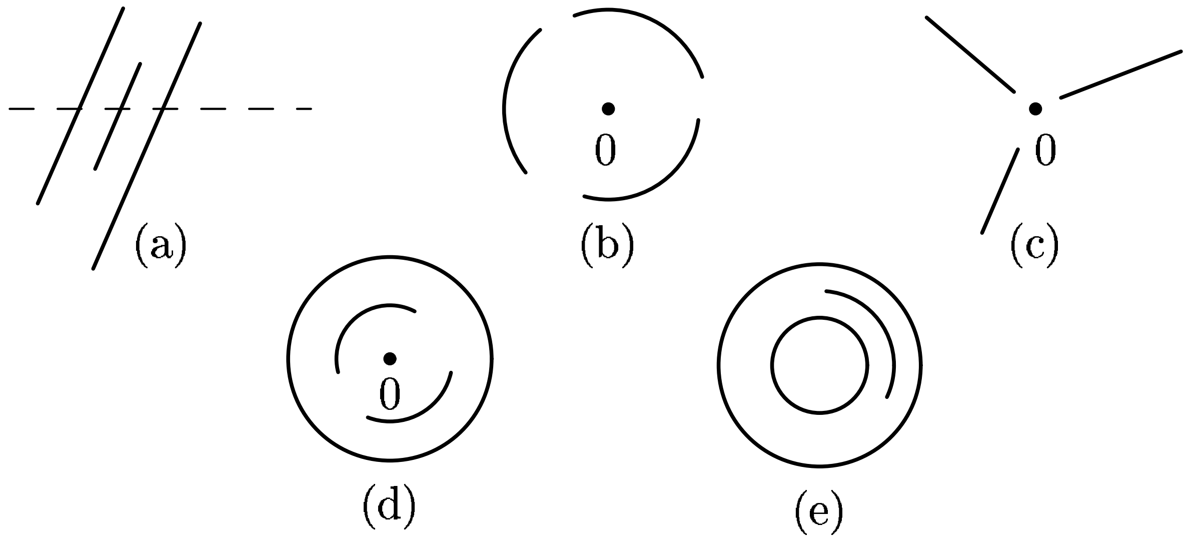


天野：代用電荷法に基づく双方向的な数値等角写像の方法 (情報処理学会誌, 1990)



