

ヤン-ミルズ理論における クォーク閉じ込めと質量ギャップ問題

近 藤 慶 一

千葉大学 大学院理学研究科 基盤理学専攻

物理学コース 素粒子論研究室

院生企画 세미나

Part I: 現代の素粒子論の到達点とクォーク閉じ込め

Part II: クォーク閉じ込めに関する最近の発展

要旨：

「クォークの閉じ込め」は、現代の素粒子物理学における未解決の重要問題のひとつである。クォークは、1960年代に物質の究極的構成要素としてゲルマンによって導入された。しかし、電子とは対照的に、クォークは現在まで単独で取り出されたことはなく、原子核の中にいわば「閉じ込め」られている。

クォークの閉じ込めを説明することのできる有力なシナリオとして、1970年代に南部, 't Hooft, Mandelstam 達によって双対超伝導描像が提唱されている。この描像は、直感的に理解しやすく、それをサポートする数値シミュレーションの証拠も特に1990年以降に数多く蓄積されたが、完全に理論的な説明には成功していない。

本講演では、現在の素粒子論の到達点とクォーク閉じ込めの意味から始め、双対超伝導描像に関して従来得られた成果を要約すると同時にそれらの問題点を指摘し、今世紀に入って得られた重要な進展を紹介する。

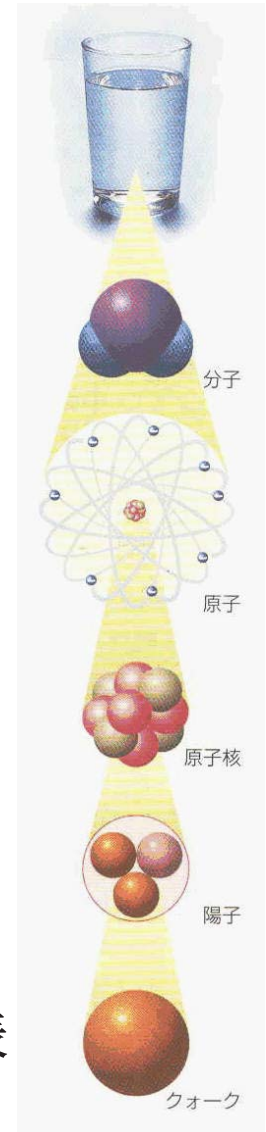
クォークの閉じ込めは、米国クレイ数学研究所が2000年に提出したミレニアム懸賞問題のひとつである「ヤン-ミルズ理論における質量ギャップの存在」の問題とも密接な関係にある。

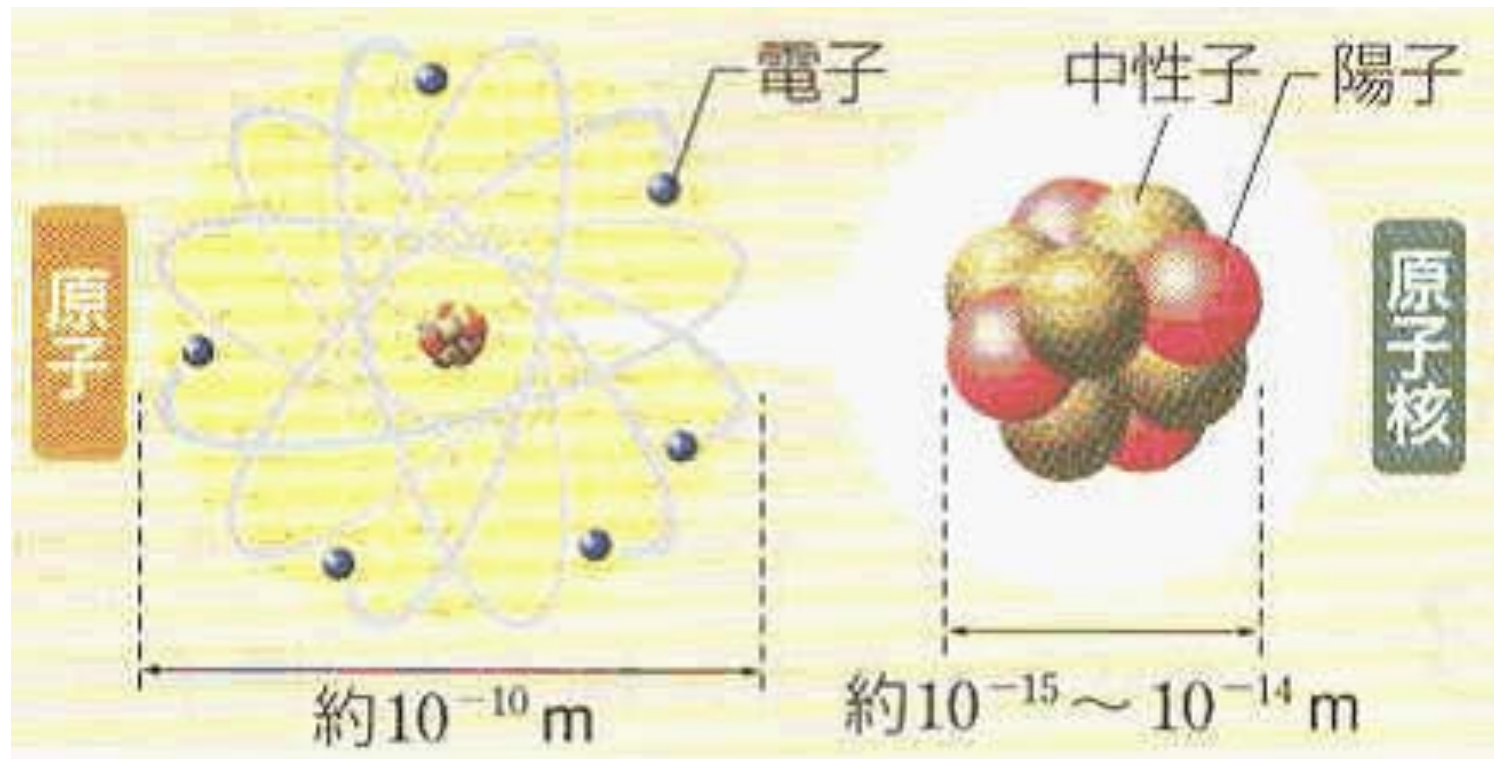
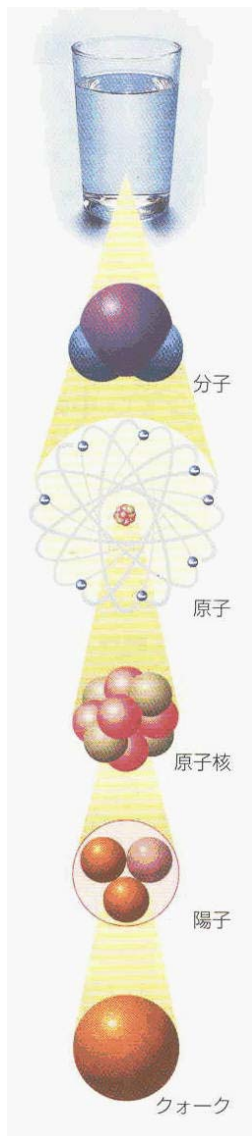
Part I
Chapter 1:

