Hardy の不等式と様々な証明方法

近藤恵夢

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科　自然科学専攻

2024 年 11 月 16 日　奈良ウェーブレット研究集会

目次

Hardy の不等式

正項数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの平均をとる場合, 一般的には

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{1.1}$$

と取ることが多い.
このように, 「n 項まで足してから n で割る」平均の取り方を相加平均と呼ぶ.
非負値関数 f の相加平均 Hf は以下のように定義する.

$$Hf(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt. \tag{1.2}$$

Theorem 1.1 (1920, Hardy[7])

$p > 1$ とする. 任意の非負値関数 f に対し, 以下の（相加平均に関する）Hardy の不等式が成り立つ.

$$\int_0^\infty (Hf(x))^p dx \le C \int_0^\infty f(x)^p dx \tag{1.3}$$

ただし C は定数.

相加平均とは別に, 以下のような平均の取り方を考えることもできる.

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}. \tag{1.4}$$

このように,「n 項までかけてから n 乗根をとる」平均の取り方を幾何平均（相乗平均）と呼ぶ.

非負値関数 f の幾何平均 $Gf(x)$ は以下のように定義される.

$$Gf(x) := \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right\}. \tag{1.5}$$

非負値関数 f に対し, 幾何平均に関する Hardy の不等式を以下のように定義する.

$$\int_0^\infty Gf(x)dx \le C\int_0^\infty f(x)dx. \tag{1.6}$$

なおこの不等式は Pólya-Knopp の不等式と呼ばれることもある.

W を, 局所可積分な非負値関数であり, かつある正の数 q が存在して任意の $r > 0$ に対し $\int_r^\infty x^{-q} W(x)dx < \infty$ が成り立つものとする.

今回の研究では非増加な関数 f に対する以下の不等式, すなわち重み付きの幾何平均に関する Hardy の不等式が成り立つための重み W に関する必要十分条件は何かを考える.

$$\int_0^\infty Gf(x)W(x)dx \leq C \int_0^\infty f(x)W(x)dx \tag{1.7}$$

Carleson の結果の拡張

$[0, \infty)$ 上の関数 m が凸関数である場合, m' は増加関数であり, $e^{-m'(x)}$ は非増加関数である. m は任意の関数だから $e^{-m'(x)}$ は任意の非増加関数であると言える.

また, $m(0) = 0$ であるとき,

$$G(e^{-m'})(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x (-m'(t))\,dt\right) = e^{-m(x)/x}$$

となる.

以上を踏まえて, 1954 年に Carleson が非増加関数に対する幾何平均的な Hardy の不等式に, 重みとして x^p $(-1 < p < \infty)$ を加えた不等式を示した.

Theorem 1.2 (1954, Carleson[5])

m は $[0,\infty)$ 上の凸関数で, $m(0)=0$ であるとする. また, $-1<p<\infty$ とする. このとき, 以下の不等式が成り立つ.

$$\int_0^\infty x^p e^{-m(x)/x}dx \le e^{p+1}\int_0^\infty x^p e^{-m'(x)}dx.$$

$$\int_0^\infty x^p Gf(x)dx \le e^{p+1}\int_0^\infty x^p f(x)dx.$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^\infty x^p e^{-m(x)/x}dx \le e^{p+1}\int_0^\infty x^p e^{-m'(x)}dx.$$

m は任意の凸関数だから, $e^{-m'(x)}$, すなわち f は任意の非増加な関数に制限されている.

私たちは Carleson の証明を参考にしながら, 重みをさらに一般化した場合に不等式が成り立つ条件を示した.

Theorem 1.3

$a > 1$ と重み関数 $W > 0$ に対して, doubling condition

$$\int_0^{ar} W(x)dx \le C_a \int_0^r W(x)dx \tag{1.8}$$

が任意の $r > 0$ に対して成り立つとき,

$$\int_0^\infty e^{-m(x)/x} W(x)dx \le C \int_0^\infty e^{-m'(x)} W(x)dx \tag{1.9}$$

が, $m(0) = 0$ をみたす任意の凸関数 $m(x)$ に対して成り立つ.