４．代用電荷法による数値等角写像２

多重度 n と $3(n-2)$ $(n \geq 3)$ 個のモジュラスを保存する．

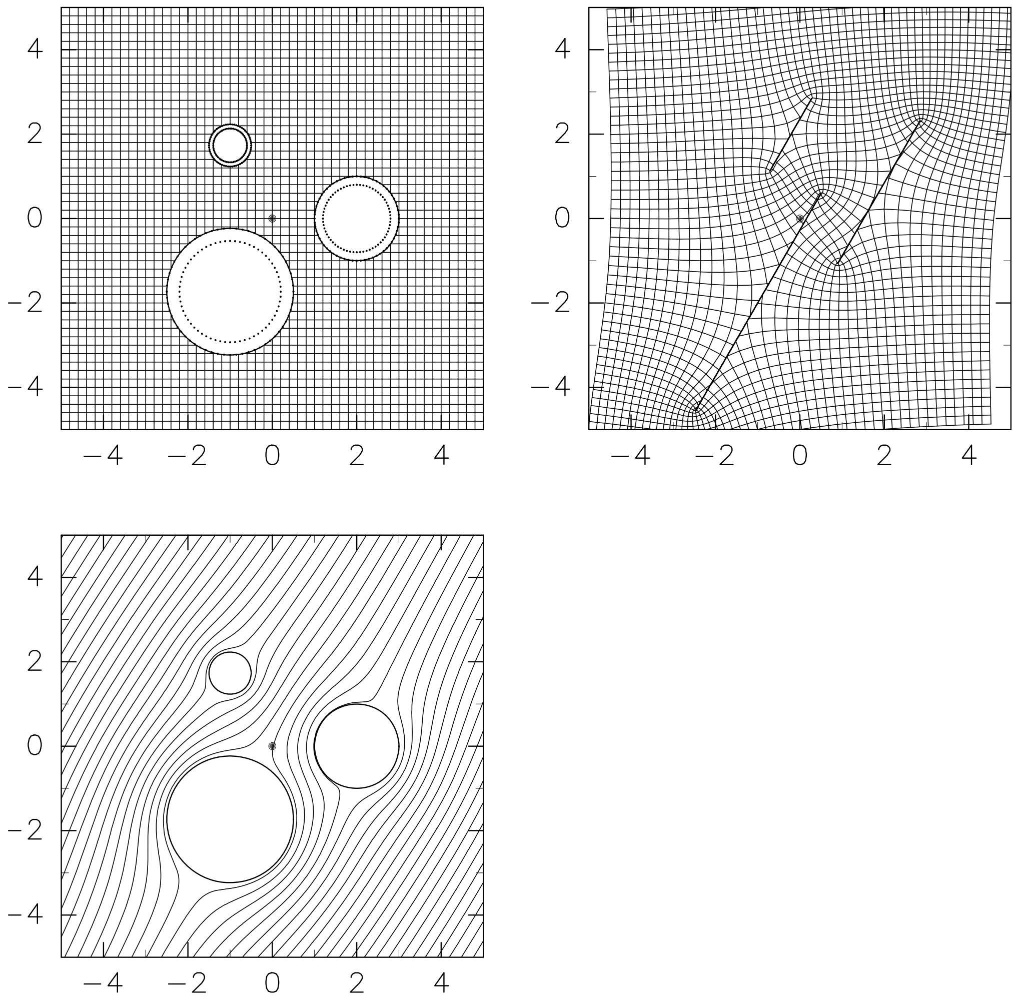


正準スリット領域 (Nehari, McGraw-Hill, 1952)

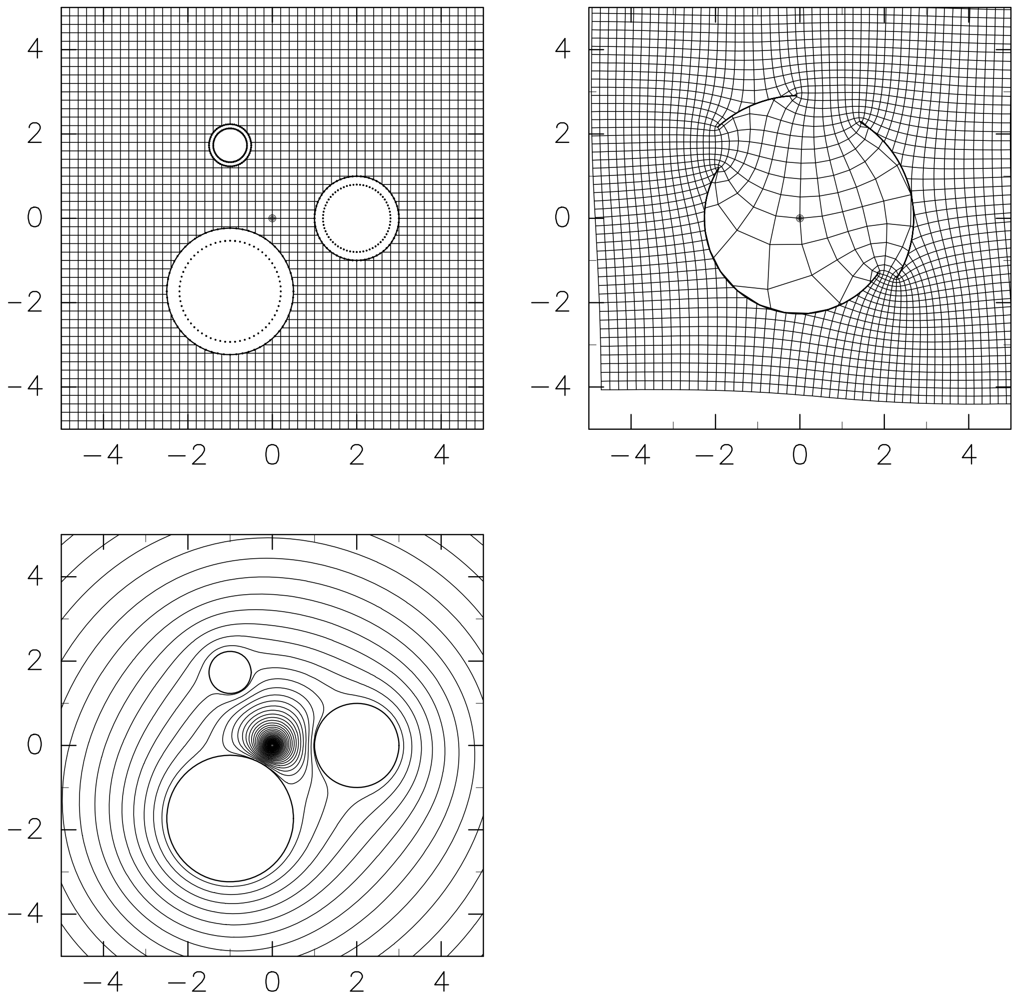
K. Amano: SIAM J. Sci. Comput. (1998)

