

3方向に周期的な自己交叉をもたない極小曲面の構成

藤森祥一

福岡教育大学教育学部

2009年2月9日

奈良女子大学 院生企画セミナー I

参考文献

本講演の内容は, Matthias Weber 氏 (Indiana 大学) との共同研究

- Shoichi Fujimori and Matthias Weber, *Triply periodic minimal surfaces bounded by vertical symmetry planes*, to appear in Manuscripta Math. arXiv:0805.3095 [math.DG]

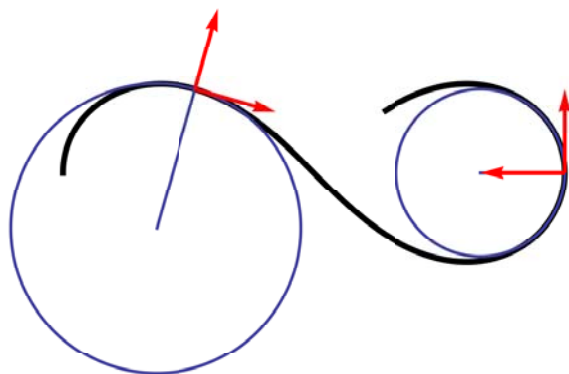
の成果による.

平面曲線の曲率

平面曲線上の1点 p において, 曲線に2次の接触をする円を描く (この円を**曲率円**という). 曲率円の半径を R としたとき, この点における曲線の**曲率** κ は

$$|\kappa| = \frac{1}{R}$$

をみます. 曲率の符号は, 曲線の進行方向に対して曲率円が左側にあるとき**正**, 右側にあるとき**負**とする.

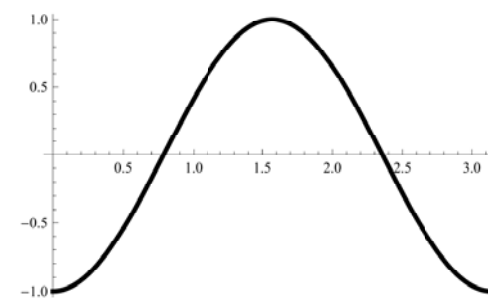
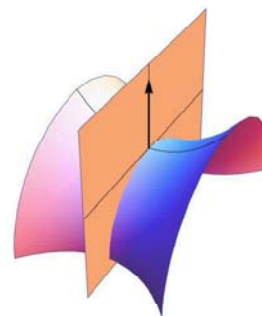


曲面の曲率

曲面上の1点 p において, 法線を含む平面で曲面を切ると, 切り口は平面曲線になる. この平面曲線の曲率を,**法曲率**という. 平面を, 法線を軸として回転させると, それに伴い法曲率も変化する. 法曲率の最大値, 最小値を, 点 p における**主曲率**といい, k_{\max}, k_{\min} で表す.

このとき, 点 p における**Gauss 曲率** K および**平均曲率** H は次で与えられる:

$$K = k_{\max} \cdot k_{\min}, \quad H = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2}.$$

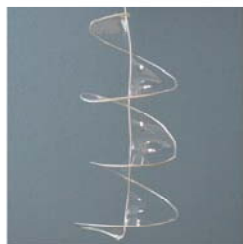


極小曲面

平均曲率が恒等的に消えている曲面を**極小曲面**という。



懸垂面



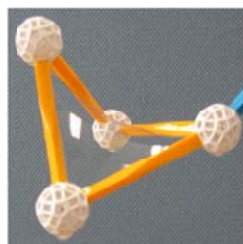
螺旋面



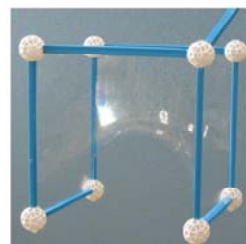
Möbius の帯



Enneper (order 3)



