実効的双曲型作用素の初期値問題と Ivrii の予想

西谷達雄

大阪大学

奈良女子大学，2026/6/13

双曲型作用素とは？　初期値問題の適切性

$$\begin{cases} Pu = D_t^m u + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+j\le m} a_{j,\alpha}(t,x) D_x^\alpha D_t^j u = 0, \quad t \ge 0, \\ D_t^j u(0,x) = u_j(x), \quad j = 0,\dots,m-1. \end{cases} \tag{1}$$

$$x = (x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ D_x = (D_{x_1},\dots,D_{x_n}),\ D_{x_j} = -i\partial/\partial x_j.$$

${}^\exists\delta > 0$, ${}^\exists U$, ($x = 0$ の近傍) ${}^\forall u_j(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，(1) を満す $u(t,x) \in C^m([0,\delta) \times U)$ が一意に存在するとき，初期値問題 (1) は C^∞ 適切という．初期値問題が C^∞ 適切となるのが双曲型作用素であり，直感的には情報を時間未来に伝達する作用素である．

Theorem (Lax-Mizohata)

$p(t,x,\tau,\xi) = \tau^m + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+j=m} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha \tau^j$ を P の主シンボルとする．初期値問題が適切ならば，$\delta' > 0, U'$ が存在して

$$p(t,x,\tau,\xi) = 0 \Longrightarrow \tau(\text{特性根}) \in \mathbb{R},\quad {}^\forall(t,x) \in [0,\delta') \times U',\ {}^\forall\xi \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Proposition

$p(0,0,\tau,\xi)=0$ が $\xi=(1,0,\dots,0)$ で非実根を一つ持つとし，I を原点を含む $\mathbb{R}$ の開区間とする．初期値問題 $Pu=0$, $D_t^j u(0,x)=0$, $0\le j\le m-2$, $D_t^{m-1}u(0,x)=g(x_1)$ が原点の近傍で C^m 解を持たないような $g\in C^\infty(I)$ の集合は $C^\infty(I)$ の中で稠密である．

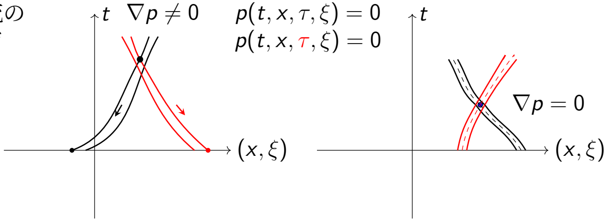
注意：$a_{j\alpha}(t,x)$ を実解析的とすると Cauchy-Kowalevsky の定理より，$g(x_1)$ が実解析的なら C^m 解 (実解析解) が存在する．

情報は Hamilton 方程式

$$\frac{d}{ds}(X,\Xi)=\Big(\frac{\partial p}{\partial \Xi},-\frac{\partial p}{\partial X}\Big),\quad X=(t,x),\ \Xi=(\tau,\xi)$$

の $\{p(t,x,\tau,\xi)=0\}$ (特性多様体) 内を通る解軌道に沿って伝わる．

Hamilton 流の
イメージ



- $p=0$, $\nabla p = (\partial p/\partial X, \partial p/\partial \Xi)=0$ なる点を p (または $p=0$) の危点と呼ぶ． p が Ξ について斉次なら $\nabla p = 0 \Longrightarrow p=0$
- 情報は特性多様体 $\{p=0\}$ の外では伝わらない． $p\neq 0$ とすると，粗くいって P に逆があるので解は初期値によらず滑らかになる．
- $\nabla p(t,x,\tau,\xi)=0 \Longrightarrow \partial p(t,x,\tau,\xi)/\partial\tau = 0$ より (t,x,τ,ξ) を危点とすると τ は多重特性根．逆は一般には正しくない．

背景

多重特性根を持つ双曲型方程式の研究 (1950 年代〜)

簡単な例：$Pu = \partial_t^2 u = 0,\ \ u(0,x) = \phi(x),\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) \Longrightarrow u(t,x) = \phi(x) + t\psi(x).$

$Pu = \partial_t^2 u + i\partial_x u = 0,\ u(0,x) = \phi(x),\ \partial_t u(0,x) = 0$ は一般の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ については解けない. $\hat{u}(t,\xi)$: x に関する Fourier 変換.
解は $\hat{u}(t,\xi) = (e^{\sqrt{\xi}t} + e^{-\sqrt{\xi}t})\hat{\phi}(\xi)/2 \quad (\xi > 0)$
$\Longrightarrow \hat{\phi}(\xi)/2 = e^{-\sqrt{\xi}t}(1 + e^{-2\sqrt{\xi}t})^{-1}\hat{u}(t,\xi) \Longrightarrow \hat{\phi}(\xi) \lesssim e^{-\sqrt{\xi}t}$

初期値問題が適切となるために低階の満たすべき条件 (Levi 条件) の探索が続く.