天野，岡野，緒方，下平，杉原：情報処理学会論文誌 (2001)

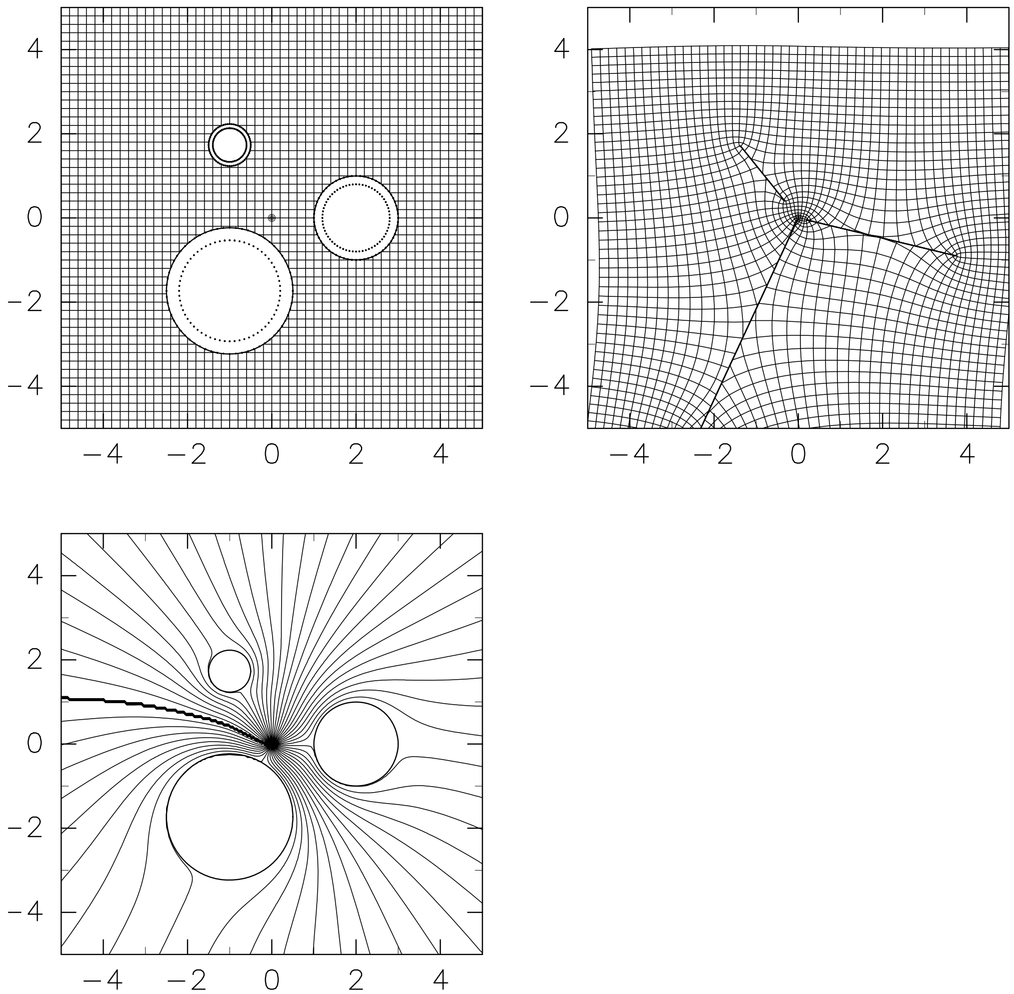
D. Okano, H. Ogata, K. Amano and M. Sugihara: J. Comput. Appl. Math. (2003)



