3波相互作用と臨界指数を含む Schrödinger 方程式系の基底状態の存在について

松澤　寛

神奈川大学理学部

本研究は 國府方 秀謙氏（神奈川県立鶴見高等学校）との共同研究に基づく

第2回 埼大・奈良女大 関数不等式研究，埼玉大学，2025年12月03日

§1. Introduction

考える問題

$$
(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = |u_1|^{p_1-1}u_1 + \gamma u_2 u_3, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = |u_2|^{p_2-1}u_2 + \gamma u_3 u_1, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_3 + V_3(x)u_3 = |u_3|^{p_3-1}u_3 + \gamma u_1 u_2, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u_1, u_2, u_3 \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}
$$

- $N = 3, 4, 5$
- $2 < p_i \le \mathbf{2^* - 1}$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$
- $\gamma > 0$: 定数

注意 $\gamma = 0 \Rightarrow$

$$
\begin{cases} -\Delta u_i + V_i(x)u_i = |u_i|^{p_i-1}u_i, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u_i \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}
$$

この問題は $V_i(x) \equiv \omega_i > 0$ (定数), $p_i = 2^* - 1$ ならば非自明な解は存在しない（Pohozaev の等式）.

$V_i(\cdot)$ の仮定

(V1) $V_i \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ $(i = 1, 2, 3)$

(V2) $V_i(x) \le \lim_{|y|\to\infty} V(y) =: V_{i,\infty}$ $(x \in \mathbb{R}^N)$, $V_i(x) \not\equiv V_{i,\infty}$

(V3) $\exists V_0 > 0$ (定数)：$0 < V_0 \le V_i(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N,\ i = 1, 2, 3)$

記号

- $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$
- $\mathbb{H} = H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}} = \|u_1\|_{H^1} + \|u_2\|_{H^1} + \|u_3\|_{H^1}$$

エネルギー汎関数

$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{H}$: $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})$ の弱解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u}$: $I_{\boldsymbol{V}}$ の臨界点

$$I_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{3} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\{|\nabla u_i|^2 + V_i(x)|u_i|^2\}dx \right.$$
$$\left. - \frac{1}{p_i + 1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^{p_i+1}dx \right] - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3 dx$$

$$(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = |u_1|^{p_1-1}u_1 + \gamma u_2 u_3, & x\in\mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = |u_2|^{p_2-1}u_2 + \gamma u_3 u_1, & x\in\mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_3 + V_3(x)u_3 = |u_3|^{p_3-1}u_3 + \gamma u_1 u_2, & x\in\mathbb{R}^N, \\ u_1, u_2, u_3 \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

定義 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{H}\setminus\{\mathbf{0}\}$ を $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})$ の弱解とする.

- $\boldsymbol{u}$ が**スカラー解** $:\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u} = (u_1, 0, 0)$ or $(0, u_2, 0)$ or $(0, 0, u_3)$
- $\boldsymbol{u}$ が**ベクトル解** $:\Leftrightarrow$ $u_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$

定義 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{H}\setminus\{\mathbf{0}\}$ を $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})$ の弱解とする.

- $\boldsymbol{u}$ が**基底状態 (ground state)**$:\Leftrightarrow$
  $I_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) \le I_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{v})$ ($\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}\setminus\{\mathbf{0}\}$: $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})$ の weak solution)

Known Results

[Pomponio, 2010] $p_1 = p_2 = p_3 \in (2, 2^* - 1)$

- $\forall \gamma > 0$: $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})$ は ground state をもつ
- $\forall \gamma >> 1$: ground state はベクトル解である．
- $\gamma_n \to 0$, $\boldsymbol{u}_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$: $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})$ with $\gamma = \gamma_n$ の ground state $\Rightarrow \exists i, j \in \{1, 2, 3\}$ with $i \neq j$ such that $u_{i,n}$, $u_{j,n} \to 0$ as $n \to \infty$