Schwarz D



Meeks superman

極小曲面の歴史

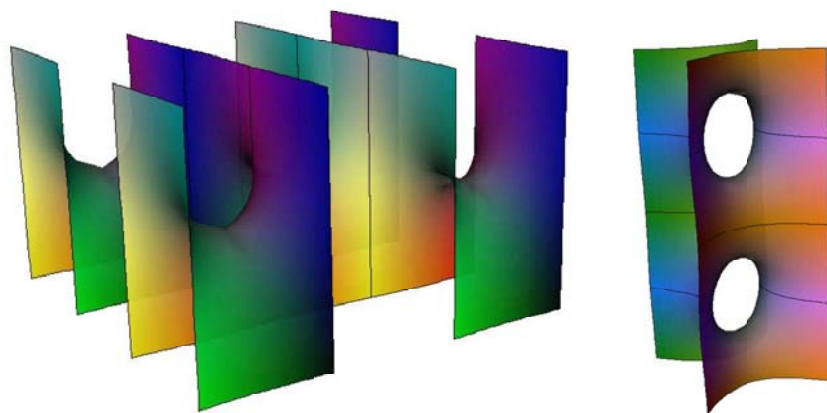
- L. Euler (1744), 懸垂面が極小曲面であることを証明.
- J. Lagrange (1760), グラフ $z = z(x, y)$ で与えられた曲面が極小曲面であることと, z が

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 0.$$

の解になっていることが同値.

- J. Meusnier (1776), 螺旋面が極小曲面であることを証明.
- H. Scherk (1835) 新たな例の発見.

Scherk の極小曲面



Weierstrass の表現公式

$f : D \ni (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ を曲面,
 (x, y) を f の等温座標系 (i.e. $|f_x| = |f_y|, \langle f_x, f_y \rangle = 0$) とする.
 ν を f の単位法ベクトルとすると,

$$f_{xx} + f_{yy} = 2H\nu$$

が成り立つ.

f が極小曲面 \iff 各 f_j ($j = 1, 2, 3$) が調和関数.

注意

このことから, 境界のないコンパクトな極小曲面が存在しないことがわかる.

$z = x + iy$ とおき, $\varphi_j = \frac{\partial f_j}{\partial z} dz$ ($j = 1, 2, 3$) とすると,

f が極小曲面 \iff 各 φ_j ($j = 1, 2, 3$) が正則 1 形式.

φ_j は

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0, \quad |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 > 0$$

をみます.

$$f_z dz = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \text{ であるから, } f = 2\operatorname{Re} \int (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

φ_3 が恒等的に 0 でないと仮定し, $G = -\frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\varphi_3}$, $dh = 2\varphi_3$ とおくと, G は D 上の有理型関数で dh は D 上の正則 1 形式.

$$f = \operatorname{Re} \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} - G \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{G} + G \right), 1 \right) dh.$$

これを **Weierstrass の表現公式** という (K. Weierstrass 1866, R. Osserman 1964).

 f の第一基本形式 ds^2 , 第二基本形式 \mathbb{II} はそれぞれ,

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G} + |G| \right)^2 |dh|^2, \quad \mathbb{II} = -2\operatorname{Re} \frac{dGdh}{G}$$

で与えられる.

$\nu: D \rightarrow S^2$ を f の単位法ベクトル場とし, $\sigma: S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を立体射影とすると,

$$G = \sigma \circ \nu$$

が成り立つ. このことから, 以後, G を f の **Gauss 写像** と呼ぶ.

周期問題

M を Riemann 面とする. G を M 上の有理型関数, dh を M 上の正則 1 形式で, $(|G|^{-1} + |G|)^2 |dh|^2 / 4$ が M 上の完備かつ全曲率有限な Riemann 計量を定めるとする. このとき, M が単連結でなければ,

$$f = \operatorname{Re} \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} - G \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{G} + G \right), 1 \right) dh.$$

は一般に well-defined にならない.

$$\operatorname{Per}(f) := \left\{ \operatorname{Re} \int_{\gamma} (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \gamma \in H_1(M, \mathbb{Z}) \right\}$$

とおく.

周期問題

- ① $\operatorname{Per}(f) = 0$ ならば, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は M 上 well-defined.
- ② $\exists v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ s.t. $\operatorname{Per}(f) \subset \Lambda_1 := \{nv : n \in \mathbb{Z}\}$ ならば, f は v 方向に周期的. f を $\mathbb{R}^3/\Lambda_1 = \mathbb{R}^2 \times S^1$ への写像と見なせば, f は well-defined.
- ③ $\exists v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ (1 次独立) s.t. $\operatorname{Per}(f) \subset \Lambda_2 := \{\sum_{j=1}^2 n_j v_j : n_j \in \mathbb{Z}\}$ ならば, f は v_1, v_2 方向に周期的. f を $\mathbb{R}^3/\Lambda_2 = T^2 \times \mathbb{R}$ への写像と見なせば, f は well-defined.
- ④ $\exists v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ (1 次独立) s.t. $\operatorname{Per}(f) \subset \Lambda_3 := \{\sum_{j=1}^3 n_j v_j : n_j \in \mathbb{Z}\}$ ならば, f は v_1, v_2, v_3 方向に周期的. f を $\mathbb{R}^3/\Lambda_3 = T^3$ への写像と見なせば, f は well-defined.

