

パンディ-ウパディヤイのウェーブレット変換と関数の超局所的特異性について

李 旭

November 21, 2024

奈良ウェーブレット研究集会

奈良女子大学大学院 人間文化総合科学研究科
自然科学専攻 博士後期課程 3 回生

1. Pandey-Upadhyay によるウェーブレット変換について
2. 超局所の特異性について
3. 主定理
4. 参考文献

1. Pandey-Upadhyay によるウェーブレット変換について

関数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ が許容条件を満たすウェーブレットであるとは、以下に定義される C_ψ が 0 とは異なる有限値である時をいう。

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \cdots \omega_n|}.$$

このとき、関数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ の Pandey-Upadhyay[PU] によるウェーブレット変換は次のように定義される。

Definition 1

$$W_\psi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) |\xi_1 \cdots \xi_n| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \dots, \xi_n(t_n - x_n)) dt,$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \xi \in (\mathbb{R} - \{0\})^n.$$

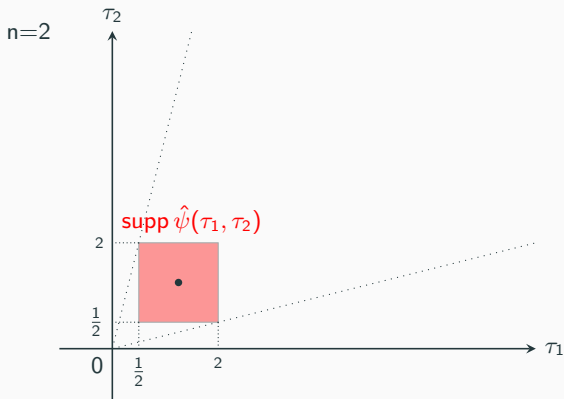
また [PU] によるウェーブレット逆変換公式は以下の通りである。

$$f(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} - \{0\})^n} W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \cdots \xi_n| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \dots, \xi_n(t_n - x_n))$$
$$\times \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

ウェーブレット関数 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ のフーリエ変換は以下の通り.

$$(\mathcal{F}\psi)(\tau) = \hat{\psi}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t_1, \dots, t_n) e^{-i(t_1\tau_1 + \dots + t_n\tau_n)} dt, \quad \tau \in \mathbb{R}^n.$$

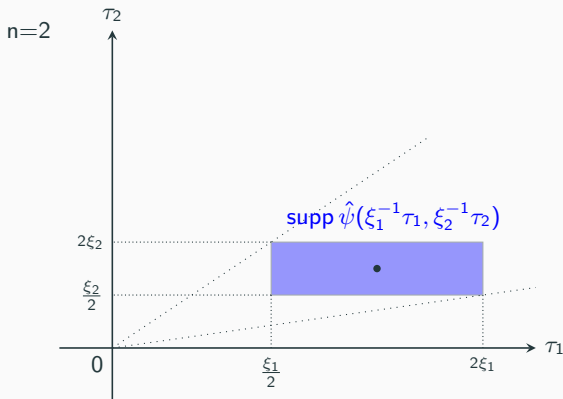
この関数のサポートは立方体 $[1/2, 2]^n$ に含まれているものとする.



$W_\psi f(x, \xi)$ の x に関するフーリエ変換は以下の通り.

$$(\mathcal{F}(W_\psi f))(\tau) = (W_\psi f)^\wedge(\tau_1, \dots, \tau_n) = \hat{f}(\tau_1, \dots, \tau_n) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \dots, \xi_n^{-1} \tau_n).$$

この関数のサポートは直方体 $[(1/2)\xi_1, 2\xi_1] \times \dots \times [(1/2)\xi_n, 2\xi_n]$ に含まれている.



2. 超局所の特異性について

Definition 1 で定義したウェーブレット変換を用いた超局所の特異性を次のように定義する。

Definition 2

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi^0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} - \{0\})^n$, $s \geq 0$ とする. f が (x_0, ξ^0) において [PU] の意味でソボレフ空間 H^s に属するとは, x_0 のある近傍 $U(x_0)$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty \quad (1)$$

が成立することである。

2. 超局所の特異性について

Definition 1 で定義したウェーブレット変換を用いた超局所の特異性を次のように定義する。

Definition 2

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi^0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} - \{0\})^n$, $s \geq 0$ とする. f が (x_0, ξ^0) において [PU] の意味でソボレフ空間 H^s に属するとは, x_0 のある近傍 $U(x_0)$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty \quad (1)$$