現代の素粒子論の到達点

§ 素粒子探求の歴史

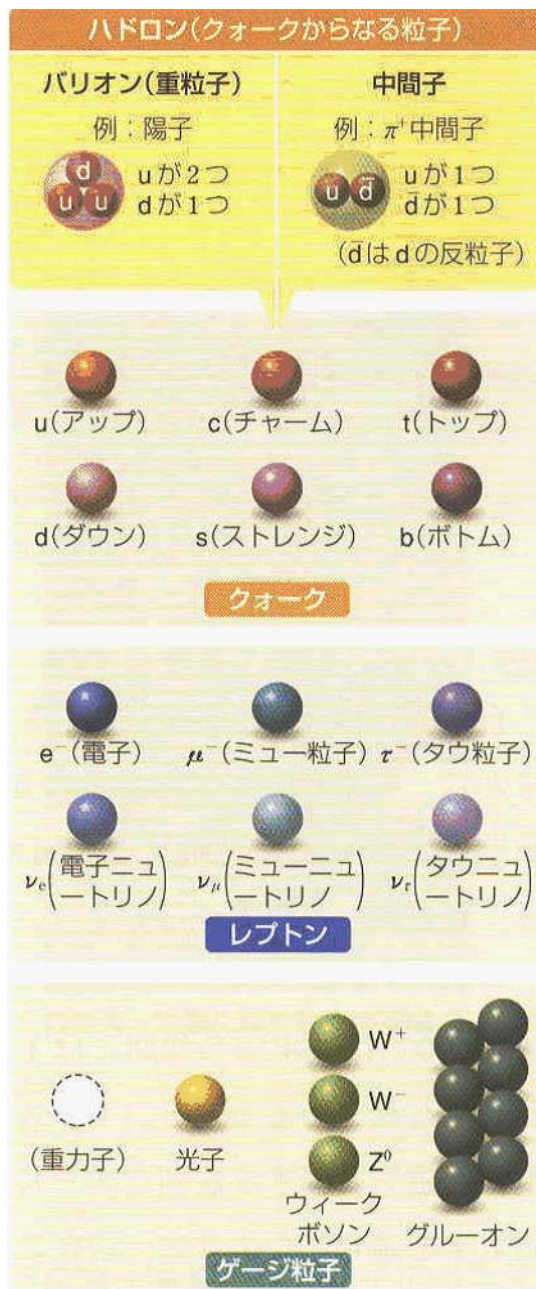
- B.C.400頃 デモクリトス(ギリシャ) 原子論を提唱
：
- 1803 ドルトン(イギリス) 原子説を提唱:
元素を作っている粒子をデモクリトスの呼び方にしたがって
「アトム(原子)」と名づけた。
- 1897 J.J. トムソン(イギリス) **電子**の存在を確認
- 1904 長岡半太郎(日本) 原子の土星型模型を提唱
- 1911 ラザフォード(イギリス) **原子核**の存在を確認
- 1913 ボーア(デンマーク) ボーアの原子模型を提唱
- 1920 ラザフォード(イギリス) **陽子**の存在を確認
- 1932 チャドウィック(イギリス) **中性子**を発見
- 1954* ヤンとミルズ(アメリカ) 非アーベル型ゲージ理論を発表
- 1964* ゲルマン(アメリカ) **クォーク**模型(理論)を発表
- 1973* グロス, ウルチェックとポリツァー(アメリカ) 漸近自由性を発見





現在では，素粒子は次のように分類されている。

素粒子＝ 物質粒子 ＋ 力の媒介粒子



力の種類	重力(万有引力)	電磁気力	強い力	弱い力
具体例	太陽と地球の間にはたらく力 地球と地球上の物体にはたらく力	原子核に電子を結びつけ原子をつくる力 γ 線の放出に関係する力 化学反応を起こす力	核力 原子核をつくるものになる力 α 崩壊を司る力 クォーク間にはたらく力	β 崩壊を司る力 中性子や μ 粒子などの寿命を決める力
相対的強さ	10^{-38}	10^{-2}	1	10^{-5}
到達距離	無限大	無限大	10^{-15}m	10^{-17}m
力の源	質量	電荷	しきか 色荷	じゃくが 弱荷
力を媒介するゲージ粒子	グラビトン (重力子)(未発見)	フォトン (光子)	グルーオン (膠着子)	ウィークボソン (W [±] 粒子, Z ⁰ 粒子)

重力と電磁気力の強さの比較には、2つの陽子間にはたらく力を用いた。

$$\text{素粒子} \begin{cases} \text{物質粒子} & \dots \text{クォーク } q, \text{ レプトン } \ell \\ \text{力の媒介粒子} & \dots \text{ゲージ粒子 } g \end{cases} \quad (1)$$

⊙ 物質粒子

物質粒子	電荷	第1世代	第2世代	第3世代
quark(q)	$+\frac{2}{3}e$	$u(350)$	$c(1500)$	$t(175000)$
	$-\frac{1}{3}e$	$d(350)$	$s(500)$	$b(4500)$
lepton(ℓ)	0	$\nu_e(< 10\text{eV})$	$\nu_\mu(< 0.17)$	$\nu_\tau(< 24)$
	$-e$	$e^-(0.51)$	$\mu^-(106)$	$\tau^-(1784)$

●レプトン: 電子とニュートリノの仲間 (電荷は $-e$ or 0)

●クォーク: クォーク模型 (クォークは分数電荷を持つ)

バリオン (重粒子), 例えば, 核子 (陽子 p , 中性子 n) はクォーク3個から作られている.

$$p \sim uud, \quad n \sim udd \quad (2)$$

メソン (中間子) はクォーク1つと反クォーク1つから成り立っている

$$\pi^+ \sim u\bar{d}, \quad \pi^- \sim d\bar{u}, \quad \pi^0 \sim u\bar{u} \quad \text{or} \quad d\bar{d} \quad (3)$$

クォーク模型を提唱したのは、Murray Gell-Mann (1929–) [Paper: A SCHEMATIC MODEL OF BARYONS AND MESONS, Phys.Lett. **8**, 214-215 (1964).]



◎ 力の媒介粒子（ゲージ粒子）：二つの物質粒子間の力（相互作用）はゲージ粒子の放出・吸収によって媒介される．例えば，電磁力 フォトン；強い力 グルーオン

力の種類	電磁力	弱い力	強い力	重力
力の源	電荷 electric charge	弱荷 weak charge	色荷 color charge	質量 mass
到達距離	∞	10^{-18}m	10^{-15}m	∞
ポテンシャル	$\frac{C}{r}$	$\frac{C_3}{r} \exp(-m_W r)$	$C_1 \frac{1}{r} + C_2 r$	$\frac{C'}{r}$
典型的強さ	$\frac{1}{137}$	10^{-5}	~ 0.1	10^{-39}
媒介粒子の名称	フォトン (γ)	ウィークボソン ($W^\pm, Z^0$)	グルーオン (G)	グラビトン
媒介粒子の質量	0	$m_W \sim 100\text{GeV}$	$\sim 1\text{GeV}(?)$	0
媒介粒子のスピン	1	1	1	2
古典理論	電磁気学	なし	なし	一般相対論
ゲージ群	$U(1)_{\text{EM}}$	$SU(2)_L \times U(1)_Y$	$SU(3)_C$	Poincaré群
量子理論	QED	電弱統一理論		未完成
	GWS (Glashow-Weinberg-Salam)		QCD	M理論？

ゲージ粒子は，Yang-Mills理論，つまり，非アーベル型ゲージ理論で記述される．Yang-Mills理論は，電磁気のMaxwell理論の拡張である．

非アーベル型ゲージ理論を発表したのは、Chen Ning Yang(1922-) と Robert L. Mills (1927-1999) [Paper: C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191-195 (1954).]