この, f の well-defined 性を調べる問題を, 極小曲面の**周期問題**という.

定義

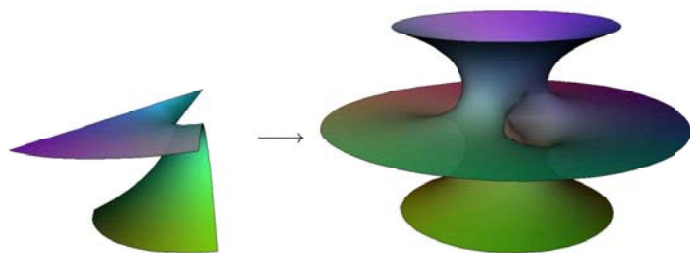
1 の曲面を **AIMS**, 2 の曲面を **SPMS**, 3 の曲面を **DPMS**, 4 の曲面を **TPMS** と呼ぶことにする.

対称性

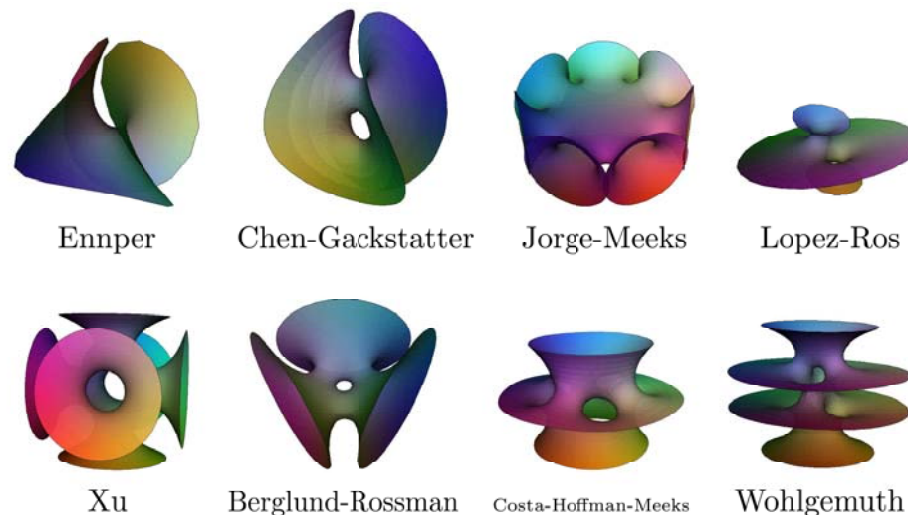
$f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を極小曲面, $c : I \rightarrow M$ を M 上の曲線とする.
 $Q := dGdh/G$ とおく (Q を f の Hopf 微分という). Q は M 上の正則 2 次微分である. Schwarz の鏡像原理を用いると, 次が得られる.

命題

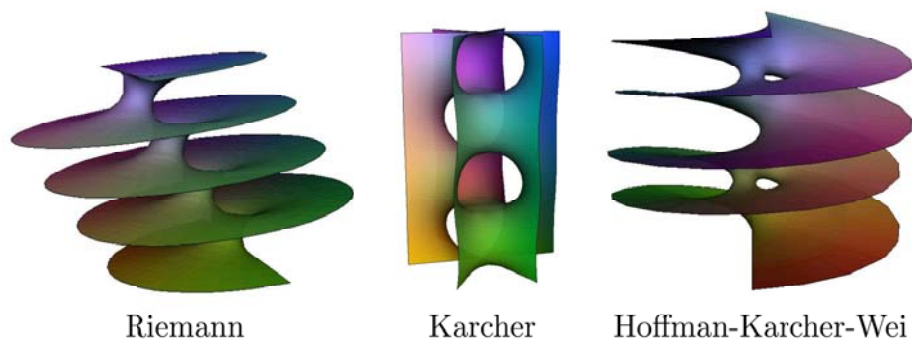
- c が $Q(c', c') \in i\mathbb{R}$ をみたすならば, c の f による像は直線. さらに, $f(M)$ はこの直線に関して対称.
- c が $Q(c', c') \in \mathbb{R}$ をみたすならば, c の f による像は \mathbb{R}^3 のある平面に含まれる. さらに, $f(M)$ はこの平面に関して対称.