$\Downarrow$ Ivrii の 1972 年の速報論文

Ivrii の登場, 学位論文

任意の低階項に対して初期値問題が C^∞ 適切である $\Longrightarrow p$ のすべての危点 (すなわち $p=0$, $\nabla p=0$ となる点) において, ハミルトン写像 (基本行列) がゼロでない実の固有値の対を持つ (証明：Ivrii and Petkov(1974)).

- ハミルトン写像: 危点でのハミルトン方程式の線形化で, そこでの方程式の局所的・微視的な振る舞いを (ほぼ) 支配.
- Ivrii(1975): 主シンボルが各危点の近傍で滑らかな 2 つの実シンボルの積に書ける $\Longrightarrow$ 十分条件でもある.
- 「任意の低階に対して初期値問題が C^∞ 適切であるためには $p=0$ の各危点でハミルトン写像が 0 でない実の固有値の対をもつことが必要十分である」と予想. この予想が, 実効的双曲型作用素 (effectively hyperbolic operator) という用語の由来.

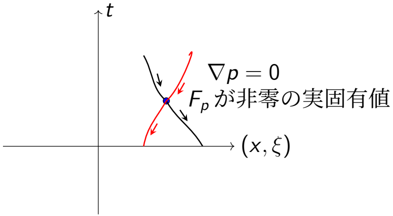
実効的双曲型作用素の定義

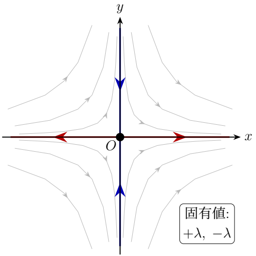
$\rho = (\bar{X}, \bar{\Xi})$ を $p(\rho) = 0, \nabla p(\rho) = 0$ とする．

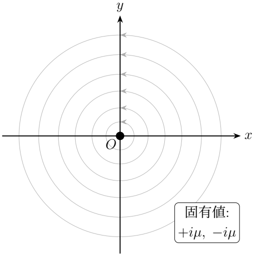
$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} X \\ \Xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial p/\partial \Xi \\ -\partial p/\partial X \end{bmatrix} = \nabla^\sigma p \overset{\rho\text{で線形化}}{\Longrightarrow} \frac{d}{ds}\begin{bmatrix} X \\ \Xi \end{bmatrix} = 2F_p(\rho)\begin{bmatrix} X \\ \Xi \end{bmatrix}$$

$$F_p(\rho) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial^2 p(\rho)/\partial X\partial\Xi & \partial^2 p(\rho)/\partial\Xi\partial\Xi \\ -\partial^2 p(\rho)/\partial X\partial X & -\partial^2 p(\rho)/\partial\Xi\partial X \end{bmatrix} (\text{Hamilton 行列}).$$

定義：$p = 0$ の危点 $\rho = (\bar{X}, \bar{\Xi})$ が 実効的双曲型 (effectively hyperbolic) とは，ハミルトン写像 $F_p(\rho)$ が一組の非零の実固有値 $\pm\lambda, (\lambda \neq 0)$ を持つこと．作用素 P が実効的双曲型とは，p のすべての危点が実効的双曲型であること．







- p の特性根がすべて実のとき $F_p(\rho)$ (ρ は p の危点) の 0 以外の固有値は (存在すれば) $\pm\lambda$, $\pm i\mu_j$ ($\lambda, \mu_j > 0$) であり，これらは単純固有値である．

初期値問題に関する Ivrii の予想

初期値問題に関する Ivrii の予想 (1975)：任意の低階項に対する Cauchy 問題が C^∞ 適切であるための必要十分条件は，特性根がすべて実で，かつ $p = 0$ のすべての危点において，そのハミルトン写像が非零の実固有値 (の対) を持つことである．

双曲性は単なる代数的条件ではなく，Hamilton 流の力学的性質として理解されるべきである．

実効的双曲性が十分でもあること

Theorem
(2) を仮定．任意の $p=0$ の危点 $(0,0,\tau,\xi)$, $|(\tau,\xi)|\neq 0$ は実効的双曲型とする．このとき任意の低階 (係数は原点の近傍で C^∞) に対し，$\delta>0$, $U(x=0$ の近傍) があって，任意の $u_j(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し (1) をみたす $u(t,x)\in C^\infty([0,\delta)\times U)$ が存在する．また $u(t,x)\in C^m([0,\delta)\times U)$ が $Pu=0$, $\partial_t^j u(0,x)=0$, $0\leq j\leq m-1$ を $[0,\delta)\times U$ で満たすなら，原点の近傍 V があって $V\cap\{t\geq 0\}$ で $u=0$.