平行スリット領域への数値等角写像 $w = F_\theta(z)$ と一様流 $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F_\theta(z))$ =const $(\theta = \pi/3)$

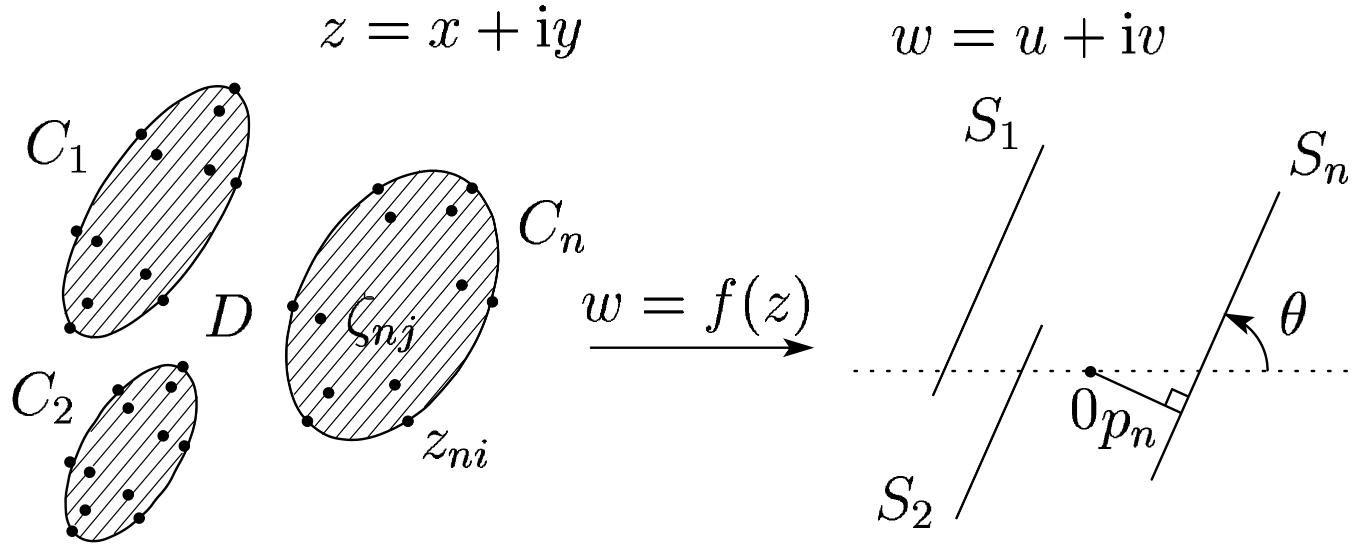


円弧スリット領域への数値等角写像 $w = F_{\mathbf{c}}(z)$ と渦流 $\mathrm{Im}(-\mathrm{i}\log F_{\mathbf{c}}(z)) = -\log|F_{\mathbf{c}}(z)| = \mathrm{const}$