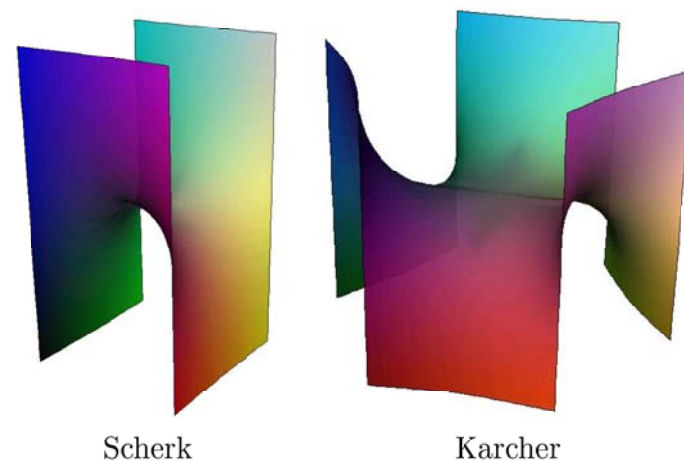
例 (Algebraic Minimal Surfaces)



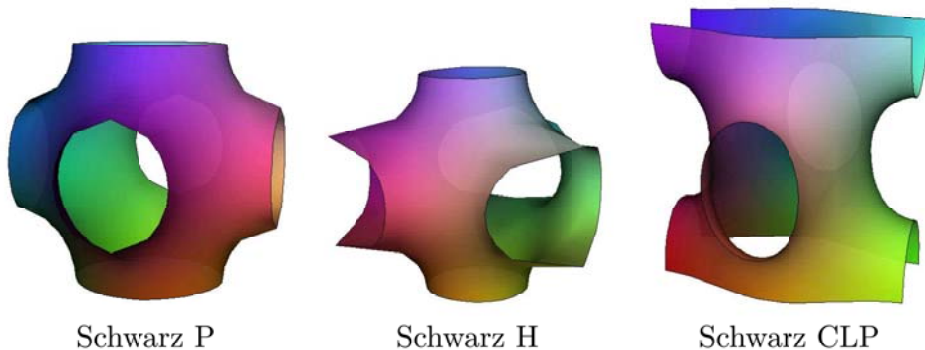
例 (Singly Periodic Minimal Surfaces)



例 (Doubly Periodic Minimal Surfaces)



例 (Triply Periodic Minimal Surfaces)



Schwarz P

Schwarz H

Schwarz CLP

Triply Periodic Minimal Surface (TPMS)

以後, TPMS $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, 完備かつ埋め込まれた極小曲面とする. 周期的な 3 方向を $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ とし,

$$\Lambda = \{n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3 : n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}\}$$

とおく.

TPMS は, 種数 g のコンパクト Riemann 面 M から $T^3 = \mathbb{R}^3/\Lambda$ への極小埋め込みと見なすことができる.

注意

水中の脂質や界面活性剤などの膜は, TPMS によって形成されている (らしい).

種数と Gauss 写像の写像度

M を種数 g のコンパクト Riemann 面, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Lambda$ を TPMS とする. $-Kds^2 = 4|dG|^2/(1+|G|^2)^2$ は, G による $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の Fubini-Study 計量の引き戻しを与えている. よって

$$\int_M (-K)dA = 4\pi \deg(G).$$

一方, Gauss-Bonnet の定理より

$$\int_M (-K)dA = -2\pi\chi(M) = 4\pi(g-1)$$

であるから,

$$\deg(G) = g-1$$

であることがわかる. このことから, 次の命題を得る.

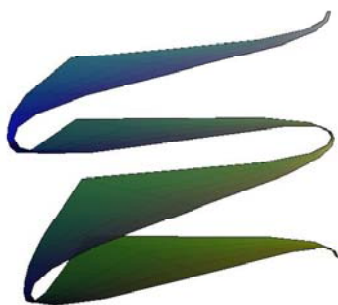
命題

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Lambda$ が平坦でないならば, $g \geq 3$.