[Kurata-Osada, 2021] $p_1 = p_2 = p_3 \in (2, 2^* - 1)$

- ground state energy の $\gamma \to \infty$ における γ に関する漸近展開
- $\exists \gamma^* > 0$ such that
  $0 \leq \gamma < \gamma^* \Rightarrow$ ground state はスカラー
  $\gamma > \gamma^* \Rightarrow$ ground state はベクトル

[Osada, 2024] Singular perturbation problem

Aim

$\boldsymbol{p_i} \in (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2^* - 1}]$ のとき，ground state は存在するか？

§2. Main Theorems

$\boxed{V_i(x) \equiv \omega_i > 0\text{(定数) の場合}}$

$$
(\mathrm{P}_\omega)
\begin{cases}
-\Delta u_1 + \omega_1 u_1 = |u_1|^{p_1-1}u_1 + \gamma u_2 u_3, & x \in \mathbb{R}^N, \\
-\Delta u_2 + \omega_2 u_2 = |u_2|^{p_2-1}u_2 + \gamma u_3 u_1, & x \in \mathbb{R}^N, \\
-\Delta u_3 + \omega_3 u_3 = |u_3|^{p_3-1}u_3 + \gamma u_1 u_2, & x \in \mathbb{R}^N, \\
u_1, u_2, u_3 \in H^1(\mathbb{R}^N)
\end{cases}
$$

定理 A

$V_i(x) \equiv \omega_i$ ：定数，$p_i \in (2, 2^* - 1]$ $(i = 1, 2, 3)$ とすると次が成り立つ：

- $\exists \gamma_0 = \gamma_0(p_1, p_2, p_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3, N) > 0$ such that $\forall \gamma \geq \gamma_0$: $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})$ は ground state をもつ
- $\exists \gamma_1 = \gamma_1(p_1, p_2, p_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3, N) \geq \gamma_0$ such that $\forall \gamma \geq \gamma_1$: ground state はベクトル解で各成分が正で球対称である．

$V_i(x)$(非定数) の場合

$$
(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x) u_1 = |u_1|^{p_1-1}u_1 + \gamma u_2 u_3, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_2(x) u_2 = |u_2|^{p_2-1}u_2 + \gamma u_3 u_1, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_3 + V_3(x) u_3 = |u_3|^{p_3-1}u_3 + \gamma u_1 u_2, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u_1, u_2, u_3 \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}
$$

定理 B

(V1),(V2), (V3) を仮定し，$p_i \in (2, 2^* - 1]$ $(i = 1, 2, 3)$ とすると次が成り立つ：

- $\forall \gamma \geq \gamma_0$: $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{V}})$ は ground state をもつ．ここで γ_0 は定理 A の $\omega_i = V_{i,\infty}$ とした場合の定数である．
- $\exists \gamma_1' = \gamma_1(p_1, p_2, p_3, \boldsymbol{V}, N) \geq \gamma_0$ such that $\forall \gamma \geq \gamma_1'$: ground state はベクトル解である．

§3. Basic Results

- $G_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u})$ を次で定義する：

$$G_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) = \langle I'_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_i|^2 + V_i(x)|u_i|^2 - |u_i|^{p_i+1})dx - 3\gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3 dx$$

- $\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}$ が臨界点ならば $G_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) = 0$
- **Nehari 多様体 $\mathcal{N}_\gamma$** を次で定義する：

$$\mathcal{N}_\gamma := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{H} \setminus \{\boldsymbol{0}\} : G_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) = 0\}$$

- $\mathcal{N}_\gamma$ 上ではエネルギーは次のように表される：

$$I_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) = J_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) := I_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{3} G_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u})$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{6}(|\nabla u_i|^2 + V_i(x)|u_i|^2) + \frac{p_i - 2}{3(p_i+1)} |u_i|^{p_i+1} \right\} dx$$

補題 3.1

$\exists C_\gamma > 0$ 定数 : $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}} \geq C_\gamma \ (\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{N}_\gamma)$

補題 3.2

$\mathcal{N}_\gamma$ は $\mathbb{H}$ の C^1 多様体であり，$I_{\boldsymbol{V}}|_{\mathcal{N}_\gamma}$ の臨界点は $I_{\boldsymbol{V}}$ の臨界点となる．