放射スリット領域への数値等角写像 $w = F_{\mathbf{r}}(z)$ と湧出（吸込）流
$\mathrm{Im}\log F_{\mathbf{r}}(z) = \arg F_{\mathbf{r}}(z) = \mathrm{const}$

平行スリット領域への数値等角写像



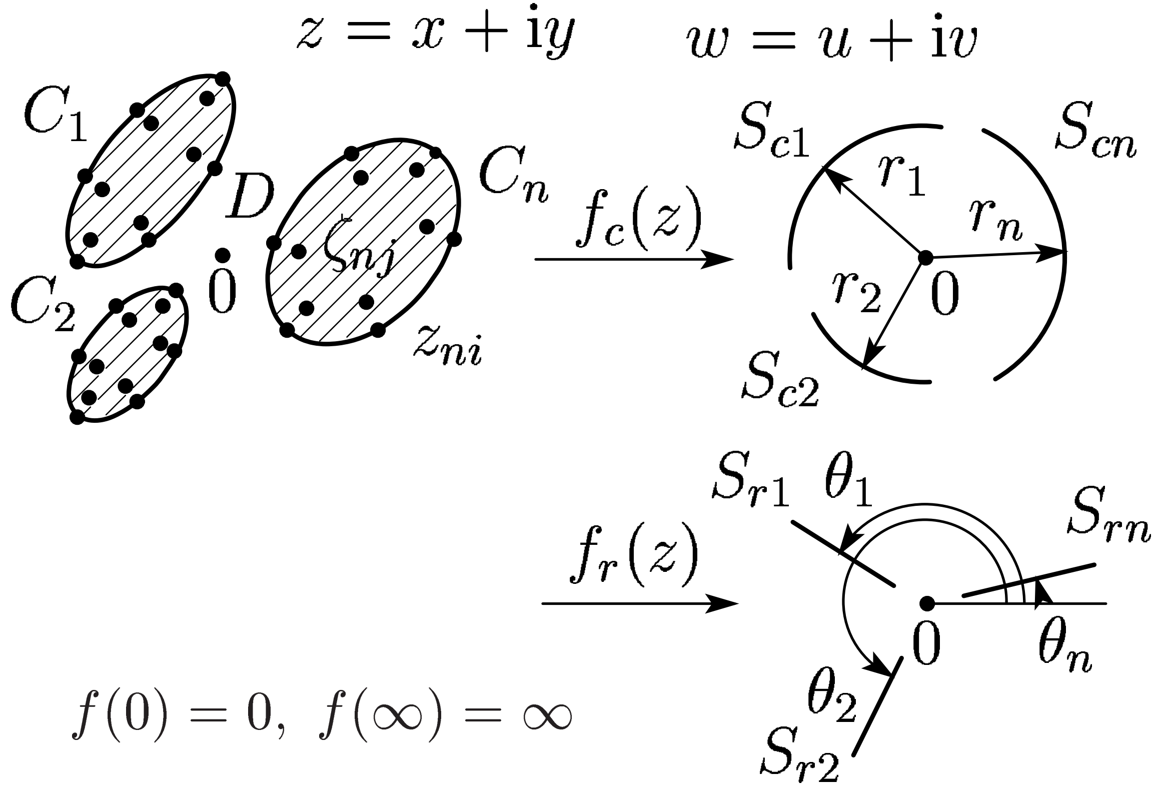
写像定理 1 $\quad f(\infty) = \infty$

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

写像定理 2 $\quad f(v) = \infty \ (|v| < \infty)$

$$f(z) = \frac{1}{z - v} + a_1(z - v) + a_2(z - v)^2 + \cdots$$

円弧，放射スリット領域への数値等角写像



写像定理 1　　$f(0) = 0,\ f(\infty) = \infty$

$$\mathrm{Res}\, f(\infty) = 1, \quad \text{i.e.,} \quad f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots$$