注意：危点が存在しなければ P は主要型で (狭義双曲型か Tricomi 型) で初期値問題は任意の低階項に対して C^∞ 適切で regularity loss はない (Hörmander の教科書 XXIII 章に詳しい取り扱い).

予想の解決へ：2 重特性根の場合 (1980 年代)

最初の大きな進展：

Lemma

$p(t,x,\tau,\xi)=0$ の根は $^{\forall}(t,x)\in V((\bar t,\bar x)$ の近傍$)$, $^{\forall}\xi\in\mathbb{R}^n$ に対し実とする．$\bar\tau$ が $p(\bar t,\bar x,\tau,\bar\xi)=0$ の重複根なら $\nabla p(\bar t,\bar x,\bar\tau,\bar\xi)=0$. $\bar\tau$ が重複度 3 以上の根なら $\nabla^2 p(\bar t,\bar x,\bar\tau,\bar\xi)=O(\Longrightarrow F_p=O)$.

$^{\exists}\delta_i>0$, $^{\exists}U$ $(x=0$ の近傍$)$ s.t. $^{\forall}(t,x)\in(-\delta_1,\delta_2)\times U$, $^{\forall}\xi\in\mathbb{R}^n$ で $p(t,x,\tau,\xi)=0$ $(\xi\neq 0)$ の根は実 $\Longrightarrow$ $([0,\delta_2)\times U)\times\mathbb{R}^n$ 上の危点が実効的双曲型ならそれは 2 重特性根. $\Longrightarrow$ 2 階の作用素に帰着．この場合は 1980 年代までに，予想は肯定的に解決.

- Ivrii 自身が用いた「発展作用素の作用素冪を用いる方法」を発展させたアプローチ (Iwasaki)
- 擬微分作用素の重み付きエネルギー法 (Nishitani)
- 特異性の伝播を用いる方法 (有限次元を除いた可解性のみ)(Melrose)

2 階実効的双曲型作用素の例

$$P = D_t^2 - a(t,x)D_x^2, \quad a(t,x) \geq 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

P が実効的双曲型 $\Longleftrightarrow$ $a(t,x)=0$ なら $\partial_t^2 a(t,x) \neq 0$.

(a): $n \geq 2$ とし q_i, r_i $(1 \leq i \leq n-1)$ を正数として

$$P = D_t^2 - (\Sigma_{i=1}^{n-1} q_i (x_{i-1} - x_i)^2 D_n^2 + \Sigma_{i=1}^{n-1} r_i D_i^2) \quad (x_0 = t).$$

P が実効的双曲型 $\Longleftrightarrow$ r_i が $\sum_{i=1}^{n-1} r_i^{-1} > 1$.

(b): P は滑らかな実数値関数を係数にもつ 1 階の微分作用素の積

$$P = (D_t - \Sigma_{j=1}^n b_{1j}(t,x)D_j)(D_t - \Sigma_{j=1}^n b_{2j}(t,x)D_j).$$

P が実効的双曲型 $\Longleftrightarrow$ $p_i(x,\xi) = \tau - \sum_{j=1}^n b_{ij}(t,x)\xi_j$ とおくとき $p_1(\rho) = p_2(\rho) = 0$ なら $\{p_1, p_2\}(\rho) = {}^t\nabla p_2 \nabla^\sigma p_1 \neq 0$.

最終的な解決：3 重特性根の場合

Lemma

${}^{\forall}(t,x,\xi) \in ([0,\delta') \times U') \times \mathbb{R}^n$ に対し $p(t,x,\tau,\xi)=0$ の根はすべて実とする．$\bar\tau$ が $p(\bar t,\bar x,\tau,\bar\xi)=0$, $(\bar t,\bar x) \in ([0,\delta') \times U')$ の重複度 4 以上の根なら $\nabla^2 p(\bar t,\bar x,\bar\tau,\bar\xi)=0$ ($\Longrightarrow F_p = O$).