Theorem1.3 の証明

m が凸関数であることから, $a > 1$ に対して $m(ax) \geq m(x) + (a-1)xm'(x)$ となり, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} &\int_0^r e^{-m(x)/x} W(x)dx \\ &\leq \left(\int_0^{r/a} e^{-m(x)/x} aW(ax)dx \right)^{1/a} \left(\int_0^{r/a} e^{-m'(x)} aW(ax)dx \right)^{(a-1)/a} \end{aligned} \tag{1.10}$$

が得られる（$aW(ax)dx$ を測度としている）.

$e^{-m(x)/x}$, $e^{-m'(x)}$ は非増加関数である. また doubling condition から

$$\int_0^r aW(ax)dx \leq C_a \int_0^r W(x)dx \tag{1.11}$$

が従う. ここで次の lemma を思い出しておく.

（Bennett, Sharpley の"Interpolation of Operators"[2] より）

Lemma 1.4 (Hardy の lemma)

a_1 と a_2 は $(0, \infty)$ 上の非負値可測関数で, 全ての $t > 0$ に対して

$$\int_0^t a_1(s)ds \leq \int_0^t a_2(s)ds \tag{1.12}$$

を満たすとする. b が $(0, \infty)$ 上の非負非増加な関数であるとき, すべての $0 < R \leq \infty$ に対して

$$\int_0^R a_1(s)b(s)ds \leq \int_0^R a_2(s)b(s)ds \tag{1.13}$$

が成り立つ.

$a_1(x) = aW(ax), a_2(x) = W(x)$ とし, $b(x) = e^{-m(x)/x}$ または $b(x) = e^{-m'(x)}$ とすることによって

$$\int_0^r e^{-m(x)/x} aW(ax)dx \leq C_a \int_0^r e^{-m(x)/x} W(x)dx, \tag{1.14}$$

$$\int_0^r e^{-m'(x)} aW(ax)dx \leq C_a \int_0^r e^{-m'(x)} W(x)dx \tag{1.15}$$

が得られる.

先ほどの式

$$\int_0^{r/a} e^{-m(x)/x} aW(ax)dx \leq \int_0^{r} e^{-m(x)/x} aW(ax)dx \leq C_a \int_0^{r} e^{-m(x)/x} W(x)dx, \quad (1.14)$$

$$\int_0^{r/a} e^{-m'(x)} aW(ax)dx \leq \int_0^{r} e^{-m'(x)} aW(ax)dx \leq C_a \int_0^{r} e^{-m'(x)} W(x)dx \quad (1.15)$$

と, その前に得ていた式

$$\begin{aligned} &\int_0^{r} e^{-m(x)/x} W(x)dx \\ &\leq \left(\int_0^{r/a} e^{-m(x)/x} aW(ax)dx\right)^{1/a} \left(\int_0^{r/a} e^{-m'(x)} aW(ax)dx\right)^{(a-1)/a} \end{aligned} \quad (1.10)$$

から

$$\int_0^{r} e^{-m(x)/x} W(x)dx \leq C_a^{a/(a-1)} \int_0^{r} e^{-m'(x)} W(x)dx \quad (1.16)$$

が得られる. $r \to \infty$ とすれば, 式 (1.9) が得られる.

$\square$

（先ほどの式）

$$\int_0^\infty e^{-m(x)/x} W(x)dx \leq C_a^{a/(a-1)} \int_0^\infty e^{-m'(x)} W(x)dx. \tag{1.16}$$

Carleson[5] では $W(x) = x^p$ $(p > -1), C_a = a^{p+1}$ の場合が証明されている.
$a \to 1$ としたとき $\{a^{p+1}\}^{a/(a-1)} \to e^{p+1}$ であり, e^{p+1} が最良定数であることも示されている.