Part I
Chapter 2:

クォークの閉じ込めとは？

§ クォークの閉じ込めとは何か

電子は単独で取り出されている。素電荷を持つ。

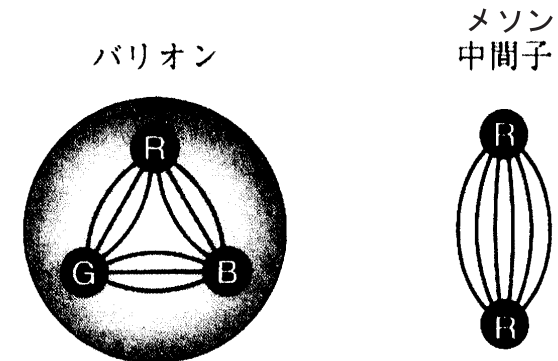
では、クォークはどうか？

物質の基本的構成粒子であるクォークは、未だ単独では見つからない。

← 実験家の努力不足？ そもそもクォークは無い？

バリオン（重粒子） $B = qqq$,

メソン（中間子） $M = q\bar{q}$



強い力の媒介粒子であるグルーオンも未だ単独では見つからない。

（クォーク、グルーオンの存在は、ジェットという形では確認されているが。）

→ 強い力に特有の、単独では取り出せない原理的理由があるのではないか。

これらを理論的に説明できるか？これを「閉じ込め問題」という。

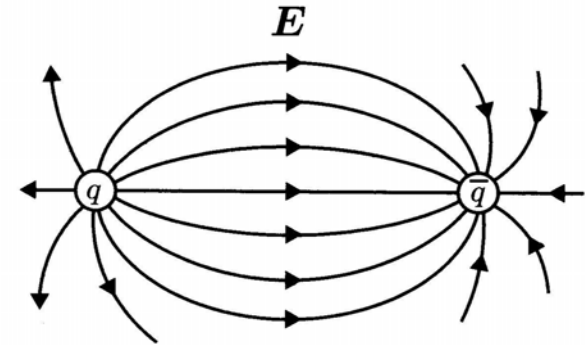
§ 電磁力と強い力の違いは何か？

クォークと反クォーク間には，どういう力がどのように働くのか？

クォークは，普通の電荷（ただし，分数電荷）を持っているので，電磁相互作用をする。電磁相互作用は仮想的フォトンによって媒介される。

電荷間にはクーロンポテンシャルが働く．

$$V(r) = -C\alpha/r \implies F(r) = -\frac{d}{dr}V(r) = -C\alpha/r^2$$



QEDでは、電荷の遮蔽により、遠距離では電氣的力は弱くなる。



Figure 1: (左) 遮蔽 (Maxwell理論) と (右) 反遮蔽 (Yang-Mills理論)。

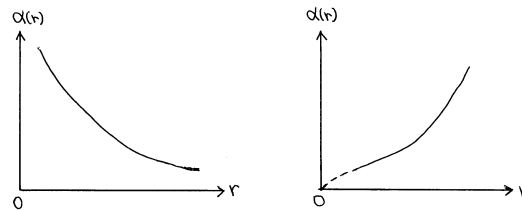


Figure 2: 有効 (走る) 結合定数 $\alpha(r)$: (左) 非漸近自由 (右) 漸近自由。

Yang-Mills理論では、結合定数が(紫外)漸近自由性を示す。つまり、短距離(高エネルギー)では、強い相互作用は次第に弱くなる。よって、短距離つまり高エネルギーでは、クォークはほとんど相互作用しなくなる。[Feynmanのパートンに一致] 短距離つまり高エネルギーでは、摂動論が有効になる。

一方、長距離(低エネルギー)では、ますます強くなる。[グルーオンの自己相互作用による] さらに、...

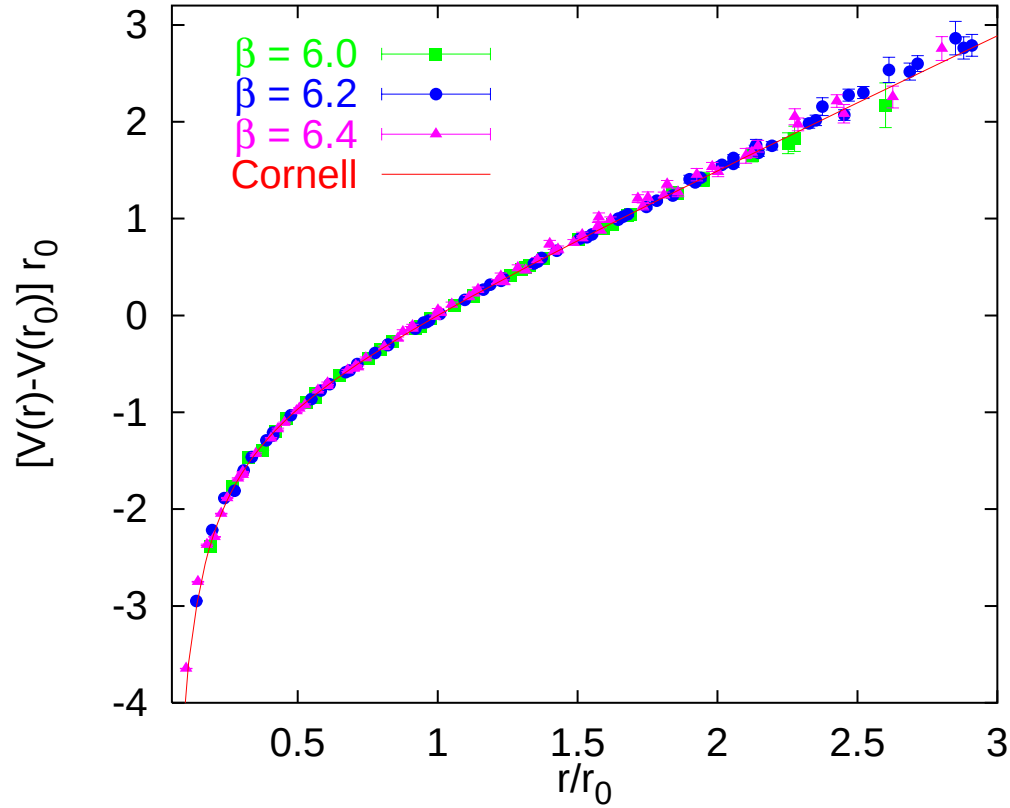


Figure 3: $SU(3)$ Yang-Mills理論において、クォークと反クォーク間に働くポテンシャル V を両者の距離 r の関係を格子ゲージ理論でシミュレーションした計算結果. $V(r_0) = 0$ に規格化されている. G.S. Bali, [hep-ph/0001312], Phys. Rept. **343**, 1–136 (2001). ただし, $SU(N)$ に対して, $\beta = 2N/g^2$.

$$V(r) = -C \frac{\alpha(r)}{r} + \sigma r \implies F(r) = -\frac{d}{dr} V(r) = -C \frac{\alpha(r)}{r^2} - \sigma + \dots \quad (1)$$

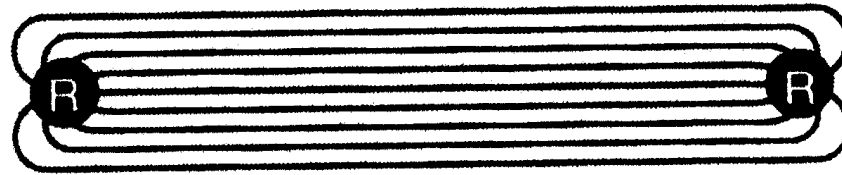
クォークは、カラー電荷を持っていて、強い相互作用をする。強い相互作用は、グルーオン（膠粒子）によって媒介される。強い力はカラー電荷間に働く。（原子核の中では、こちらが支配的。）

クォークと反クォーク間の距離が大きくなると、線形ポテンシャルが働く。

$$V(r) \cong \sigma r \implies F(r) = -\frac{d}{dr}V(r) = -\sigma \quad (\sigma: \text{弦定数})$$

色 力 線

超伝導

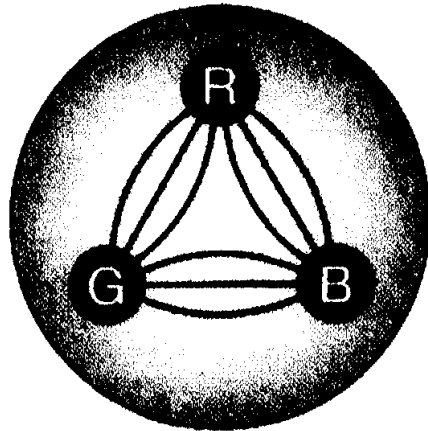


強い力は、ある種の弦理論で記述できる !?