写像定理 2　　$f(0) = 0,\ f(v) = \infty\ (|v| < \infty)$

$$\mathrm{Res}\, f(v) = 1, \quad \text{i.e.,} \quad f(z) = \frac{1}{z - v} + b_0 + b_1(z - v) + \cdots$$

天野，岡野，緒方，下平，杉原：代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法（情報処理学会論文誌，2001）

統一スキーム

平行，円弧，放射スリット領域への等角写像の近似写像関数を

$$\begin{cases} F_{\theta}(z) = z + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(G(z) + \mathrm{i}H(z)) \\ F_{\mathbf{c}}(z) = z\exp(G(z) + \mathrm{i}H(z)) \\ F_{\mathbf{r}}(z) = z\exp(\mathrm{i}(G(z) + \mathrm{i}H(z))) \end{cases},$$

$$G(z) + \mathrm{i}H(z) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}\log\frac{z-\zeta_{lj}}{z-\zeta_{l0}}$$

と表現すれば，未定係数 Q_{lj} はスリットの位置の定数 P_m, R_m, Θ_m とともに連立１次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0 \quad (l = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \left| \frac{z_{mi} - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \right| - \begin{cases} P_m & = -\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} z_{mk}\right) \\ \log R_m & = -\log |z_{mk}| \\ \Theta_m & = -\arg z_{mk} \end{cases}$$

$$(z_{mk} \in C_m,\ i = 1, \ldots, N_m,\ m = 1, \ldots, n)$$

を解いて定まる.

統一的：係数行列が同じ連立１次方程式を解けばよい.

５．直線スリット領域への数値等角写像

from

Numerical Conformal Mappings onto the Linear Slit Domain

SIAM Annual Meeting (2009/07/06-10, Denver)

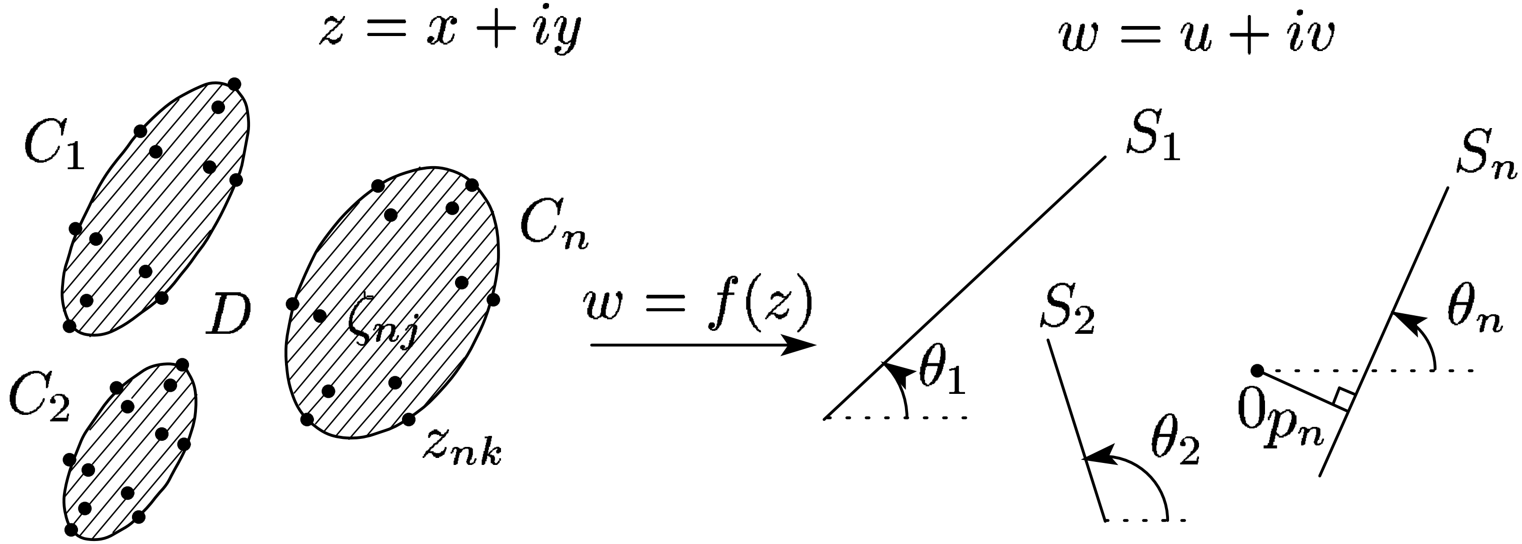
K. Amano[1], D. Okano[1], H. Ogata[2] and M. Sugihara[3]