なお, 式 (1.16) の等号を外せるかどうかはここでは議論しない.

Carleman の不等式との関わり

1923 年に Carleman[4] が, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するような正項数列 $\{a_n\}$ を用いた相乗平均に関する以下の不等式を示した.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1.17}$$

なお, この不等式において e は最良定数である.

（証明）Garling の文献 [6] より引用.
$m_n = n(1+1/n)^n$ とすると $m_1 \cdots m_n = (n+1)^n$ となる. また, $b_n = m_n a_n$ と定める. このとき,

$$(n+1)(a_1 \dots a_n)^{1/n} = (b_1 \dots b_n)^{1/n} \le (b_1 + \cdots + b_n)/n$$

となる. よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \dots a_n)^{1/n} &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j a_j < e \sum_{j=1}^{\infty} a_j\end{aligned}$$

となり, 不等式 (1.17) が示された.

□

Ariño, Muckenhoupt の結果の拡張

Ariño, Muckenhoupt の結果との関わりを述べるために, 以下の用語を準備する.

$[0, \infty)$ 上の非負値関数 W が B_p 条件を満たすことを, すべての $r > 0$ に対し以下の不等式が成り立つことと定義する. ただし B は定数.

$$\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^p W(x)dx \leq B \int_0^r W(x)dx. \tag{1.18}$$

$[0, \infty)$ 上の非負値関数 W が B_∞ 条件を満たすとは, B_p 条件を満たすような, $[1, \infty)$ の範囲にある p が存在することと定義する.

Ariño と Muckenhoupt は 1990 年に以下の定理を示した.

Theorem 1.5 (1990, Ariño, Muckenhoupt[1])

$1 \leq p < \infty$ とし, W は $[0, \infty)$ 上の非負値関数とする. 任意の非増加な関数 f に対して以下の重み付き Hardy の不等式

$$\int_0^\infty (Hf(x))^p W(x)dx \leq C \int_0^\infty f(x)^p W(x)dx. \tag{1.19}$$

が成り立つためには, 重み関数 W が B_p 条件を満たすことが必要十分である.

$Hf(x)$ は f の相加平均で,

$$Hf(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

と定義されていた.

（先ほどの定理の式）

$$\int_0^\infty (Hf(x))^p W(x)dx \leq C \int_0^\infty f(x)^p W(x)dx. \tag{1.19}$$

$\lim_{p\to\infty} H(f^{1/p})(x)^p = Gf(x)$ であることから, 式 (1.19) の両辺の f を $f^{1/p}$ に置き換えて形式的に $p \to \infty$ とすると次のような形の式になる.

$$\int_0^\infty Gf(x)W(x)dx \leq C \int_0^\infty f(x)W(x)dx \tag{1.7}$$

私たちは, Ariño と Muckenhoupt の証明をなぞることで以下の定理を導いた.

Theorem 1.6

ある定数 C が存在し, $[0,\infty)$ 上の任意の正値非増加関数 f に対して次の不等式

$$\int_0^\infty Gf(x)W(x)dx \le C\int_0^\infty f(x)W(x)dx \tag{1.7}$$

が成り立つためには, W が B_∞ 条件を満たすことが必要十分である.

以上より, 次の図のような関係が成り立っている.

(I)⇒(II) と (II)⇔(III) は Sbordone, Wik[10] によって証明されている.

I

非増加な非負値関数 f に対する, 以下の不等式が成り立つ.

$$\int_0^\infty Gf(x)W(x)dx \le C\int_0^\infty f(x)W(x)dx. \quad (1.7)$$

II

doubling condition

$$\int_0^{ar} W(x)dx \le C_a \int_0^r W(x)dx. \quad (1.8)$$

III

W が B_∞ 条件を満たす.

Hardy の不等式のさらなる一般化

Hardy の不等式を以下のようにさらに一般化した場合, 重みに対する条件はどう変化するかを調べたい.