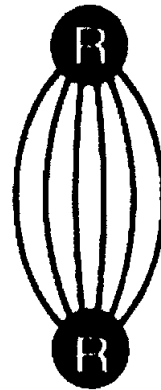
Hadron 弦, 閉じ込め弦, QCD 弦,... と呼ばれる.

カラーは3色 (R,G,B) であると考えられる.

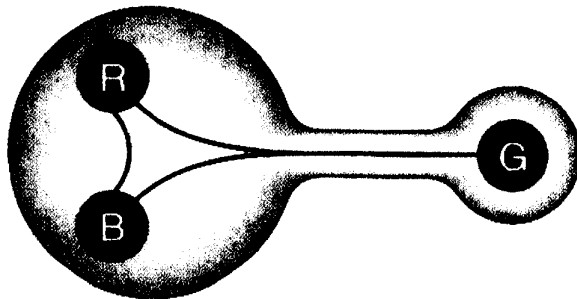
バリオン



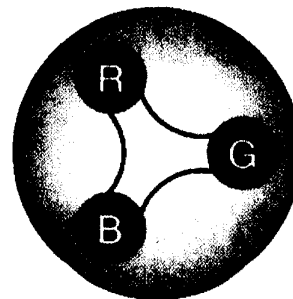
中間子



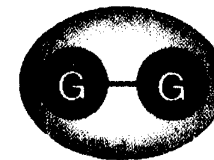
バリオン



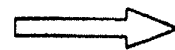
バリオン



中間子



バリオンからクォークGを
引き離そうとする



ひもが切れてクォーク対の
中間子ができる

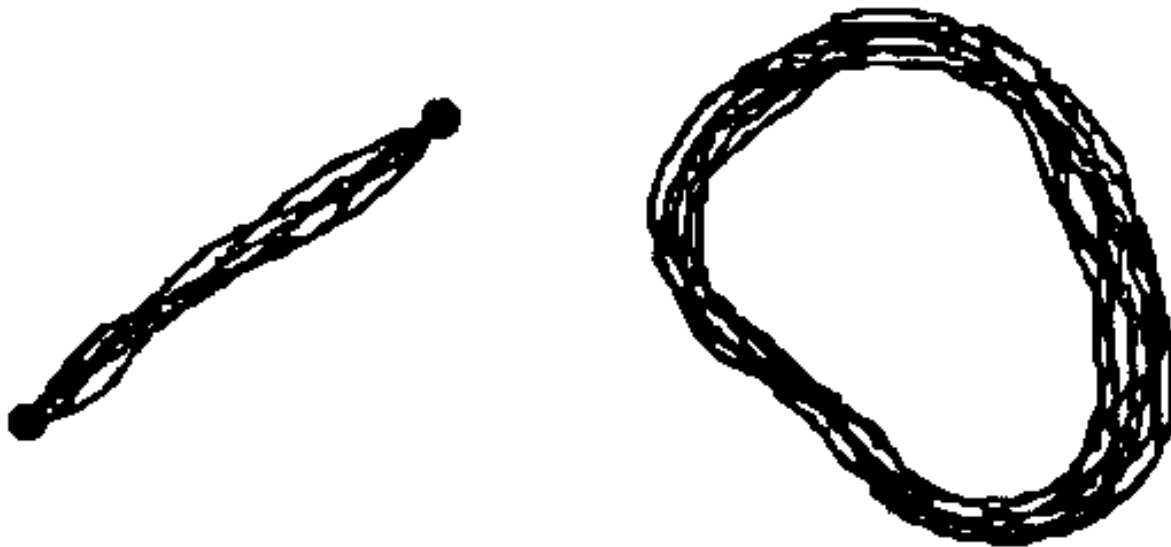
「カラーの閉じ込め」閉じ込めによってカラーは観測できない。

観測されるのは、カラー回転に対して不変な物理量 (カラーシングレット) のみ

グルーオンは、両端にクォークと反クォークを持つ、開いた弦を作る。

グルーオンは自分自身とも相互作用するので、グルーオンはそれ自体で（カラーシングレットな）閉じた弦をつくる。グルーボール

グルーオンはカラーを持つのでそれだけで、強い相互作用をするグルーオン力学 (Gluodynamics). これは、フォトンとは大きく異なる.



群の表現論を少し：

クォーク q : SU(3) の基本表現 3

反クォーク $\bar{q}$: SU(3) の共役表現 3^*

グルーオン G : SU(3) の随伴表現 8

メソン： $M = \bar{q}_a q^a$

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1 = 3^* \otimes 3 \quad (2)$$

$$3 \otimes 3 = 6_S \oplus 3_A^* \quad (3)$$

バリオン： $B = \epsilon^{abc} q^a q^b q^c$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10_S \oplus 8_{MS} \oplus 8_{MS} \oplus 1_A \quad (4)$$

グルーボール： GG, GGG

$$8 \otimes 8 = 1_S \oplus 8_S \oplus 8_A \oplus 10_A \oplus 10_A^* \oplus 27_S \quad (5)$$

$$8 \otimes 8 \otimes 8 = 8 \otimes (8 \otimes 8) = 1 \oplus \dots \quad (6)$$

観測されるのはカラーシングレットの粒子のみで、カラーを持った粒子は観測されない（閉じ込められる）。分数電荷の粒子は観測されない。 カラー閉じ込め仮説

Part I
Chapter 3:

クォーク閉じ込めの双対超伝導描像

§ クォーク閉じ込めの双対超伝導描像

クォーク・反クォーク間の線形ポテンシャルはどうやって実現されるか？

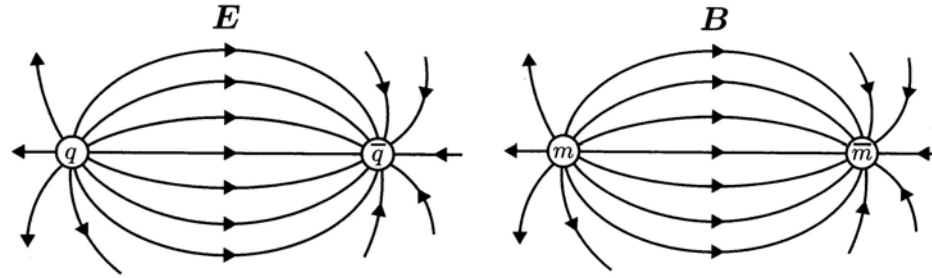


Figure 4: (左) 真空中においた電荷とそれが作り出す電場. (右) 真空中においた磁荷とそれが作り出す磁場

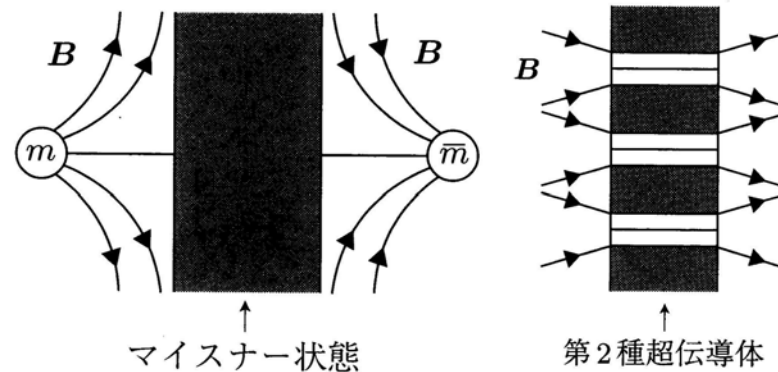


Figure 5: 磁荷の間に超伝導体をはさんだ場合の磁場. (左) Meissner 状態にある超伝導体から排除された磁場の様子 (右) 第2種超伝導体が磁束格子状態にある場合の磁場の様子.