補題 3.3

任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{H} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，ただ１つの $t_{\boldsymbol{u}} > 0$ が存在して

$$t_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} \in \mathcal{N}_\gamma, \quad I_{\boldsymbol{V}}(t_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}) = \max_{t>0} I_{\boldsymbol{V}}(t\boldsymbol{u})$$

が成り立つ．

- 補題 3.1 より $\boldsymbol{m_\gamma} := \inf\limits_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{N}_\gamma} I_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) = \inf\limits_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{N}_\gamma} J_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) > 0$

$$J_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{6}(|\nabla u_i|^2 + V_i(x)|u_i|^2) + \frac{p_i - 2}{3(p_i+1)}|u_i|^{p_i+1} \right\} dx$$

補題 3.4

$\lim_{\gamma \to \infty} m_\gamma = 0$

Proof:

- $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)(\phi \not\equiv 0, \phi \geq 0)$ を任意に選ぶ.
- 補題 3.3 より $t_\gamma(\phi,\phi,\phi) \in \mathcal{N}_\gamma$ なる $t_\gamma > 0$ がただ１つ存在する.
- $G_{\boldsymbol{V}}(t_\gamma(\phi,\phi,\phi)) = 0$ より

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\phi|^2 + V_i(x)\phi^2)dx = \sum_{i=1}^{3} t_\gamma^{p_i - 1} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p_i+1} dx + 3t_\gamma\gamma \int_{\mathbb{R}^N} \phi^3 dx > 3t_\gamma\gamma \int_{\mathbb{R}^N} \phi^3 dx$$

- $t_\gamma \to 0$ as $\gamma \to \infty$
- $0 < m_\gamma \leq J_{\boldsymbol{V}}(t_\gamma(\phi,\phi,\phi)) \to 0$ as $\gamma \to \infty$ $\square$

補題 3.5

$G_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) < 0$ ならば $J_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) > m_\gamma$

Proof:

- $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, 補題 3.3 より $t \mapsto G_{\boldsymbol{V}}(t\boldsymbol{u})$ はただ 1 つの $t_{\boldsymbol{u}} > 0$ で 0 となる

$$G_{\boldsymbol{V}}(t\boldsymbol{u}) = t^2 \left\{ \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_i|^2 + V_i(x)|u_i|^2 dx \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{3} t^{p_i - 1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^{p_i+1}) dx - 3t\gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3 dx \right\}$$

- $t \sim 0$ で $G_{\boldsymbol{V}}(t\boldsymbol{u}) > 0$ より $t_{\boldsymbol{u}} \in (0,1)$ である.

$$\begin{aligned} m_\gamma &\leq J_{\boldsymbol{V}}(t_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{t_{\boldsymbol{u}}^2}{6}(|\nabla u_i|^2 + V_i(x)|u_i|^2) + \frac{(p_i - 2)t_{\boldsymbol{u}}^{p_i+1}}{3(p_i+1)} |u_i|^{p_i+1} \right\} dx \\ &< J_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{u}) \quad \square \end{aligned}$$

命題 3.6(Lieb's Compactness Theorem)

- $\{\boldsymbol{w}_n\} = \{(w_{1,n}, w_{2,n}, w_{3,n})\} \subset \mathbb{H}$ は有界
- ある $q \in (2, 2^*)$ に対して

$$\inf_n (\|w_{1,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|w_{2,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|w_{3,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}) > 0$$

とする．このとき部分列 $\{\boldsymbol{w}_{n_k}\} \subset \{\boldsymbol{w}_n\}$ と点列 $\{y_{n_k}\} \subset \mathbb{R}^N$ および $\boldsymbol{w} \in \mathbb{H} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ が存在して

$$\boldsymbol{w}_{n_k}(\cdot - y_{n_k}) \rightharpoonup \boldsymbol{w} \quad \text{weakly in } \mathbb{H}$$