Question 1

$0 < p, q < \infty$ かつ $V, W > 0$ とする. 不等式

$$\int_0^\infty (Gf(x))^q V(x)dx \leq C \int_0^\infty f(x)^p W(x)dx,$$

for all f on $[0, \infty)$: nonincreasing

が成り立つための V, W に対する必要十分条件は？ best constant は？ (今回は $p = q, V = W$ の場合を考えた)

- 2002, Persson and Stepanov[9]
  $0 < p, q < \infty$, $V, W > 0$

$$\int_0^\infty (Gf(x))^q V(x)dx \le C \int_0^\infty f(x)^p W(x)dx,$$

for all f on $[0, \infty)$.

- 2006, Bennett and Grosse-Erdmann[3]
  $0 < p, q < \infty$, $V, W > 0$

$$\int_0^\infty (Hf(x))^p V(x)dx \le C \int_0^\infty f(x)^p W(x)dx,$$

for all f on $[0, \infty)$: nonincreasing.

参考文献 I

[1] M. Ariño and B. Muckenhoupt.
Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions.
Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 320, pp. 727–735, 1990.

[2] C. Bennett and R. Sharpley.
Interpolation of Operators.
Academic Press, 1988.

[3] G. Bennett and K.-G. Grosse-Erdmann.
Weighted hardy inequalities for decreasing sequences and functions.
Math. Ann., Vol. 334, pp. 489–531, 2006.

[4] T. Carleman.
Sur les fonctions quasi-analytiques.
Conférences faites au cinquième congrès des mathematiciens Scandinaves, Helsingfors, pp. 181–196, 1923.

[5] L. Carleson.
A proof of an inequality of carleman.
Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 5, pp. 932–933, 1954.

参考文献 II

[6] D. J. H. Garling.
Inequalities: A Journey into Linear Analysis.
Cambridge University Press, 2007.

[7] G. H. Hardy.
Note on a theorem of Hilbert.
Math. Zeitschrift, Vol. 6, pp. 314–317, 1920.

[8] B. Muckenhoupt.
Hardy's inequality with weights.
Studia Math., Vol. 44, pp. 31–38, 1972.

[9] L. E. Persson and V. Stepanov.
Weighted integral inequalities with the geometric mean operator.
J. Inequal. Appl., Vol. 7, pp. 727–746, 2002.

[10] C. Sbordone and I. Wik.
Maximal functions and related weight classes.
Publi. Mat., Vol. 38, pp. 127–155, 1994.

付録：一般的な関数に対する Hardy の不等式について

Theorem 4.1 (1972, Muckenhoupt [8])

$1 < p < \infty$ であり, V, W は $[0, \infty)$ 上の正値関数（重み関数）$[0, \infty)$ 上の任意の非負関数 f に対して以下の重み付き不等式

$$\left[\int_0^\infty \left(V(x)\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right]^{1/p} \le C\left[\int_0^\infty (W(x)f(x))^p dx\right]^{1/p}. \tag{4.1}$$

を満たす定数 C が存在することの必要十分条件は, 以下の式が成り立つことである.

$$B = \sup_{r>0}\left[\int_r^\infty V(x)^p dx\right]^{1/p}\left[\int_0^r W(x)^{-p'} dx\right]^{1/p'} < \infty. \tag{4.2}$$

ただし $1/p + 1/p' = 1$ である.
さらに, (4.1) の定数 C が最小値であるならば,

$$B \le C \le p^{1/p}(p')^{1/p'}B$$

を満たす. この定数の評価は最良である.