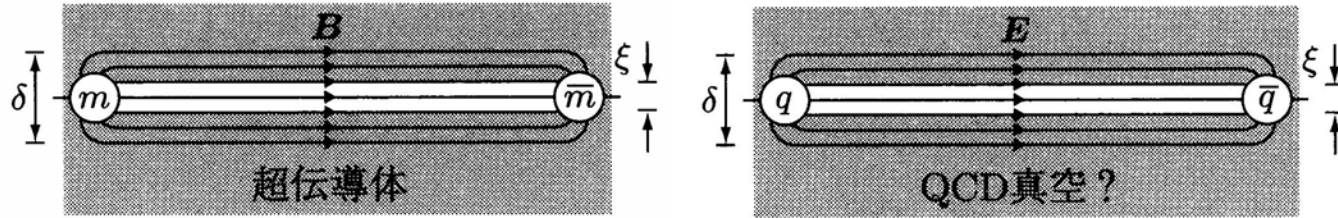


Figure 6: (左) 第2種超伝導体中においた磁荷とそれが作り出す磁場. (右) 双対超伝導体中においた電荷とそれが作り出す電場.

真空中の Maxwell 方程式は

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) + i\nabla \times (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

と書ける. この方程式は, 電場と磁場の入れ換えに対して不変である.

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{B} \quad (3)$$

もっと一般的に, $SO(2)$ の連続変換に対して不変である. (**双対 (duality) 変換**)

$$\mathbf{E} + i\mathbf{B} \rightarrow e^{i\phi}(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) \quad (4)_{22}$$

これに、電氣的な源 $j_e^\mu = (\rho_e, \mathbf{j}_e)$ を含めると

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \rho_e \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) + i\nabla \times (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \mathbf{j}_e \quad (6)$$

となって双対性を持たなくなる．しかし、磁氣的な源 $j_m^\mu = (\rho_m, \mathbf{j}_m)$ を導入して、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \rho_e + i\rho_m \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) + i\nabla \times (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \mathbf{j}_e + i\mathbf{j}_m \quad (8)$$

同時に $SO(2)$ 回転

$$\rho_e + i\rho_m \rightarrow e^{i\phi}(\rho_e + i\rho_m), \quad \mathbf{j}_e + i\mathbf{j}_m \rightarrow e^{i\phi}(\mathbf{j}_e + i\mathbf{j}_m) \quad (9)$$

を行えば、双対性は回復する．

双対超伝導描像の問題点

- 1) 通常の超伝導はアーベル型ゲージ理論で記述されるが、非アーベル型ゲージ理論である Yang-Mills 理論では双対変換の定義（意味）が不明瞭である。
- 2) 非アーベル型ゲージ理論に従うカラー電荷をつなぐカラー力線は旨く定義できない。なぜなら、自己相互作用があるため、カラー力線は途中で枝分かれしたり、切れたりすることがあり保存しないからである。
- 3) 双対 Meissner 効果を実現させる元になる Cooper 対として磁気単極子が存在しなくてはならないが、本当に存在するのか。しかも、それらは、カラー磁場によって結び付けられ、本当に凝縮するのか。

1990 年以後の研究で、磁気単極子配位が QCD の低エネルギーの物理（クォーク閉じ込め、カイラル対称性の破れ等）において支配的な役割を担っていることが明らかになってきた。これは、1981 年に Gerald 't Hooft によって提唱された可換射影（Abelian projection）の考えに基づいて、それをさらに発展させたものである。

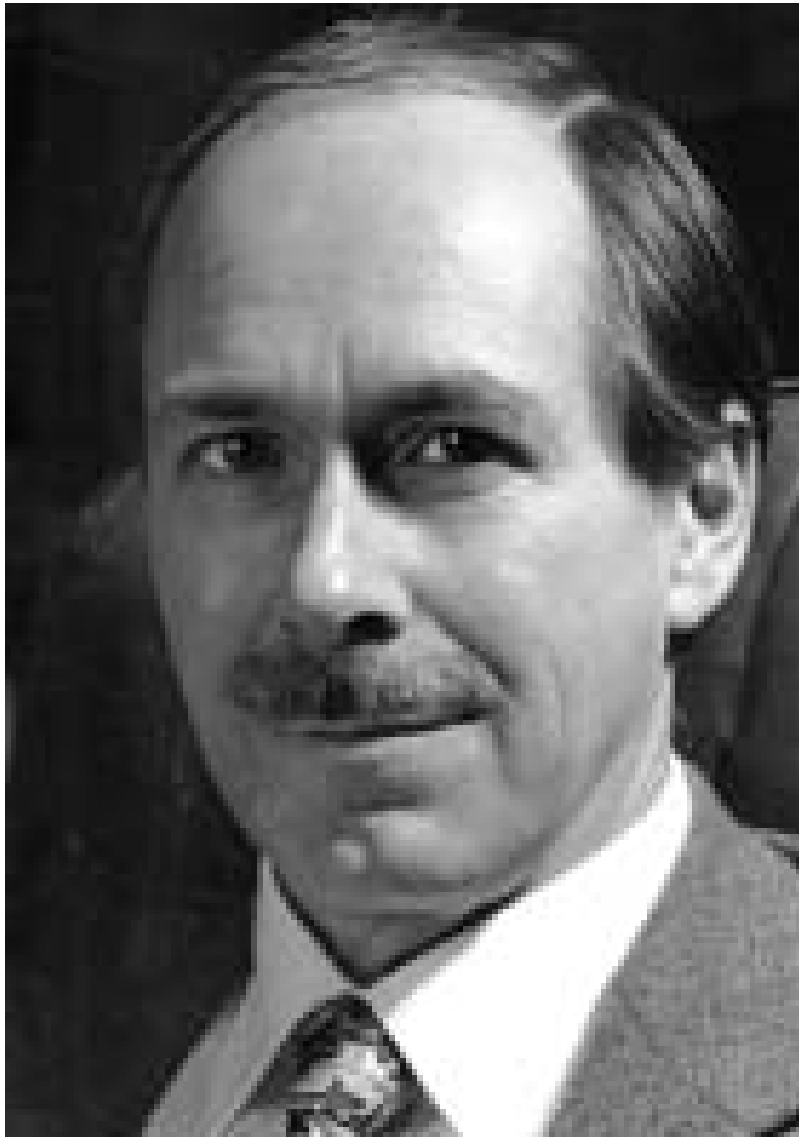


Figure 7: (Left person) G. 'tHooft (1946–) (in Nagoya, 2006)