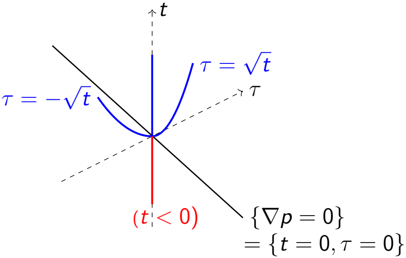
Lemma より危点が実効的双曲型なら 2 重または 3 重特性根である．高々3 重特性根を持つ実効的双曲型作用素の場合に C^∞ 適切性を示す $\Longrightarrow$Ivrii の予想の完全解決

- 本質的に 3 階の作用素に帰着される．
- 危点 $(\bar t,\bar x,\bar\tau,\bar\xi)$ が実効的双曲型でかつ $\bar\tau$ が 3 重特性根なら $\bar t=0$ で，さらに $t<0$ で必ず非実の特性根を持つ．
- regularity loss があるので超局所的エネルギー評価を通常の単位分解で寄せ集めることはできない (2 重特性根の場合も同様).

$p=(\tau^2-t\xi^2)\tau$ のときの

Hamilton 方程式

$\dfrac{d}{ds}(X,\Xi)=(\dfrac{\partial p}{\partial \Xi},-\dfrac{\partial p}{\partial X})$ の軌道



3 階の実効的双曲型作用素

$$P = D_t^3 + \Sigma_{j=1}^3 a_j(t,x,D)\langle D\rangle^j D_t^{3-j}, \quad \langle D\rangle = \sqrt{1+|D|^2}.$$

$a_1(t,x,D) = 0$ と仮定できる．主シンボルは

$$p(t,x,\tau,\xi) = \tau^3 - a(t,x,\xi)\langle\xi\rangle^2\tau + b(t,x,\xi)\langle\xi\rangle^3$$

仮定 $\begin{cases} \Delta = 4a(t,x,\xi)^3 - 27b(t,x,\xi)^2 \geq 0, \quad (t,x,\xi) \in [0,T) \times U \times \mathbb{R}^n \\ \text{任意の危点 } (0,0,\tau,\xi),\ |(\tau,\xi)| \neq 0 \text{ で } F_p \text{ は非零の実固有値.} \end{cases}$

以下 $(0,0,\tau,\xi)$ は危点で τ は 3 重特性根とする $\Longrightarrow \tau = 0$.

危点 $(0,0,0,\bar{\xi})$ が実効的双曲型 $\Longleftrightarrow \partial_t a(0,0,0,\bar{\xi}) \neq 0 \Longrightarrow$
$a = e(t,x,\xi)(t+\alpha(x,\xi)),\ e > 0,\ \alpha \geq 0.$

3 階の実効的双曲型作用素の例

$a = e(t,x,\xi)(t+\alpha(x,\xi))$, $e>0$, $\alpha \geq 0$ で
$\Delta = 4a^3 - 27b^2 \geq 0,\ \ t \geq 0 \implies$ 実効的双曲型作用素.

例：$p = (\tau^2 - t|\xi|^2)\tau = (\text{Tricomi 作用素}) \times \tau, \quad \Delta(p) = 4t^3$,

$$\tilde{p} = \tau^3 - (t+\alpha^2(x))\xi^2\tau + (t^m/2 - t)\alpha(x)\xi^3, \quad \alpha(0) = 0$$

ここで $\Delta(\tilde{p}) = (t-2\alpha^2)^2(4t+\alpha^2) + 27t^{m+1}\alpha^2(1 - t^{m-1}/4)$,

$\Delta(\tilde{p}) > 0$ for $0 < t \leq 1$ ($\Longrightarrow 0 < t \leq 1$ で狭義双曲型).

$t = 2\alpha^2$ のとき $\Delta(\tilde{p}) = 27 \cdot 2^{m+1}\alpha^{2(m+2)}(1 - 2^{m-3}\alpha^{2(m-1)}) =$
$27 \cdot t^{m+2}(1 - t^{m-1}/4)/2$

証明のアイデア (対称化行列の対角化)

$$P=D_t^3-(a(t,x,D)+e\langle D\rangle^{-1})\langle D\rangle^2D_t+b(t,x,D)\langle D\rangle^3+e\langle D\rangle D_t+\text{低階}$$

$a(t,x,D)+e\langle D\rangle^{-1}\to a(t,x,D)$ と書く $\to a=e(t+\alpha+\langle\xi\rangle^{-1})$.

