Carleman factorization of layer potentials on smooth domains: A novel derivation of geometric formulas

宮西　吉久　(信州大学)*

1. A novel geometric formula

ここでは, 曲面の微分幾何に関する不等式を一つ取り上げたい. 微分幾何学に現れる不等式は他にも沢山あるものの, 以下の定理1.1は, 線形作用素のスペクトルを用いた証明しか分かっていない. (現時点で) 少なくとも私は別証明を知らない [1].

定理 1.1. [2, Corollary 5.19] $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな境界 $\Gamma = \partial\Omega$ を持つ有界凸領域とする. このとき,

$$\kappa_- \leq \left[\frac{3W(\Gamma) - 4\pi}{2\mathrm{Area}(\Gamma)}\right]^{1/2} \leq \kappa_+, \tag{1}$$

等号成立は, $\Gamma = S^2$ (二次元球面) のとき.

ただし κ_- と κ_+ はそれぞれ, 主曲率の最小値と最大値, つまり, $\kappa_\pm(x)$ を曲面上の各点 $x \in \Gamma$ における主曲率 $(\kappa_-(x) \leq \kappa_+(x))$ として, $\kappa_- = \min_{x\in\Gamma} \kappa_-(x)$, $\kappa_+ = \max_{x\in\Gamma} \kappa_+(x)$. $W(\Gamma) = \displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{\kappa_+(x) + \kappa_-(x)}{2}\right)^2 dS_x$ ((平均曲率) の二乗の面積分) は, *Willmore energy* と呼ばれる量. Area(Γ) は境界曲面の面積.

注意 1.2. 不等式 (1) **の** (**左辺**) $\leq$ (**中辺**) **に新規性はない**. 実際, $x \in \Gamma$ における ガウス曲率を $K(x)$ とすると, 相加・相乗平均の関係 $K(x) = \kappa_-(x)\kappa_+(x) \leq \left(\frac{\kappa_+(x)+\kappa_-(x)}{2}\right)^2$ より,

$$\begin{aligned}
2\kappa_-^2 Area(\Gamma) &\leq 2\int_\Gamma \kappa_-(x)^2 dS_x \\
&\leq \int_\Gamma 3\left(\frac{\kappa_+(x) + \kappa_-(x)}{2}\right)^2 dS_x - \int_\Gamma \left(\frac{\kappa_+(x) + \kappa_-(x)}{2}\right)^2 dS_x \\
&\leq \int_\Gamma 3\left(\frac{\kappa_+(x) + \kappa_-(x)}{2}\right)^2 dS_x - \int_\Gamma K(x) dS_x \cdots (\text{相加・相乗平均の関係}) \\
&= 3W(\Gamma) - 4\pi \ \cdots (\text{曲面 } \Gamma \text{ で Gauss-Bonnet の定理を適用})
\end{aligned}$$

となり, (左辺) $\leq$ (中辺) は, 学部レベルの数学までで分かってしまう.

結局, **不等式** (1) **の** (**中辺**) $\leq$ (**右辺**) **が非自明な問題となっている.**

2. Spectral Analysis of Symmetrizable Operators

そこで本稿では, 定理 1.1 を証明するために, symmetrizable な線形作用素のスペクトル解析を紹介する. このために, H を無限次元 (複素) 可分な Hilbert 空間とし, $S \in \mathcal{L}(H)$ を positive な自己共役作用素, すなわち, $\langle Sx, x\rangle_H = \langle x, Sx\rangle_H > 0$, $\forall x \neq 0$ とする. こ

今回, 主に紹介する内容は科研費 (課題番号: JP25K07032 and 25K07081) の助成を受けたものである.
* 〒 390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学 理学部数学科 A 棟 5 階 519
e-mail: miyanishi@shinshu-u.ac.jp
web: http://math.shinshu-u.ac.jp/~miyanishi/
[1] 不等式 (1) にある (中辺) $\leq$ (右辺) の別証明に気付いたら, 是非ご教示ください. とても易しいかも？
謝辞: (中辺)≤(右辺)のごく簡単な別証明を、研究会の際に 橋詰雅斗 先生(大阪大学)に教えて頂きました。(12/4追記)

こで $K \in \mathcal{L}(H)$ が S で対称化可能 (Symmetrizable) とは, K^* を K の共役作用素として $SK^* = KS$ となるときを呼ぶ. これは, ある自己共役作用素 A を用いて $K = SA$ のように, K が自己共役作用素の積 (Carleman factorization) で表せることを意味する. 作用素 K について, [4] に基づき, 我々は幾つかの定理群を証明した. 例えば, 次の定理を示すことが出来ている.

定理 2.1. [2, Corollary 5.17] $A \in \mathcal{L}(H)$ と $S \in \mathcal{L}(H)$ を自己共役とする. さらに, $K = SA$ をコンパクト *(symmetrizable)* 作用素とする. このとき, $|A|$ の本質的スペクトルが $[\tau_-, \tau_+]$ に含まれているとすると,

$$\tau_- \leq \liminf \frac{\sigma_n(K)}{\sigma_n(S)} \leq \limsup \frac{\sigma_n(K)}{\sigma_n(S)} \leq \tau_+.$$

ただし, $\sigma_n(K)$ と $\sigma_n(S)$ はそれぞれ, 作用素 K と S の n 番目の特異値 ($\sqrt{K^*K}$ と $\sqrt{S^*S}$ の固有値) を表す.

本講演では, 論文 [2] の定理群を網羅的に紹介する代わりに, 定理 2.1 をごく簡単に紹介して, 応用として定理 1.1 を証明したい. 加えて, 本来の目標としている, **線形作用素のスペクトルを用いて, 代数 や 幾何を含む他分野の性質の証明に挑戦する試み**も紹介したい ([3, 5, 8] など.).

参考文献

[1] M. R. Adams, *Spectral properties of zeroth-order pseudodifferential operators*, J. Funct. Anal., **52**(3)(1983), 420–441.

[2] K. Ando, H. Kang, Y. Miyansihi and M. Putinar, *CARLEMAN FACTORIZATION OF LAYER POTENTIALS ON SMOOTH DOMAINS*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **249**(35) (2025).

[3] J. L. Burchnall, T.W. Chaundy, Proc. London Math. Soc. (1923)(1928)(1931)

[4] T. Carleman: *Über das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken.* Almquist and Wiksells, Uppsala, (1916)

[5] G. Lachaud, *Spectral analysis and the Riemann hypothesis*, Journal of Computational and Applied Mathematics **160** (2003), 175–190

[6] F. Noether, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann. **82**, 42–63 (1920).

[7] Y. Miyanishi, *Weyl's law for the eigenvalues of the Neumann–Poincaré operators in three dimensions: Willmore energy and surface geometry*, Advances in Math., **406** (2022), 108547.

[8] Y. Miyanishi, *A short note on decay rates of odd partitions: An application of spectral asymptotics of the Neumann–Poincaré operators*, Archiv der Mathematik **121**(2023), 419-424

[9] Y. Miyanishi, Circle foliations by geodesics revisited: Periods of flows whose orbits are all closed, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics (2025), 2550195 (Online ahead of print)