Part I
Chapter 5:

**ゲージ理論における磁気単極子
(マグネティック モノポール)**

§ ゲージ理論とは何か？

元々の理論が相変換のもとで不変とする。相変換を局所化した変換のもとで、不変になることを理論に要求すると、必然的に新しい場、すなわち、ゲージ場が導入される。

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Psi(x) \implies \Psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \Psi(x) = \Psi'(x) \quad (1)$$

電磁力学でも、微分を含む項は、そのままでは不変にならない。

$$\partial_\mu \Psi'(x) = e^{i\theta(x)} \partial_\mu \Psi(x) + \partial_\mu i\theta(x) e^{i\theta(x)} \Psi(x) \neq e^{i\theta(x)} \partial_\mu \Psi(x)$$

ベクトル場 A_μ を導入して、

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + g^{-1} \partial_\mu \theta(x) \quad (2)$$

次のように変換すると要求すると、

$$[\partial_\mu - ig A'_\mu(x)] \Psi'(x) = e^{i\theta(x)} [\partial_\mu - ig A_\mu(x)] \Psi(x) \quad (3)$$

$$\text{なぜなら, } [\partial_\mu - ig A'_\mu(x)] \Psi'(x) = e^{i\theta(x)} \partial_\mu \Psi(x) + i \partial_\mu \theta(x) e^{i\theta(x)} \Psi(x) - ig A'_\mu(x) e^{i\theta(x)} \Psi(x)$$

ゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入して、微分を共変微分に置き換えればよい。

$$\partial_\mu \Psi(x) \rightarrow D_\mu[A] \Psi(x) \quad (4)$$

カラー電荷とカラー対称性:電荷とは何か?(場の理論で電荷はどう理解されるか?)

- 量子電磁力学 (Quantum ElectroDynamics, 略して QED)

QEDでは, 電子場 $\Psi(x) \in \mathbb{C}$, 電磁場 $A_\mu \in \mathbb{R}$ に対する phase 変換 (U(1) 変換)

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{-i\theta}, \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) \quad (5)$$

の下で理論の作用積分 (ラグランジアン) が不変.

$\implies$ Noether の定理により保存する Noether カレント J^μ ($\partial_\mu J^\mu = 0$) と Noether 保存量 $Q = \int d^3x J^0(x)$ が存在. 電荷=Noether 保存量

- 量子色力学 (Quantum ChromoDynamics, 略して QCD)

QCDは, クォーク場 $\Psi^a(x) \in \mathbb{C}^3$, グルーオン場 $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^A T^A \in su(3)$ に対してカラー回転変換 (SU(3) 変換) に対して不変な場の量子論: $(a, b = 1, 2, 3)$

$$\Psi^a(x) \rightarrow [e^{i\theta^A T^A}]^a_b \Psi^b(x), \quad \Psi_a^\dagger(x) \rightarrow \Psi_b^\dagger(x) [e^{i\theta^A T^A}]^a_b, \quad (6)$$

$$[\mathcal{A}^\mu]^a_b(x) \rightarrow [e^{i\theta^A T^A}]^a_c [\mathcal{A}^\mu]^c_d(x) [e^{-i\theta^A T^A}]^d_b \quad (7)$$

カラー電荷=カラー回転不変性から出てくる Noether 保存量 Q^A (カラー回転の生成子)

QCD Lagrangian $G=SU(3)$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}(x) \{ i \gamma^\mu D_\mu[A] - m_f \} q(x) + \mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}}, \quad D_\mu[A] := \partial_\mu - i g \mathcal{A}_\mu(x),$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} := -\frac{1}{2} \text{tr} \{ \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) \},$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) := \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(x) - i g [\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x)], \quad (8)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}_{\alpha a f}(x) \{ i \gamma_{\alpha\beta}^\mu [\delta^a_b \partial_\mu + i g (\mathcal{A}_\mu(x))^a_b] - m_f \delta^f_{f'} \} q^{\beta b f'}(x) + \mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}},$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} := -\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(x) \mathcal{F}^{\mu\nu a}(x) = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^A(x) \mathcal{F}^{\mu\nu A}(x), \quad (9)$$

quark field $q^{\alpha a f}(x)$;

gluon field $(\mathcal{A}_\mu(x))^a_b = (\mathcal{A}_\mu^A(x) T^A)^a_b$

g : coupling constant, m_f : quark (bare) mass

$\alpha, \beta, \dots$: spinor indices (D=4 $\Rightarrow 1, \dots, 4$)

$a, b, \dots$: color indices (R,G,B) $SU(3)_C$

$f, f', \dots$: flavor indices (u, d, s, c, b, t)

§ ゲージ理論における磁気単極子

Yang-Mills理論で磁気単極子(マグネティック モノポール)は実現可能か？

ゲージ理論におけるマグネティック モノポール

- 電磁気学における Dirac モノポール：特異なポテンシャル $\Rightarrow$ 次ページ
- ゲージ・ヒッグス理論における Georgi-Glashow 模型（ゲージ場＋スカラー場の理論）：Topological soliton として，'t Hooft-Polyakov モノポールが存在する。

Yang-Mills理論におけるゲージ不変な磁気単極子の構成

しかし，Yang-Mills理論は，Georgi-Glashow模型とは異なり，基本場としてスカラー場（随伴表現に従う）を含まない。

それでも，ゲージ変換の下で随伴表現として変換するような（グルーオンの）複合場で Lorentz スカラーである量を作りたい。もし，それが出来れば，Georgi-Glashow 模型における't Hooft-Polyakov モノポールに対応するものを構成することが出来る。

実際に，次のようにして構成できる。 グルーオン場の非線形変数変換と関連付けられる。以下，簡単のため，ゲージ群 $SU(2)$ に限る。

[Kondo, Murakami and Shinohara, hep-th/0504107; Prog. Theor. Phys. 115, 201–216 (2006).]

⊙ 電磁気学における Dirac モノポール

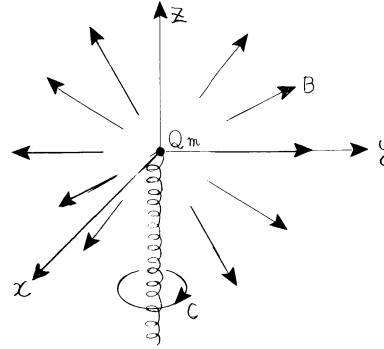


Figure 8: Dirac monopole

特異点を持たないポテンシャル $\mathbf{A}$ に対しては，恒等的に

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv 0 \quad (1)$$

しかし，特異点（Dirac string）を許せば，モノポール（磁気単極子）が導入できる：

$$\mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi = \frac{q_m}{4\pi} \left(\frac{-y}{r(r+z)}, \frac{x}{r(r+z)}, 0 \right), \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2)$$

$$\mathbf{B}_{\text{mono}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \mathbf{e}_r \implies \nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{mono}}(\mathbf{r}) = q_m \delta^3(\mathbf{r}) \quad (3)$$

Dirac stringは観測されない。(ゲージ変換でその位置を変えられるので非物理的)

磁荷 q_m をもつモノポールの作る磁場の中で運動する電荷 q をもつ電荷粒子の運動を量子力学的に考える.

$$qq_m = 2\pi\hbar cn \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

が満たされねばならない. これを**Diracの量子化条件**という.

磁荷 q_m は量子化されること $q_m = \frac{2\pi\hbar}{q}n$ (最小単位は $\frac{2\pi\hbar c}{e} = 4.14 \times 10^{-15} \text{Weber}$).