が成り立つ．

§4. Proof of Theorem A

- $V_i(x) \equiv \omega_i > 0$, $I_{\mathbf{V}}$, $J_{\mathbf{V}}$, $G_{\mathbf{V}}$ は I, J, G とする.
- $\boldsymbol{p_1 = p_2 = p_3 = 2^* - 1}$ の場合のみ示す.
- 補題 3.4 より，ある $\gamma_0 > 0$ が存在して次が成り立つ：

$$m_\gamma < \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{S}}{3}\right)^{\frac{N}{2}} \quad (\gamma \geq \gamma_0)$$

$\mathcal{S}$ は Sobolev の最良定数： $\mathcal{S}\|w\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$

- 最小化列 $\{\boldsymbol{u}_n\} \subset \mathcal{N}_\gamma$: $I(\boldsymbol{u}_n) = J(\boldsymbol{u}_n) \to m_\gamma$
- J の形から $\{\boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbb{H}$ で有界である.
- $\boldsymbol{u}_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$ とおくと各 $\{u_{i,n}\}$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で有界である.

Step 1 ある $q \in (2, 2^*)$ に対して次が成り立つ.

$$\inf_n \left(\|u_{1,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|u_{2,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|u_{3,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right) > 0$$

- 背理法による． 任意の $q \in (2, 2^*)$ に対して次が成り立つとする：

$$\inf_n (\|u_{1,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|u_{2,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|u_{3,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}) = 0$$

- 部分列をとると各 i に対し $u_{i,n} \to 0$ in $L^3(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．

Step 1.1 背理法の仮定の下，$\|u_{i,n}\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} \to 0$ $(\forall i)$ が成り立つ．

- Sobolev の埋め込みより部分列に沿って $\|u_{i,n}\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} \to \exists l_i \geq 0$
- $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ を証明したい．
- $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq 0$ と仮定して一般性を失わない．
- $l_1 > 0$ と仮定して矛盾を導こう．

- $G(\boldsymbol{u}_n)=0$ と $u_{i,n}\to 0$ in $L^3(\mathbb{R}^N)$, $\|u_{i,n}\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*}\to l_i$ より

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_{i,n}|^2+\omega_i u_{i,n}^2)dx=\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{i,n}|^{2^*}dx+3\gamma\int_{\mathbb{R}^N}u_{1,n}u_{2,n}u_{3,n}dx$$

- L.H.S $\geq \mathcal{S}\|u_{1,n}\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2=\mathcal{S}l_1^{\frac{2}{2^*}}+o(1)=\mathcal{S}l_1^{\frac{N-2}{N}}+o(1)$

  R.H.S $=\sum_{i=1}^{3}l_i+o(1)\leq 3l_1+o(1)$

- $l_1>0$ より $l_1\geq\left(\frac{\mathcal{S}}{3}\right)^{\frac{N}{2}}$
- 一方

$$\begin{aligned}m_\gamma+o(1)=J(\boldsymbol{u}_n)\geq\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_{1,n}|^2dx&\geq\frac{1}{6}\mathcal{S}\|u_{1,n}\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2\\&\geq\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{S}}{3}\right)^{\frac{N}{2}}+o(1)\end{aligned}$$

Contradiction. したがって $l_1=l_2=l_3=0$

Step 1-2 : Step 1 の証明の完了

- Step 1-1 より $\|u_{i,n}\|_{L^3(\mathbb{R}^N)} \to 0$, $\|u_{i,n}\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \to 0$ $(i = 1, 2, 3)$
- $G(\boldsymbol{u}_n) = 0$ より

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_{i,n}|^2 + \omega_i u_{i,n}^2) dx = o(1)$$

これは $\boldsymbol{u}_n \to 0$ in $\mathbb{H}$ を意味するがこれは補題 3.1 に矛盾する ($\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}} \geq C_\gamma$ on $\mathcal{N}_\gamma$).