が成立することである。

Definition 3(Hörmander)

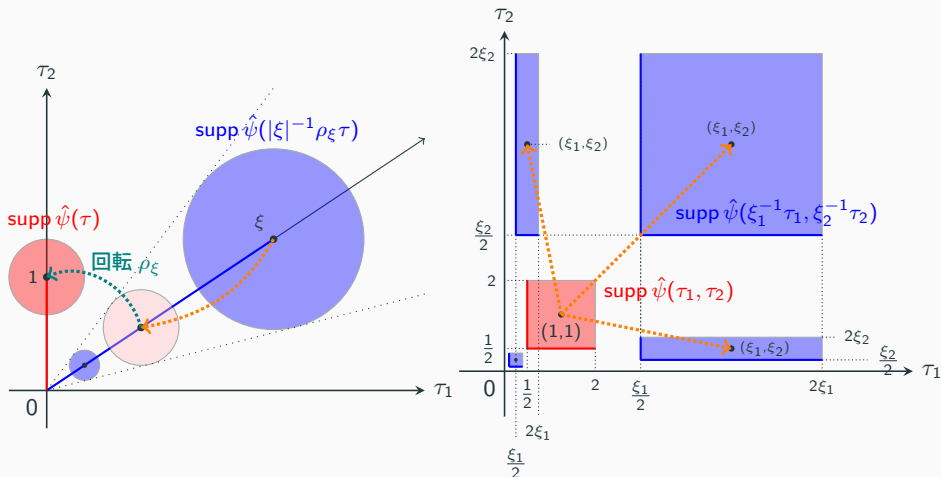
$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi^0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, $s \geq 0$ とする. f が (x_0, ξ^0) において Hörmander の意味でソボレフ空間 H^s に属するとは, x_0 のある近傍で恒等的に 1 に等しい関数 $\phi \in C_0^\infty$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して

$$\int_{\Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty \quad (2)$$

が成立することである。

補足 1. Pandey-Upadhyay と Moritoh の比較

Moritoh [M] では動径方向の**拡大縮小**と**回転**が用いられている．それに対して，[PU] では各座標軸方向の**拡大縮小**が用いられている．



3. 主定理

以下は簡単のため $n = 2$ とし, $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$ の両座標とも正であるとする.

Theorem 1

$f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $(x_0, \xi^0) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_{>0})^2$, $s \geq 0$ とする.

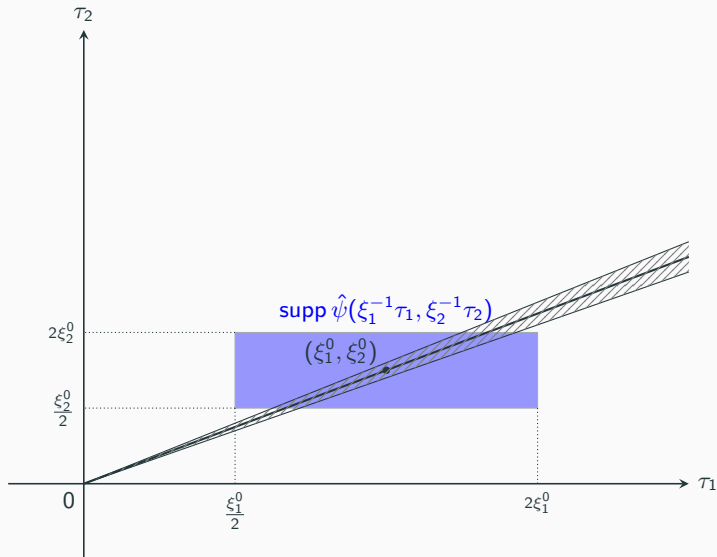
$$\Gamma_\psi(\xi^0) = \left\{ \tau = (\tau_1, \tau_2) \in (\mathbb{R}_{>0})^2 \mid \frac{\xi_1^0}{5\xi_2^0} < \frac{\tau_1}{\tau_2} < \frac{5\xi_1^0}{\xi_2^0} \right\} \quad (3)$$

によって定められる ξ^0 の錐近傍 $\Gamma_\psi(\xi^0)$ に対して (2) が成り立つならば, x_0 のある近傍 $U(x_0)$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して (1) が成り立つ. 逆に, x_0 のある近傍 $U(x_0)$ と (3) で定められた錐近傍 $\Gamma_\psi(\xi^0)$ に対して (1) が成り立つならば, x_0 のある近傍で恒等的に 1 に等しい関数 $\phi \in C_0^\infty$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して (2) が成り立つ.