$U={}^t(\langle D\rangle^2u,\langle D\rangle D_tu,D_t^2u)$ とおくと

$Pu=f\Longrightarrow D_tU=A(t,x,D)\langle D\rangle U+B(t,x,D)U+F$

$$A(t,x,\xi)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\b&a&0\end{bmatrix},\quad B(t,x,\xi)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\b_2&b_1+e&b_0\end{bmatrix}$$

$$S(t,x,\xi)=\begin{bmatrix}a^2&3b&-a\\3b&2a&0\\-a&0&3\end{bmatrix}\quad(\Longleftarrow p\text{ と }q=\partial p/\partial\tau\text{ の Bézout 行列})$$

$$(p(\tau)q(\zeta)-p(\zeta)q(\tau))/(\tau-\zeta)=\Sigma_{i,j=1}^m s_{ij}\tau^{i-1}\zeta^{j-1},\ \ S=(s_{ij})$$

S は正定符号対称行列 ($\det S = \Delta(p)$, $|\xi| \to \infty$ で退化) で SA は対称

対称化行列 S をさらに対角化する.

$T^{-1}ST = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$.

$V = \mathrm{op}(T^{-1})U$ とおくと (T は直交行列)

$$D_t V = \tilde{A}(t,x,D)\langle D\rangle V + \tilde{B}(t,x,D)V,$$
$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}A[\langle D\rangle, T] + T^{-1}BT - T^{-1}D_t T$$

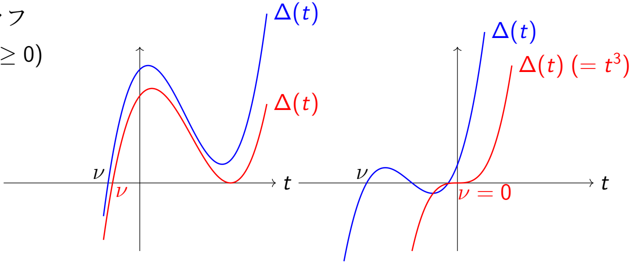
Λ は $\tilde{A}$ の対称化行列，すなわち $\Lambda\tilde{A}$ は対称行列.

$$\Delta/a \lesssim \lambda_1 \lesssim a^2, \quad \lambda_2 \simeq a, \quad \lambda_3 \simeq 1, \quad (t \geq 0) \qquad (\star)$$

$a \simeq e(t + \alpha + \langle\xi\rangle^{-1})$ と $\Delta = 4a^3 - 27b^2 \geq 0 \Longrightarrow \Delta \approx t$ の 3 次多項式 $\Longrightarrow \Delta/a \approx t$ の 2 次多項式.

$\Delta(t)$ のグラフ

$\Delta(t) \geq 0 \ \ (t \geq 0)$



$\Delta(t)/t \gtrsim c \min\{t^2, (t-\psi)^2\}$ を満たす ψ を探す

Weight ω, ϕ の定義

$\rho = \alpha + \langle\xi\rangle^{-1}$ とおく $(a = e(t+\rho))$.

$\Delta \approx t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = (t-\nu)((t+(\nu+a_1)/2)^2 - D)$.

$(\nu + a_1)/2 < {}^{\exists}c_1\rho \Longrightarrow |\nu - \nu_j| > {}^{\exists}c_2\rho$ (ν_j は $\Delta = 0$ の他の 2 根)

$$\Longrightarrow \begin{cases} \psi := -\chi\Big(\dfrac{\nu+a_1}{2c_1\rho}\Big)\dfrac{\nu+a_1}{2}, \quad \chi(s)=1, s\le 0, \chi(s)=0, s\ge 1, \\ \Delta/(t+\rho) \ge {}^{\exists}c\min\{t^2, (t-\psi)^2\} \end{cases}$$

$\omega^2 = (t-\psi(x,\xi))^2 + \rho\langle\xi\rangle^{-1}$ $(t\ge 0)$ と定義する． $t \ge 0$ で

$$(\lambda_1 \gtrsim)\ \ \Delta/a \gtrsim \min\{t^2, \omega^2\} \qquad (\star\star)$$

Regularity loss は $t=0$ を出発するときと $t=\psi$ を通過するとき.