世の中にひとつでも磁荷 q_m が存在すると電荷 q が量子化され, 電荷は素電荷の整数倍になる (電荷 q は $\frac{2\pi\hbar c}{q_m}$ の整数倍になる) ことを意味する

⊙ Georgi-Glashow 模型における 't Hooft–Polyakov モノポール

$$\mathcal{L}_{\text{GG}} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\nu A}\mathcal{F}_{\mu\nu}^A + \frac{1}{2}(\mathcal{D}^\mu\phi)^A(\mathcal{D}_\mu\phi)^A - V(\phi) \quad (5)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^A\phi^A - \mu^2/\lambda)^2 \quad (A = 1, 2, 3) \quad (6)$$

ソリトン解（静的な有限エネルギーの解）として **'t Hooft–Polyakov（トフトーポリャコフ）モノポール** が得られる。

$$f_{\mu\nu} = \hat{\phi}^A \mathcal{F}_{\mu\nu}^A - g^{-1}\varepsilon^{ABC}\hat{\phi}^A \left(\mathcal{D}_\mu\hat{\phi}\right)^B \left(\mathcal{D}_\nu\hat{\phi}\right)^C, \quad \hat{\phi} := \phi^A/|\phi| \quad (7)$$

1. $f_{\mu\nu}(x)$ は $SU(2)$ の局所ゲージ変換の下で不変である． $\phi'(x) = U(x)\phi(x)U^\dagger(x)$, $\mathcal{F}'_{\mu\nu}(x) = U(x)\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)U^\dagger(x)$, $(\mathcal{D}_\mu\phi)'(x) = U(x)(\mathcal{D}_\mu\phi)(x)U^\dagger(x)$.
2. $f_{\mu\nu}(x)$ は, $\hat{\phi}^A(x) = (0, 0, 1)$ である点 x では, $U(1)$ 電磁場に帰着する.

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^3(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^3(x) \quad (8)$$

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu - g^{-1}\varepsilon^{ABC}\hat{\phi}^A\partial_\mu\hat{\phi}^B\partial_\nu\hat{\phi}^C, \quad C_\mu := \hat{\phi}^A\mathcal{A}_\mu^A \quad (9)$$

この $f_{\mu\nu}$ が非自明な磁流 $j_m^\mu = k^\mu$ を与える（つまり，その双対がゼロでない発散を与える）ことが以下のようにわかる．

(a) もし C_μ の中に，Dirac ひもの特異点がないならば，Bianchi 恒等式が成り立ち， $\partial^\nu {}^*E_{\mu\nu} = 0$ だから ($E_{\mu\nu} := \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$) まず， $f_{\mu\nu}$ は次のように書き直せる．

$$\begin{aligned} k_\mu = \partial^\nu {}^*f_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu f^{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{2g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{ABC} \partial^\nu \hat{\phi}^A \partial^\rho \hat{\phi}^B \partial^\sigma \hat{\phi}^C \end{aligned} \quad (10)$$

磁荷は，

$$\begin{aligned} q_m &= \int_V d^3x k^0 = \frac{-1}{2g} \int_V d^3x \partial^i \left(\varepsilon_{0ijk} \varepsilon^{ABC} \hat{\phi}^A \partial^j \hat{\phi}^B \partial^k \hat{\phi}^C \right) \\ &= \frac{-1}{2g} \oint_{S_{\text{phys}}^2 = \partial V} d^2\sigma^i \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ABC} \hat{\phi}^A \partial^j \hat{\phi}^B \partial^k \hat{\phi}^C \\ &= \frac{-1}{g} \oint_{S_{\text{int}}^2} d^2\xi \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{ABC} \hat{\phi}^A \partial^\alpha \hat{\phi}^B \partial^\beta \hat{\phi}^C = \frac{4\pi}{g} n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (11)$$

(b)

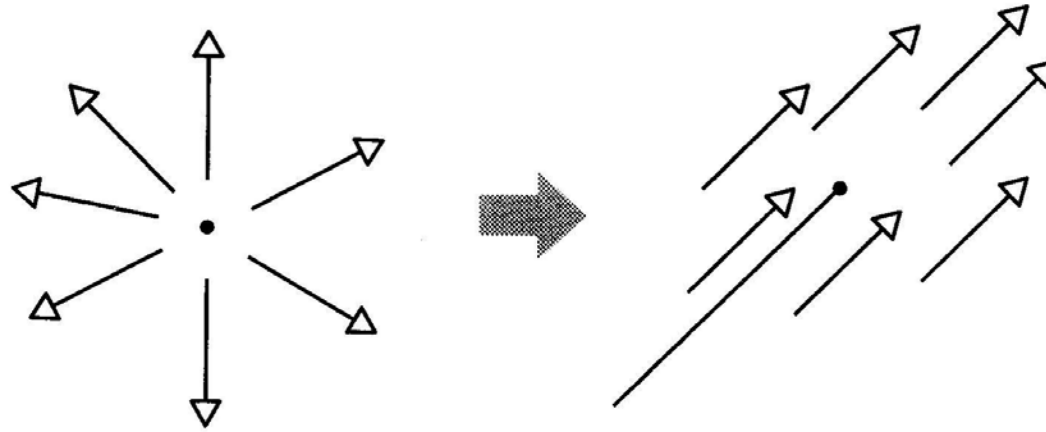


Figure 9: 't Hooft-Polyakov モノポール. (左) のゼロでない磁荷に相当する場の配位 ϕ をゲージ変換 (連続的な回転操作) によって, (右) のように, すべて同一方向に揃えようとするとき必ず特異点が生じてしまう.

Part I
Chapter 4:

クォーク閉じ込めと質量ギャップ

§ Millennium Prize Problems

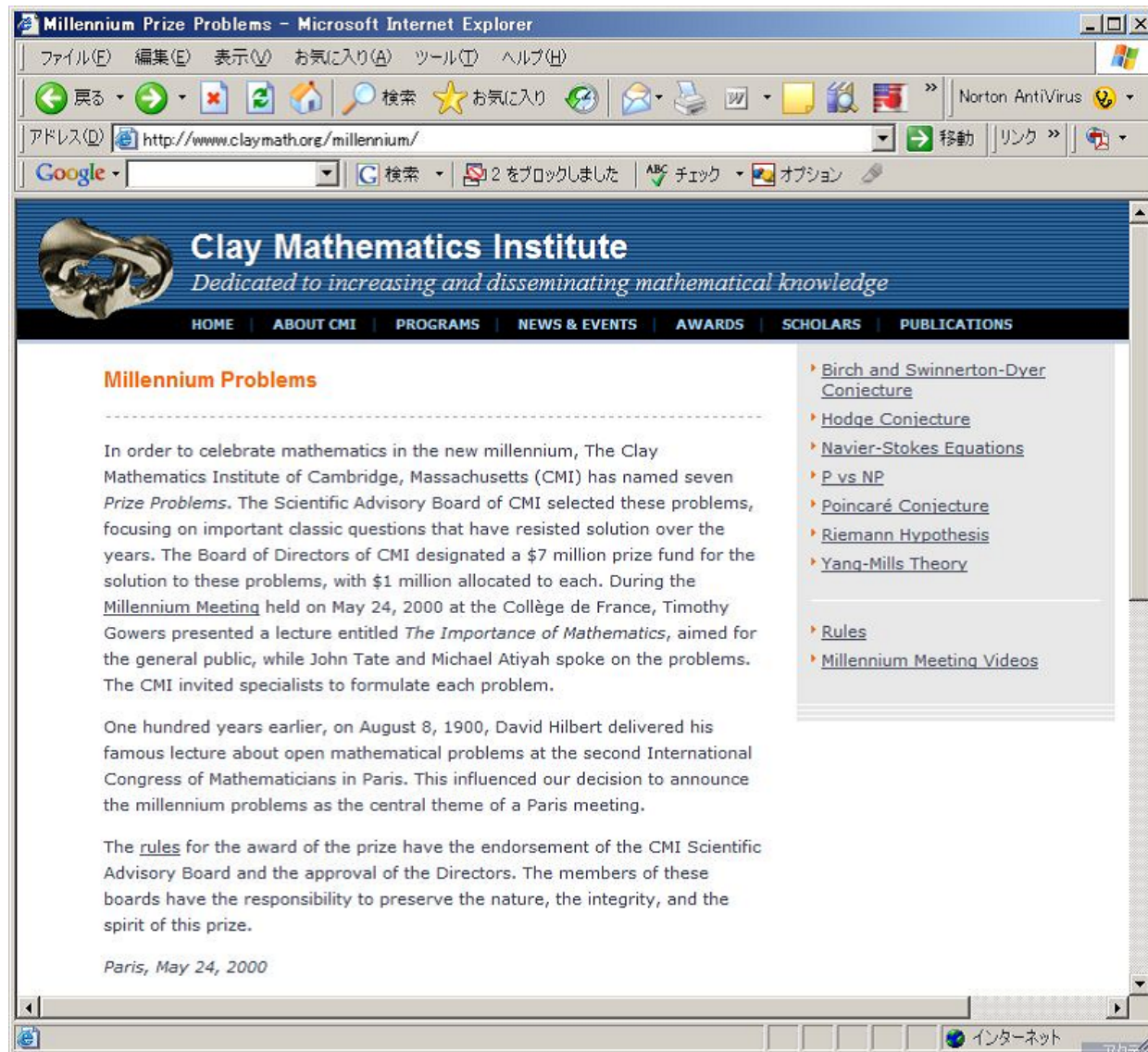


Figure 10: Millennium Prize Problems@Clay Mathematics Institute

Millennium Prize Problems at Clay Mathematics Institute (Boston, USA)

- Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (バーチ&スウィンナートン - ダイア予想, 略してBSD予想)
- Hodge conjecture (ホッジ予想)
- Navier-Stokes Equation (ナビエ - ストークス方程式)
- P vs NP (P 対 NP or $P \neq NP$ 問題)
- Poincaré conjecture (ポアンカレ予想)
G. Perelman によって肯定的に解決される。2006 年 Fields 賞受賞
[ArXiv:math.DG/0211159,2002; math.DG/0303109,2003; math.DG/0307245,2003];
- Riemann hypothesis (リーマン仮説, 略してRH)
- Yang-Mills Existence and Mass gap (ヤン - ミルズ理論の存在と質量ギャップ)

Yang-Mills Existence and Mass Gap

Prove that for any compact simple gauge group G , quantum Yang-Mills theory on $\mathbb{R}^4$ exists and has a mass gap $\Delta > 0$.

(http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/)

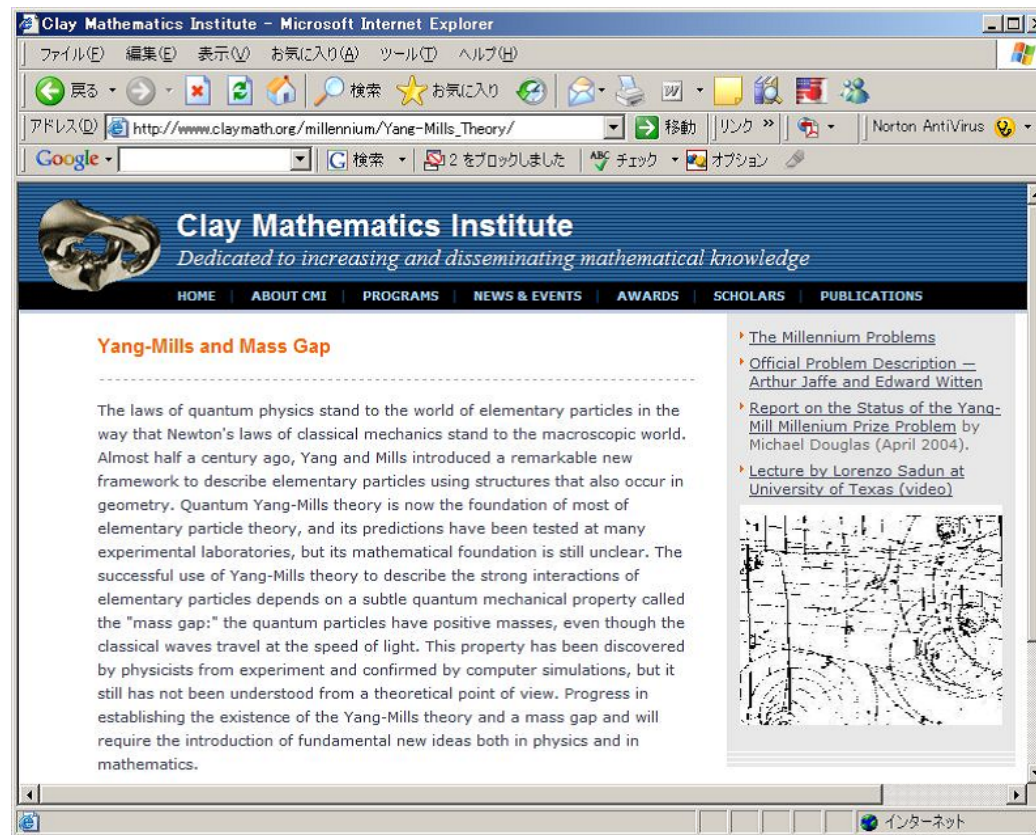


Figure 11: Millennium Prize Problems —Yang-Mills theory—

なぜ，クォーク閉じ込めおよび質量ギャップの問題は難しいのか，

- Yang-Mills理論は，古典的には，質量を持たないスケール不変（共形不変）な理論である．
- $4(=3+1)$ 次元のYang-Mills理論のラグランジアンは，次元を持ったパラメータを全く含んでいない[$3(=2+1)$ 次元のYang-Mills理論は結合定数が次元を持つ．]

にも拘わらず，線形ポテンシャルを与える弦定数や質量ギャップのような次元を持った物理量を導いてこなくてはならない．非摂動的な方法論が必要．

実際，グルーオンに対応する，零質量のスピン1のベクトル粒子は観測されていない．[Maxwell理論で記述される光子は，零質量のスピン1のベクトル粒子である．]

グルーオンの複合粒子としてのグルーボールが質量を持つ粒子として観測されると期待される．

強い（自己）相互作用の結果として説明される量子論的現象（古典論では説明不可能）．

ゲージ場の量子論入門

— 質量ギャップとクォーク閉じ込めの解決に向けて —

近藤慶一著 B5判 232頁 税込価格1980円
サイエンス社, 初版2006年1月17日発売
ゲージ場の量子論の基礎事項に最短距離で到達し,
クォーク閉じ込めと質量ギャップの問題に
取り組むための最低限の予備知識を与える.

- 【目次】第1章 はじめに
第2章 古典Yang-Mills理論
第3章 量子化の方法
第4章 Yang-Mills場の解析力学と量子化
第5章 BRST対称性とFPゴースト電荷
第6章 対称性の自発的破れと量子的破れ
第7章 カラー対称性とカラーの閉じ込め
第8章 ゲージ粒子の質量と質量ギャップ
第9章 クォークの閉じ込めと双対超伝導描像
第10章 ミレニアム賞問題
(ゲージ場の量子論の教科書としても使えます。)