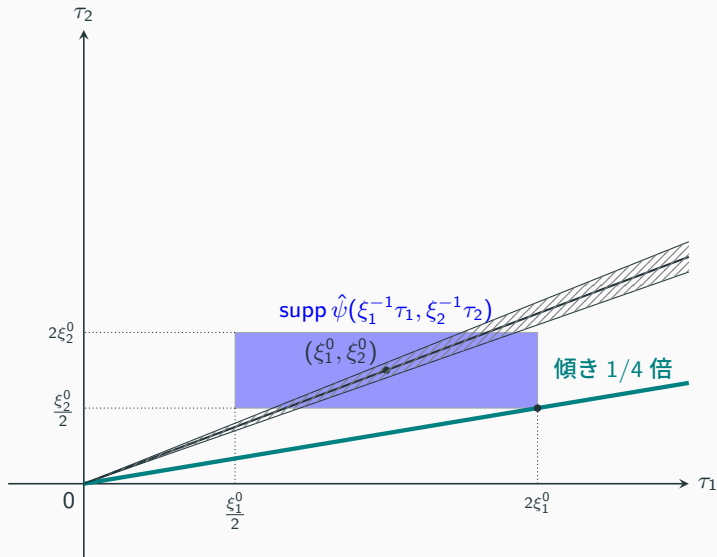
$$(1) : \iint_{U(x_0) \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty$$