$\phi = t - \psi + \omega = t - \psi + \sqrt{(t-\psi)^2 + \rho\langle\xi\rangle^{-1}}$ とする．ϕ の挙動は

$$\phi: \quad \rho\langle\xi\rangle^{-1}(t<\psi) \to \rho^{1/2}\langle\xi\rangle^{-1/2}(t\approx\psi) \to c>0(t>\psi),$$
$$\phi^{-N}: \langle\xi\rangle^{2N}(1+\alpha\langle\xi\rangle)^{-N} \to \langle\xi\rangle^{N}(1+\alpha\langle\xi\rangle)^{-N/2} \to C>0$$

直感的には

$$\|\mathrm{op}(\phi^{-N})u\| \lesssim C \Longleftarrow u: H^{2N}(t<\psi) \to H^{N}(t\approx\psi) \to L^2(t>\psi),$$

$v = u - \Sigma_{j=0}^{N}\partial_t^j u(0,x)t^j/j!$ とおくと $v = O(t^{N+1}),\ Pv = O(t^{N-1})$

$$\Longrightarrow \|t^{-N}v\| \lesssim C, \|v\| \lesssim C \Longrightarrow \|u\| \lesssim \|u(0,\cdot)\|_{H^{N+1}} + \|\partial_t u(0,\cdot)\|_{H^N}$$

$w = t\phi$ とすると

$$\partial_t w^{-N} = -N\big(1/t + 1/\omega\big)w^{-N} = -N\kappa w^{-N}$$

Weight とエネルギー

$$\text{Weighted energy: } \mathcal{E}(u) = e^{-\theta t}(\mathrm{op}(\Lambda)\mathrm{op}(w^{-N})V, \mathrm{op}(w^{-N})V)$$

$$= e^{-\theta t}\sum_{j=1}^{3}(\mathrm{op}(\lambda_j)\mathrm{op}(w^{-N})V_j, \mathrm{op}(w^{-N})V_j) \quad (\theta > 0)$$

$\partial_t V = i\tilde{A}\langle D\rangle V + i\tilde{B}V, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \ \Lambda\tilde{A}$ は対称.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \Longrightarrow -2Ne^{-\theta t}\mathrm{Re}(\mathrm{op}(\kappa\Lambda)\mathrm{op}(w^{-N})V, \mathrm{op}(w^{-N})V)$$

$$+e^{-\theta t}(\mathrm{op}(\partial_t\Lambda)\mathrm{op}(w^{-N})V, \mathrm{op}(w^{-N})V)$$

$$+2e^{-\theta t}\mathrm{Re}(\mathrm{op}(\Lambda)\mathrm{op}(w^{-N})(i\tilde{A}\langle D\rangle V + i\tilde{B}V), \mathrm{op}(w^{-N})V)$$

シンボルレベルでの計算例

$$|\partial_t \lambda_j| \lesssim \kappa\lambda_j,\ \ 1 \lesssim \kappa^2\lambda_1,\ \ 1 \lesssim \kappa a,\ \ \lambda_i^{1/2}\lambda_j^{-1/2} \lesssim a^{(j-i)/2}\ (\Longleftarrow (\star), (\star\star))$$

$W = \mathrm{op}(w^{-N})V$ として

$$\begin{gathered}
|\partial_t \lambda_j| \lesssim \kappa\lambda_j \Longrightarrow |((\partial_t \Lambda)W, W)| \lesssim ((\kappa\Lambda)W, W), \\
\Lambda\tilde{A}\ \text{対称} \Longrightarrow |(i\Lambda\tilde{A}\langle D\rangle W, W)| \lesssim \|W\|^2, \\
\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij}), \quad |(\Lambda\tilde{B}W, W)| = |\Sigma\lambda_i\tilde{b}_{ij}W_j \cdot \bar{W}_i| \\
= |\Sigma\tilde{b}_{ij}\lambda_i^{1/2}\lambda_j^{-1/2}\kappa^{-1}(\kappa^{1/2}\lambda_j^{1/2}W_j) \cdot (\kappa^{1/2}\lambda_i^{1/2}\bar{W}_i)|
\end{gathered}$$

ここで $|\tilde{b}_{ij}\lambda_i^{1/2}\lambda_j^{-1/2}| \lesssim |\tilde{b}_{ij}a^{(j-i)/2}| \lesssim a^{-1}$ を利用する． $a\kappa \gtrsim 1$ より

$$\lesssim \Sigma a^{-1}\kappa^{-1}((\kappa\Lambda)W, W) \lesssim ((\kappa\Lambda)W, W).$$