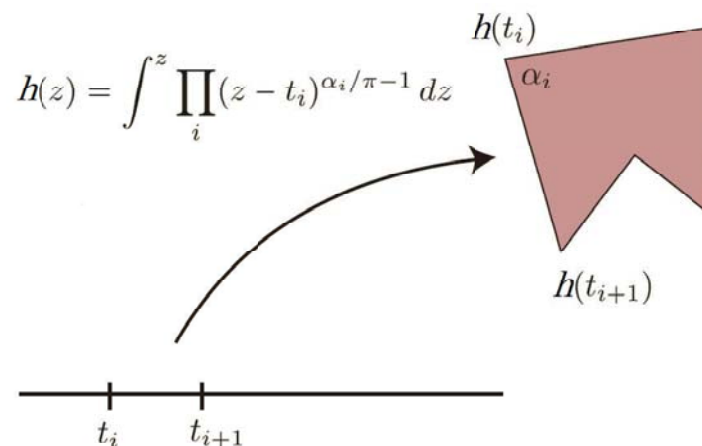
TPMS の歴史

- H. A. Schwarz, E. R. Neovius (1890), 5 種類の例を構成.
- A. Schoen (1970), さらに 12 種類の例を構成.
- H. Karcher (1989), Schoen の曲面の存在を数学的に証明. さらに新しい例を構成.
- M. Traizet (2008), 任意の種数 $g \geq 3$ に対して, TPMS が存在することを証明.

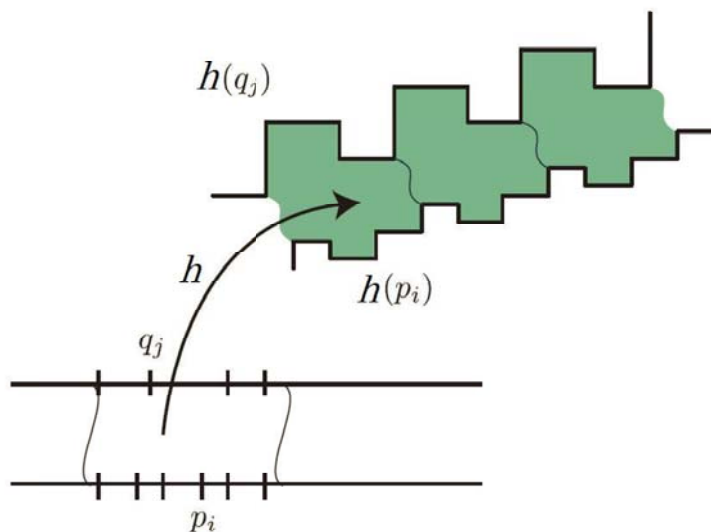
- 1 帯状領域で定義された極小埋め込みで、以下の性質をもつものを構成する:
 - ある垂直な三角柱の中に入っている,
 - 曲面の境界は、この三角柱上にある,
 - 曲面の境界と三角柱は垂直に交わる,
 - x_3 -軸方向に周期的である.
- 2 三角柱の側面に関する鏡映を繰り返す.



上半平面から多角形領域への双正則写像.



帯状領域 Z から、**周期的多角形領域** P への双正則写像.



$P \subset \mathbb{C}$ が**周期的多角形領域**であるとは、 P は単連結、かつ境界は 2 本の折れ線からなり、かつある \mathbb{C} 内の平行移動 $V(z) = z + v$ ($v \neq 0$) に関して不変であり、かつ $P/\langle V \rangle$ はある円環領域と双正則であることをいう。
 P を周期的多角形領域とする。帯状領域 Z を、 $Z = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \text{Im}z < \tau/2\}$ で定める。このとき、 $\exists! \tau \in i\mathbb{R}^+$ s.t. $Z/\langle z \mapsto z + 1 \rangle$ と $P/\langle V \rangle$ は双正則。さらに、双正則写像 $h: Z \rightarrow P$ で、

$$h(z + 1) = V(h(z)).$$

をみたすものが得られる.

定義

$$\vartheta(z) = \vartheta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n+\frac{1}{2})^2 \tau + 2\pi i(n+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})}$$

事実

$$\begin{aligned} \vartheta(-z) &= -\vartheta(z), \\ \vartheta(z+1) &= -\vartheta(z), \\ \vartheta(z+\tau) &= -e^{-\pi i\tau - 2\pi iz} \vartheta(z). \end{aligned}$$

命題

P を周期的多角形領域とする. Z を, P と双正則な帯状領域とする. このとき,

$$h(z) = \int^z \prod_{i=1}^m \vartheta(z - p_i)^{a_i} \cdot \prod_{j=1}^n \vartheta(z - q_j)^{b_j}$$

は Z から P への双正則写像になる.