$$(2) : \int_{\Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty$$

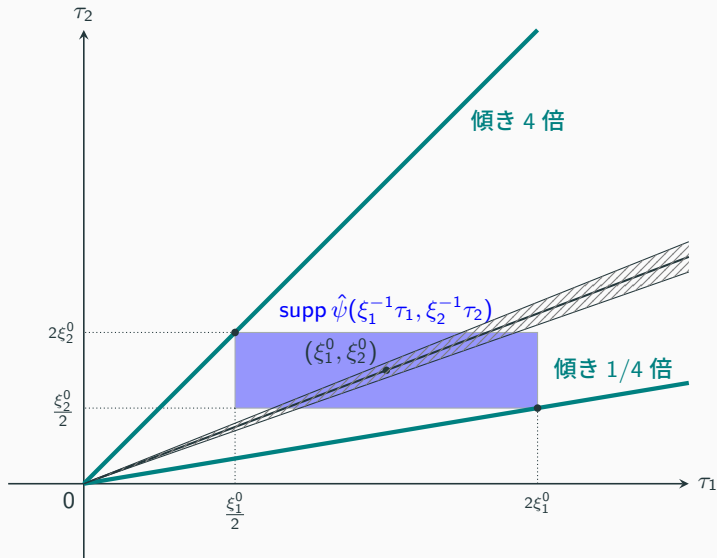
$\Gamma_\psi(\xi^0)$ の領域



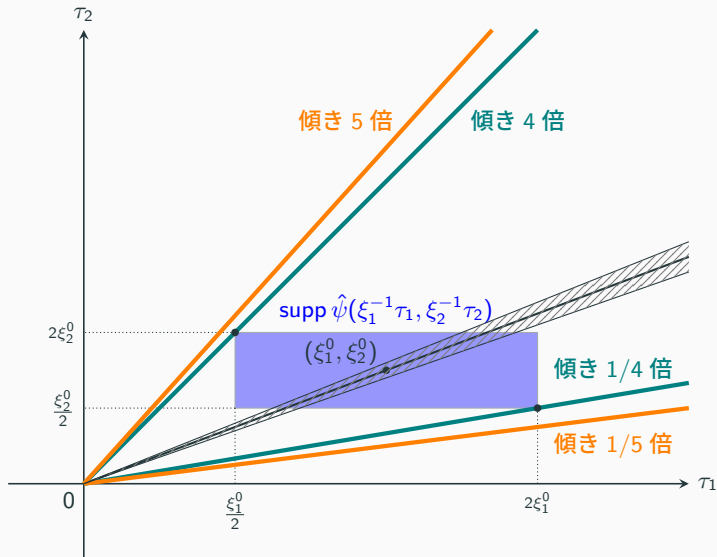
$\Gamma_\psi(\xi^0)$ の領域



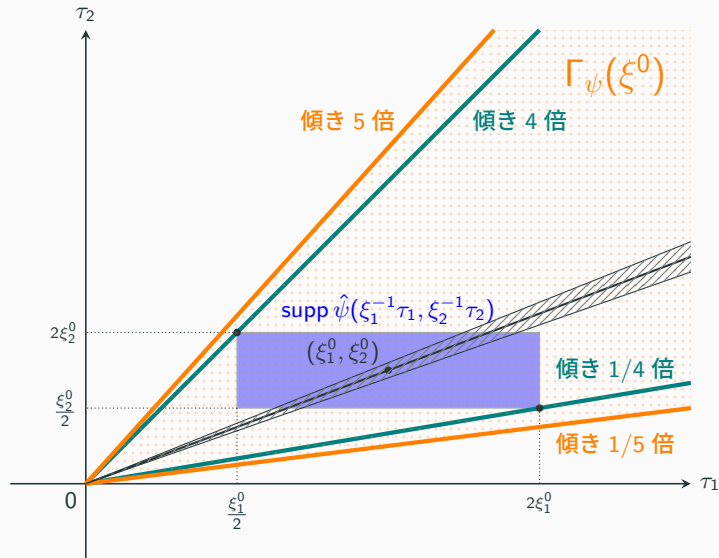
$\Gamma_\psi(\xi^0)$ の領域



$\Gamma_\psi(\xi^0)$ の領域



$\Gamma_\psi(\xi^0)$ の領域



補足 2. 波面集合を用いた書き方

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty$$
$$\Leftrightarrow (x_0, \xi^0) \notin \textcolor{red}{WF}_\psi^{(s)}(f),$$

$$\int_{\Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty$$
$$\Leftrightarrow (x_0, \xi^0) \notin \textcolor{blue}{WF}^{(s)}(f).$$

Theorem 1 の言い換え

$$\textcolor{red}{WF}_\psi^{(s)}(f) \subseteq \overline{\textcolor{blue}{WF}^{(s)}(f)}^\psi \text{ かつ } \textcolor{blue}{WF}^{(s)}(f) \subseteq \overline{\textcolor{red}{WF}_\psi^{(s)}(f)}^\psi.$$

前半：(3) かつ (2) ならば (1)

$$\Gamma_\psi = \left\{ \tau = (\tau_1, \tau_2) \in (\mathbb{R}_{>0})^2 \left| \frac{\xi_1^0}{5\xi_2^0} < \frac{\tau_1}{\tau_2} < \frac{5\xi_1^0}{\xi_2^0} \right. \right\}$$

によって定められる ξ^0 の錐近傍 $\Gamma_\psi(\xi^0)$ に対して

$$\int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty$$

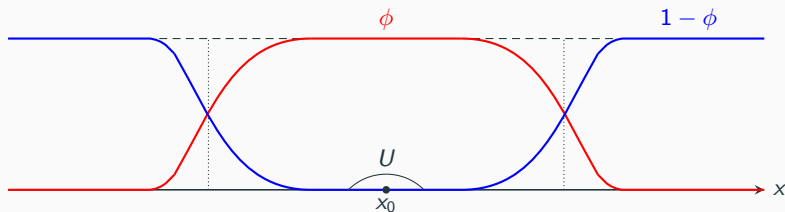
が成り立つならば、 x_0 のある近傍 $U(x_0)$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty$$

が成り立つ。

まず $W_\psi f(x, \xi)$ を 2 つに分ける．すなわち

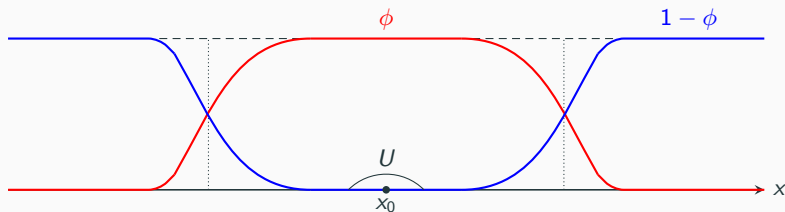
$$W_\psi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi f(t_1, t_2) |\xi_1 \xi_2| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) dt \\ + \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \phi) f(t_1, t_2) |\xi_1 \xi_2| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) dt.$$