Theorem 4.1 の証明の概略

まず, $1 < p < \infty$ のとき $C \leq Bp^{1/p}(p')^{1/p'}$ であることを証明する. そのためには, 以下を示す必要がある.

$$\left[\int_0^\infty \left(V(x)\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right]^{1/p} \leq Bp^{1/p}(p')^{1/p'}\left[\int_0^\infty (W(x)f(x))^p dx\right]^{1/p}. \tag{4.3}$$

これを示すために, $h(x) = \left[\int_0^x W(t)^{-p'}dt\right]^{1/pp'}$ とおく.
Hölder の不等式により (4.3) の左辺の p 乗は以下で上から抑えることができる.

$$\int_0^\infty V(x)^p \left[\int_0^x (f(t)W(t)h(t))^p dt\right]\left[\int_0^x (W(u)h(u))^{-p'}du\right]^{p/p'} dx. \tag{4.4}$$

Fubini の定理から, (4.4) は以下に等しいとわかる.

$$\int_0^\infty (f(t)W(t)h(t))^p \left(\int_t^\infty V(x)^p \left[\int_0^x (W(u)h(u))^{-p'}du\right]^{p-1} dx\right) dt. \tag{4.5}$$

（先ほどの式）

$$\int_0^\infty (f(t)W(t)h(t))^p \left(\int_t^\infty V(x)^p \left[\int_0^x (W(u)h(u))^{-p'} du \right]^{p-1} dx \right) dt. \tag{4.5}$$

式 (4.5) のうち

$$\int_t^\infty V(x)^p \left[\int_0^x (W(u)h(u))^{-p'} du \right]^{p-1} dx \tag{4.6}$$

の部分は内部の積分を計算すると

$$(p')^{p-1} \int_t^\infty V(x)^p \left[\int_0^x W(u)^{-p'} du \right]^{(p-1)/p'} dx \tag{4.7}$$

に等しい. ここで仮定にて B を

$$B = \sup_{r>0} \left[\int_r^\infty V(x)^p dx \right]^{1/p} \left[\int_0^r W(x)^{-p'} dx \right]^{1/p'} < \infty. \tag{4.2}$$

と定義していたので, (4.7) は

$$(Bp')^{p-1} \int_t^\infty V(x)^p \left[\int_x^\infty V(u)^p du \right]^{-1/p'} dx \tag{4.8}$$

で上から抑えられる.

（先ほどの式）

$$(Bp')^{p-1}\int_t^\infty V(x)^p\left[\int_x^\infty V(u)^p\,du\right]^{-1/p'}dx. \tag{4.8}$$

(4.8) の積分を計算すると,

$$p(Bp')^{p-1}\left[\int_t^\infty V(x)^p\,dx\right]^{1/p} \tag{4.9}$$

となる. B と h の定義からこれは,

$$pB^p(p')^{p-1}h(t)^{-p} \tag{4.10}$$

で抑えられる. 以上より,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty (f(t)W(t)h(t))^p\left(\int_t^\infty V(x)^p\left[\int_0^x (W(u)h(u))^{-p'}du\right]^{p-1}dx\right)dt\\ \leq &B^p p(p')^{p-1}\int_0^\infty (f(t)W(t))^p\,dt\end{aligned} \tag{4.11}$$

となり, (4.5) は (4.3) の右辺の p 乗で抑えられることがわかる. よって (4.3) の証明が完了した. 逆向き（$B \leq C$）の証明については割愛する.

$\square$

Theorem 1.6 の証明の概略

まず, $[0,\infty)$ 上の任意の正値非増加関数 f に対して幾何平均的な Hardy の不等式 (1.7) が成り立っていると仮定する. 任意の正の数 $r>0$ を固定して

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,r],\\ (2C)^{-1}\left(\frac{r}{x}\right)^{p} & x\in(r,\infty)\end{cases}$$

と定める. ただし p は $\int_r^\infty x^{-p}W(x)dx<\infty$ と $e^p>2C$ を満たす定数.

f をこのように定義して計算することにより, 以下の不等式を導くことができる.

$$\frac{1}{2}\int_r^\infty\left(\frac{r}{x}\right)^p W(x)dx\le(C-1)\int_0^r W(x)dx.$$

よって W が B_p 条件を満たすような p が存在するといえたため, W は B_∞ 条件を満たす.