逆に, 任意の $p_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq m$), $q_j \in \mathbb{R} + \tau/2$ ($1 \leq j \leq n$) と $-1 < a_i, b_j < 1$ s.t. $\sum_{i=1}^m a_i = 0 = \sum_{j=1}^n b_j$ に対して, h は Z をある周期的多角形領域にうつす.

命題 (Weierstrass の表現公式)

$$G(z) = \prod_{i=1}^m \vartheta(z - p_i)^{a_i} \cdot \prod_{j=1}^n \vartheta(z - q_j)^{b_j}, \quad dh = dz$$

とおくと,

$$Z \ni z \mapsto \operatorname{Re} \int^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} - G \right), \frac{i}{2} \left(\frac{i}{G} + iG \right), 1 \right) dz \in \mathbb{R}^3$$

は単連結な極小曲面で, その2つの境界は, 有限個の垂直な平面上にあり, それらの平面に対して曲面は対称である. これらの平面は, 点 $f(p_i)$ において角 πa_i で交わり, 点 $f(q_j)$ において角 πb_j で交わる. さらに, この曲面は x_3 -軸に関する平行移動 $x_3 \mapsto x_3 + 1$ で不変である.

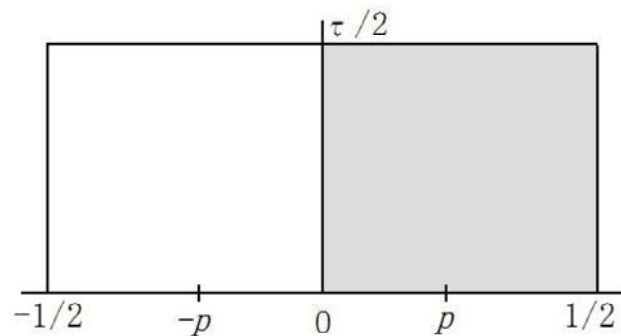
- $m = 2$ and $n = 0$.
- $p_1 = -p$ かつ $p_2 = +p$ と仮定してよい.
- $G = \left(\frac{\vartheta(z-p)}{\vartheta(z+p)} \right)^a$.
- 一方の境界は常に1つの垂直な平面上にある.
- もう一方の境界は, 2つの垂直な平面上にある.
- 曲面は, 垂直な三角柱の中に入っている.

垂直な平面のなす角

命題

$[0, p]$ に対応する平面と, $[0, 1/2] + \tau/2$ に対応する平面のなす角 α_0 は,

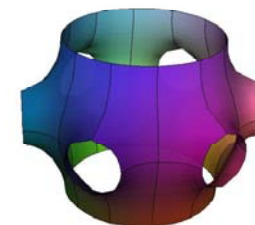
$$\alpha_0 = \pi a(2p - 1).$$



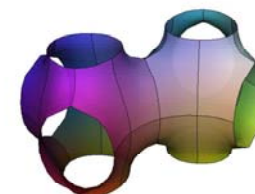
生成された TPMS

Name	(r, s, t)	p	g
Schwarz P	(2,4,4)	1/4	3
Schoen H'-T	(2,6,3)	1/3	4
Schoen II'-T	(2,3,6)	1/6	4
Schwarz H	(3,3,3)	1/4	3
Schoen H''-R	(3,2,6)	1/8	5
Schoen H''-R	(3,6,2)	3/8	5
Schoen S'-S''	(4,4,2)	1/3	4
Schoen S'-S''	(4,2,4)	1/6	4
Schoen T'-R	(6,2,3)	1/5	6
Schoen T'-R	(6,3,2)	3/10	6

$$a = 1 - \frac{1}{r}$$

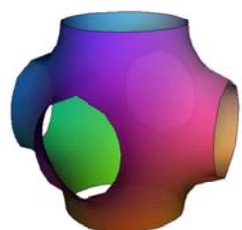


(2,3,6)

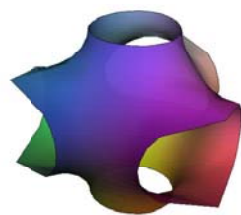


(2,6,3)

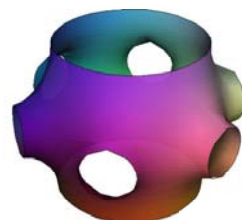
生成された TPMS



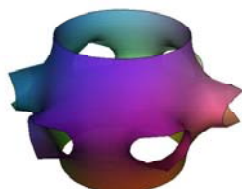
(2,4,4)