$U(x_0)$ を $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x) = 1\}$ に含まれる x_0 の十分小さな近傍であるとする．

まず $W_\psi f(x, \xi)$ を 2 つに分ける．すなわち

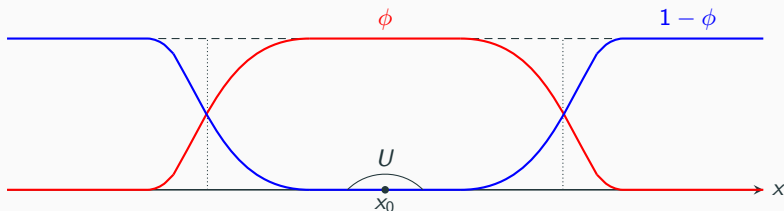
$$W_\psi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi f(t_1, t_2) |\xi_1 \xi_2| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) dt \\ + \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \phi) f(t_1, t_2) |\xi_1 \xi_2| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) dt.$$



$U(x_0)$ を $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x) = 1\}$ に含まれる x_0 の十分小さな近傍であるとする．
すると，2 つ目の式は $x \in U(x_0)$ について一様に ξ について急減少する．

まず $W_\psi f(x, \xi)$ を 2 つに分ける．すなわち

$$W_\psi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi f(t_1, t_2) |\xi_1 \xi_2| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) dt \\ + \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \phi) f(t_1, t_2) |\xi_1 \xi_2| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) dt.$$



$U(x_0)$ を $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x) = 1\}$ に含まれる x_0 の十分小さな近傍であるとする．
 すると，2 つ目の式は $x \in U(x_0)$ について一様に ξ について急減少する．**従って**
1 つ目の式の評価のみを考えればよい．

1 つ目の式の評価をする． ξ^0 の小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ として，
 $\Gamma(\xi^0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid (4/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \xi_1/\xi_2 < (5/4)(\xi_1^0/\xi_2^0)\}$ としておく．

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi(\phi f)(x, \xi)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{d\tau d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}. \end{aligned} \quad (4)$$

$\omega_1 = \xi_1^{-1} \tau_1, \omega_2 = \xi_2^{-1} \tau_2$ という変数変換を行う． $\hat{\psi}$ のサポートの条件から
 $1/2 < \omega_1, \omega_2 < 2$ なので，変数変換の仕方から $(1/4)(\xi_1/\xi_2) < \tau_1/\tau_2 < 4(\xi_1/\xi_2)$
 という評価ができる．従って，最初に定めた小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ の取り方より，
 $(1/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \tau_1/\tau_2 < 5(\xi_1^0/\xi_2^0)$ が得られる．従って

$$\begin{aligned} (4) &\leq \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \left(1 + \left|\frac{\tau_1}{\omega_1}\right|^2 + \left|\frac{\tau_2}{\omega_2}\right|^2\right)^s \frac{d\tau d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \\ &\leq \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 4^s (1 + |\tau|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

1 つ目の式の評価をする． ξ^0 の小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ として，
 $\Gamma(\xi^0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid (4/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \xi_1/\xi_2 < (5/4)(\xi_1^0/\xi_2^0)\}$ としておく．

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi(\phi f)(x, \xi)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{d\tau d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}. \quad (4) \end{aligned}$$

$\omega_1 = \xi_1^{-1} \tau_1, \omega_2 = \xi_2^{-1} \tau_2$ という変数変換を行う． $\hat{\psi}$ のサポートの条件から
 $1/2 < \omega_1, \omega_2 < 2$ なので，変数変換の仕方から $(1/4)(\xi_1/\xi_2) < \tau_1/\tau_2 < 4(\xi_1/\xi_2)$
 という評価ができる．従って，最初に定めた小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ の取り方より，
 $(1/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \tau_1/\tau_2 < 5(\xi_1^0/\xi_2^0)$ が得られる．従って

$$\begin{aligned} (4) &\leq \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \left(1 + \left|\frac{\tau_1}{\omega_1}\right|^2 + \left|\frac{\tau_2}{\omega_2}\right|^2\right)^s \frac{d\tau d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \\ &\leq \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 4^s (1 + |\tau|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

1 つ目の式の評価をする． ξ^0 の小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ として，
 $\Gamma(\xi^0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid (4/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \xi_1/\xi_2 < (5/4)(\xi_1^0/\xi_2^0)\}$ としておく．