[1] Ehime University, Japan

[2] University of Electro-Communications, Japan

[3] The University of Tokyo, Japan

Mapping onto the Linear Slit Domain

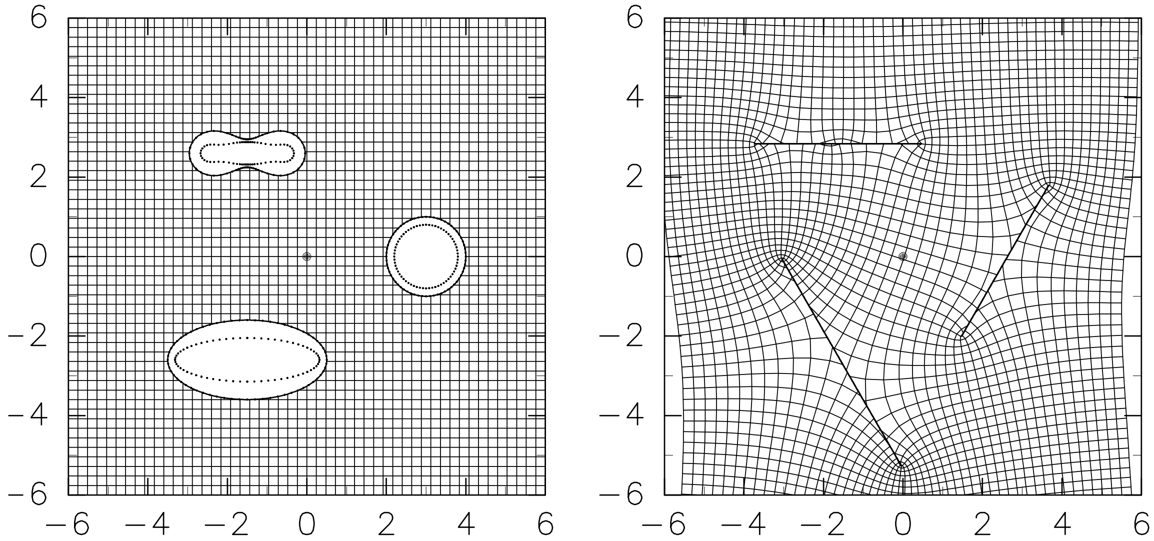


Shiba, M., J. Math. Kyoto. Univ. (1971)