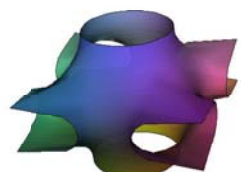
(3,3,3)



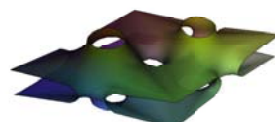
(2,3,6)



(3,2,6)

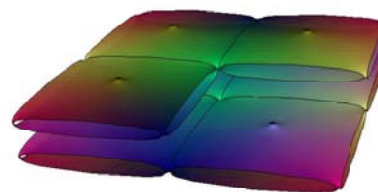


(4,2,4)

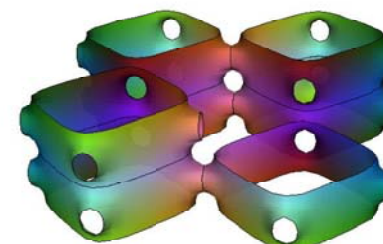


(6,2,3)

極限



$\tau \rightarrow 0$



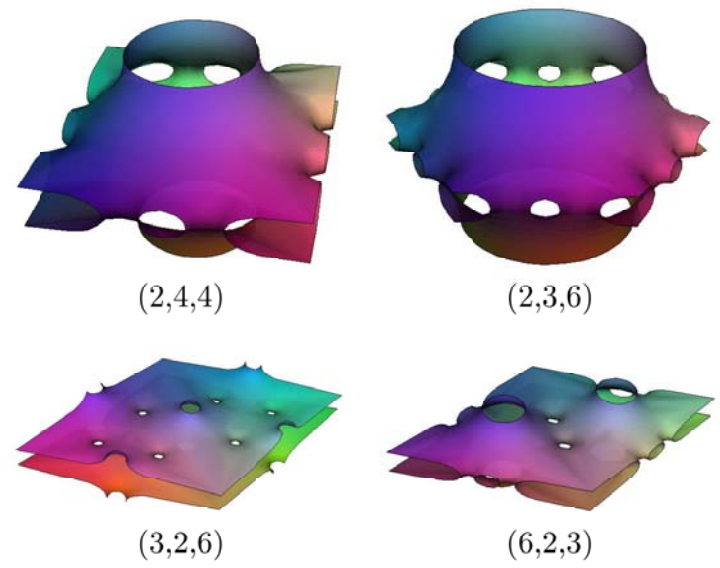
$\tau \rightarrow \infty$

(2,4,4)

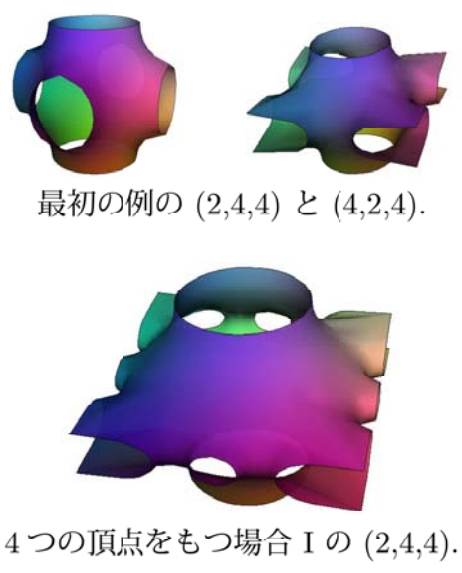
4つの頂点をもつ場合

- 4つの頂点をもつ場合.
- 3つの異なるケースに別れる.
- 虚軸に関する対称性を仮定する.
- 1次元の周期問題.
- 4つの頂点がすべて一方の境界にあるならば, 周期問題は解くことができない.