- 以上より，ある $q \in (2, 2^*)$ に対して次が成り立つ：

$$\inf_n (\|u_{1,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|u_{2,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|u_{3,n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}) > 0$$

Step 1（完）

- Lieb のコンパクト性定理（補題 3.6）より $\exists\{n_k\} \subset \{n\}$, $\exists\{y_{n_k}\} \subset \mathbb{R}^N$, $\exists\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{H} \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_k := \boldsymbol{u}_{n_k}(\cdot - y_{n_k}) \rightharpoonup \widetilde{\boldsymbol{u}} \quad \text{weakly in } \mathbb{H}$$

- さらに

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_k \to \widetilde{\boldsymbol{u}} \text{ in } L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \quad q \in [2, 2^*),$$
$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_k \to \widetilde{\boldsymbol{u}} \text{ a.e. in } \mathbb{R}^N$$

としてよい．

Step 2 $G(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = 0$ つまり $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{N}_\gamma$

補題 3.5（再） $G(\boldsymbol{u}) < 0 \Rightarrow J(\boldsymbol{u}) > m_\gamma$

- Brezis-Lieb の補題より

$$
\begin{aligned}
0 = G(\widetilde{\boldsymbol{u}}_k) &= G(\widetilde{\boldsymbol{u}}_k - \widetilde{\boldsymbol{u}}) + G(\widetilde{\boldsymbol{u}}) + o(1) \\
m_\gamma + o(1) = J(\widetilde{\boldsymbol{u}}_k) &= J(\widetilde{\boldsymbol{u}}_k - \widetilde{\boldsymbol{u}}) + J(\widetilde{\boldsymbol{u}}) + o(1)
\end{aligned}
$$

- $G(\widetilde{\boldsymbol{u}}) > 0 \Rightarrow G(\widetilde{\boldsymbol{u}}_k - \widetilde{\boldsymbol{u}}) < 0$ $(k \gg 1)$ $\overset{\text{補題 3.5}}{\Rightarrow}$ $J(\widetilde{\boldsymbol{u}}_k - \widetilde{\boldsymbol{u}}) > m_\gamma$
$\Rightarrow J(\widetilde{\boldsymbol{u}}) \leq 0$ (contadiction)
- $G(\widetilde{\boldsymbol{u}}) < 0$ $\overset{\text{補題 3.5}}{\Rightarrow}$ $J(\widetilde{\boldsymbol{u}}) > m_\gamma \Rightarrow 0 \leq J(\widetilde{\boldsymbol{u}}_k - \widetilde{\boldsymbol{u}}) \leq o(1)$
$\Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{u}}_k \to \widetilde{\boldsymbol{u}}$ in $\mathbb{H} \Rightarrow J(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = m_\gamma$ contradiction
- したがって $G(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = 0$ となる．Step 2（完了）

Step 3 $J(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = m_\gamma$

- $\widetilde{\boldsymbol{u}}_k := (\widetilde{u}_{1,k}, \widetilde{u}_{2,k}, \widetilde{u}_{3,k})$

$$J(\widetilde{\boldsymbol{u}}_k) = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{6}(|\nabla \widetilde{u}_{i,k}|^2 + \omega_i |\widetilde{u}_{i,k}|^2) + \frac{2^* - 3}{3 \cdot 2^*} |\widetilde{u}_{i,k}|^{2^*} \right\} dx$$

- ノルムの弱下半連続性と Fatou の補題から

$$m_\gamma \le J(\widetilde{\boldsymbol{u}}) \le \liminf_{k \to \infty} J(\widetilde{\boldsymbol{u}}_k) = m_\gamma$$

Step 3（完了）□

注意 $p_1 = p_2 = p_3 = 2^* - 1$ の場合はスカラー解が存在しないので ground state はベクトル解，つまり $\gamma_0 = \gamma_1$ である．

S 5. Future work

問題

γ が小さいときは？

- Kurata-Osada の結果によると劣臨界のとき，γ が小さいときは ground state はスカラー解である．
- $p_1 = p_2 = p_3 = 2^* - 1$ のときは，スカラー解はないのでどうなるか？

ご清聴ありがとうございました！