Theorem 1 The mapping function is uniquely determined by

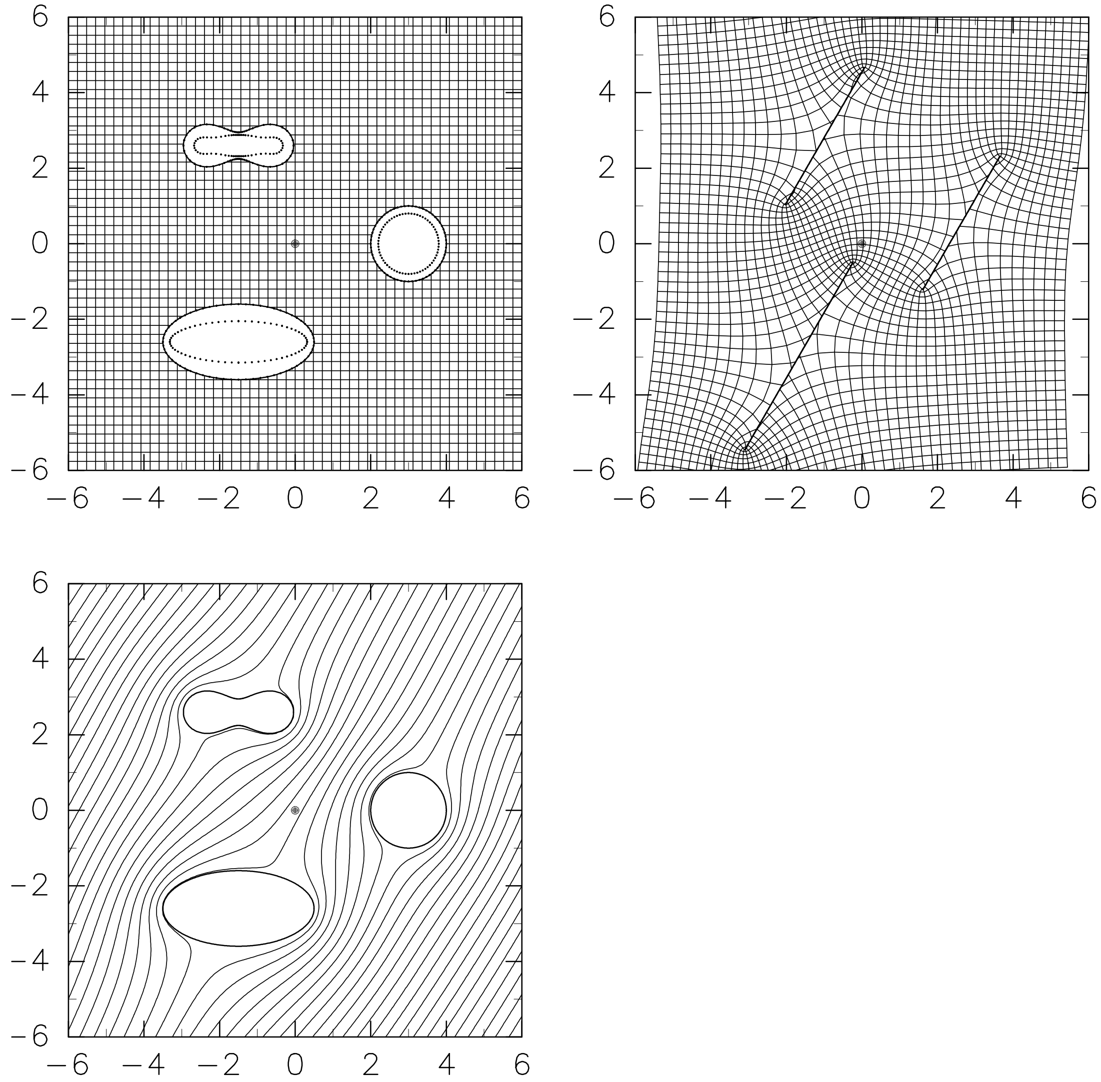
$$f(\infty) = \infty, \quad f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

Example 2a



Numerical conformal mapping $w = F(z)$

Example 2b



Numerical conformal mapping $w = F(z)$ and a uniform potential flow i.e., $\mathrm{Im}(e^{-i\theta}F(z)) = const.$

６．おわりに

代用電荷法による数値等角写像

- 様々な等角写像の問題に簡単に適用できる
- 表現が簡潔で精度の高い近似写像関数を与える

後者は応用上も重要