4つの頂点をもつ場合 I



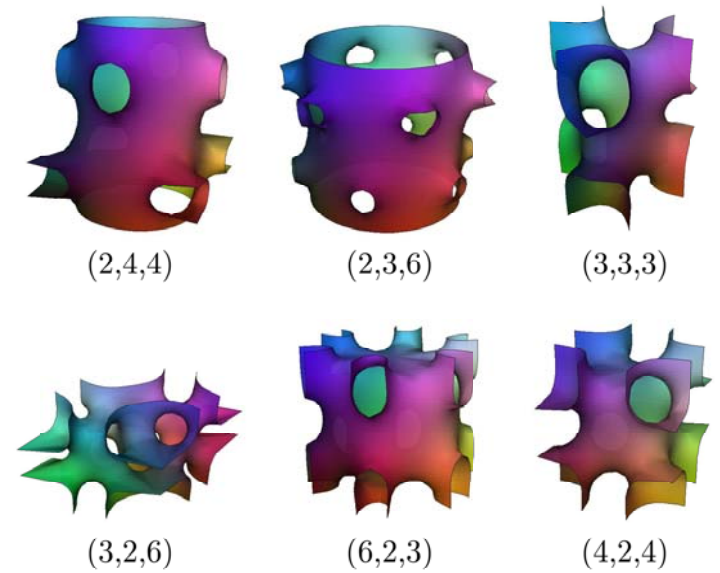
4つの頂点をもつ場合 I



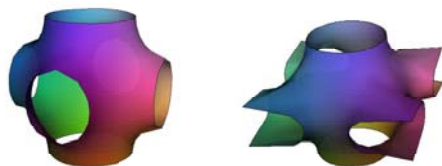
最初の例の (2,4,4) と (4,2,4).

4つの頂点をもつ場合 I の (2,4,4).

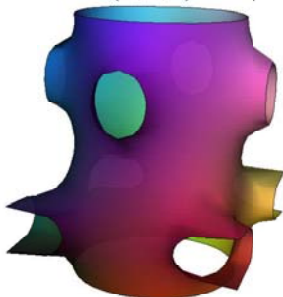
4つの頂点をもつ場合 II



4つの頂点をもつ場合 II



最初の例の (2,4,4) と (4,2,4).



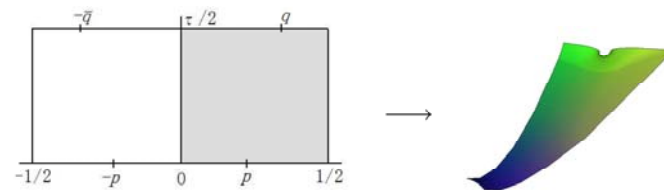
4つの頂点をもつ場合 II の (2,4,4).

I の周期問題

$[0, p]$ に対応する平面と $[\tau/2, q]$ に対応する平面が平行であると仮定すると,

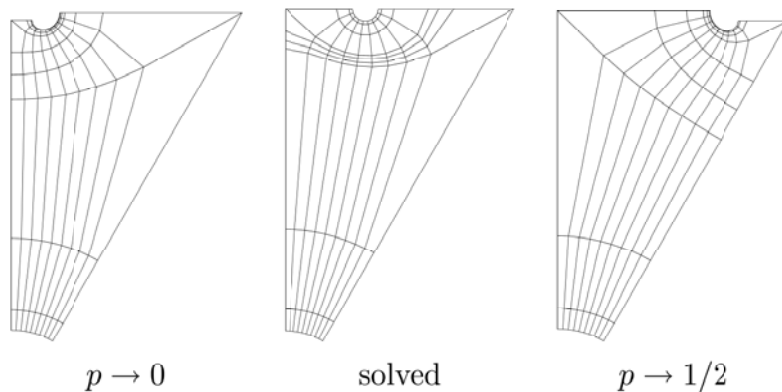
$$a(2p - 1) + b(2\text{Re}(q) - 1) = 1.$$

周期問題は 1 次元になる.



(2,3,6) 曲面の基本領域.

基本領域の x_1x_2 -平面への射影 $F(z)$ を考え、周期問題が解けることと、2つの線分 $F([0, p])$ と $F([\tau/2, q])$ が同一直線上にあることは同値である.



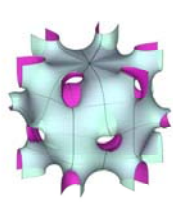
極限 ($p \rightarrow 0, p \rightarrow 1/2$) における 2つの線分の位置関係が具体的に解析できることから、中間値の定理により、周期問題が解けることが証明できる.

6つの頂点をもつ場合

- 6つの頂点をもつ場合.
- より多くの場合分けが必要.
- 虚軸に関する対称性を仮定.
- 周期問題は 2 次元.
- いくつかの場合に、数値計算によって例を構成.



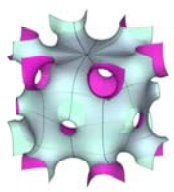
(2,4,4)



(2,3,6)



(3,3,3)



(3,2,6)



(6,2,3)



(4,2,4)