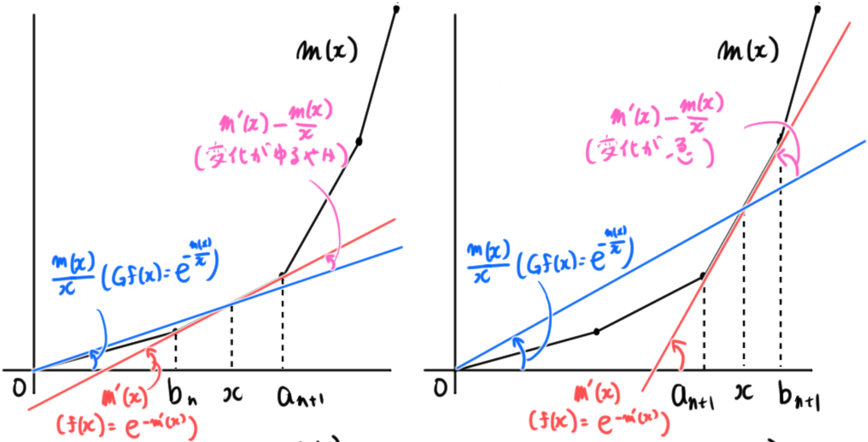
逆に, W が B_∞ 条件を満たす, すなわち W が B_p 条件を満たすような p が $1 \le p < \infty$ の範囲で存在すると仮定する.
表記を簡単にするため, Hardy の不等式について式 (1.7)

$$\int_0^\infty Gf(x)W(x)dx \le C\int_0^\infty f(x)W(x)dx \tag{1.7}$$

の代わりに式 (1.9)

$$\int_0^\infty e^{-m(x)/x}W(x)dx \le C\int_0^\infty e^{-m'(x)}W(x)dx \tag{1.9}$$

を取り扱うことにする.
数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を次の図のように適切に選ぶ.



$b_n \le x < a_{n+1} : m'(x) - \frac{m(x)}{x} \le p+1$　　$a_n \le x < b_n : m'(x) - \frac{m(x)}{x} \ge p$

$b_n \le x < a_{n+1}$ では $m'(x) - m(x)/x \le p + 1$ であることから

$$\int_{b_n}^{a_{n+1}} e^{-m(x)/x} W(x) dx \le e^{p+1} \int_{b_n}^{a_{n+1}} e^{-m'(x)} W(x) dx \tag{4.12}$$

となるため, この区間では Hardy の不等式が成り立っている.

一方 $a_n \le x < b_n$ のとき, B_p 条件などを利用することにより以下の不等式

$$\int_{a_n}^{b_n} e^{-m(x)/x} W(x) dx \le e^{p+1} e^{-m'(a_n)} B \int_0^{a_n} W(x) dx \tag{4.13}$$

を導ける（詳細は割愛）. この式の両辺を n について足し上げる.

$$
\begin{aligned}
\sum_n \left(\int_{a_n}^{b_n} e^{-m(x)/x} W(x)dx \right) &\leq e^{p+1} \sum_n B \left(e^{-m'(a_n)} \int_0^{a_n} W(x)dx \right) \\
&= e^{p+1} B \int_0^{\infty} \left[\sum_{a_n \geq x} e^{-m'(a_n)} \right] W(x)dx \\
&\leq e^{p+1} B \cdot \frac{e}{e-1} \int_0^{\infty} e^{-m'(x)} W(x)dx
\end{aligned}
$$

となる. なお, 最後の不等号は

$$
-m'(a_{n+1}) + 1 \leq -m'(a_n) \tag{4.14}
$$

が成り立つことを利用して無限等比級数を計算した（この式の導出方法については割愛する）.
この式と $b_n \leq x < a_{n+1}$ のときの結果を組み合わせれば, Hardy の不等式が成り立つといえる.

□