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi(\phi f)(x, \xi)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{d\tau d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}. \quad (4) \end{aligned}$$

$\omega_1 = \xi_1^{-1} \tau_1, \omega_2 = \xi_2^{-1} \tau_2$ という変数変換を行う． $\hat{\psi}$ のサポートの条件から
 $1/2 < \omega_1, \omega_2 < 2$ なので，変数変換の仕方から $(1/4)(\xi_1/\xi_2) < \tau_1/\tau_2 < 4(\xi_1/\xi_2)$
 という評価ができる．従って，最初に定めた小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ の取り方より，
 $(1/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \tau_1/\tau_2 < 5(\xi_1^0/\xi_2^0)$ が得られる．従って

$$\begin{aligned} (4) &\leq \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \left(1 + \left|\frac{\tau_1}{\omega_1}\right|^2 + \left|\frac{\tau_2}{\omega_2}\right|^2\right)^s \frac{d\tau d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \\ &\leq \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 4^s (1 + |\tau|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

1 つ目の式の評価をする． ξ^0 の小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ として，
 $\Gamma(\xi^0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid (4/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \xi_1/\xi_2 < (5/4)(\xi_1^0/\xi_2^0)\}$ としておく．

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi(\phi f)(x, \xi)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{d\tau d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}. \quad (4) \end{aligned}$$

$\omega_1 = \xi_1^{-1} \tau_1, \omega_2 = \xi_2^{-1} \tau_2$ という変数変換を行う． $\hat{\psi}$ のサポートの条件から
 $1/2 < \omega_1, \omega_2 < 2$ なので，変数変換の仕方から $(1/4)(\xi_1/\xi_2) < \tau_1/\tau_2 < 4(\xi_1/\xi_2)$
 という評価ができる．従って，最初に定めた小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ の取り方より，
 $(1/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \tau_1/\tau_2 < 5(\xi_1^0/\xi_2^0)$ が得られる．従って

$$\begin{aligned} (4) &\leq \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \left(1 + \left|\frac{\tau_1}{\omega_1}\right|^2 + \left|\frac{\tau_2}{\omega_2}\right|^2\right)^s \frac{d\tau d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \\ &\leq \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 4^s (1 + |\tau|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

1 つ目の式の評価をする． ξ^0 の小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ として，
 $\Gamma(\xi^0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid (4/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \xi_1/\xi_2 < (5/4)(\xi_1^0/\xi_2^0)\}$ としておく．

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi(\phi f)(x, \xi)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{d\tau d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}. \quad (4) \end{aligned}$$

$\omega_1 = \xi_1^{-1} \tau_1, \omega_2 = \xi_2^{-1} \tau_2$ という変数変換を行う． $\hat{\psi}$ のサポートの条件から
 $1/2 < \omega_1, \omega_2 < 2$ なので，変数変換の仕方から $(1/4)(\xi_1/\xi_2) < \tau_1/\tau_2 < 4(\xi_1/\xi_2)$
 という評価ができる．従って，最初に定めた小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ の取り方より，
 $(1/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \tau_1/\tau_2 < 5(\xi_1^0/\xi_2^0)$ が得られる．従って

$$\begin{aligned} (4) &\leq \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \left(1 + \left|\frac{\tau_1}{\omega_1}\right|^2 + \left|\frac{\tau_2}{\omega_2}\right|^2\right)^s \frac{d\tau d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \\ &\leq \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 4^s (1 + |\tau|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

1 つ目の式の評価をする． ξ^0 の小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ として，
 $\Gamma(\xi^0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid (4/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \xi_1/\xi_2 < (5/4)(\xi_1^0/\xi_2^0)\}$ としておく．

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi(\phi f)(x, \xi)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{d\tau d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}. \quad (4) \end{aligned}$$

$\omega_1 = \xi_1^{-1} \tau_1, \omega_2 = \xi_2^{-1} \tau_2$ という変数変換を行う． $\hat{\psi}$ のサポートの条件から
 $1/2 < \omega_1, \omega_2 < 2$ なので，変数変換の仕方から $(1/4)(\xi_1/\xi_2) < \tau_1/\tau_2 < 4(\xi_1/\xi_2)$
 という評価ができる．従って，最初に定めた小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ の取り方より，
 $(1/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \tau_1/\tau_2 < 5(\xi_1^0/\xi_2^0)$ が得られる．従って

$$\begin{aligned} (4) &\leq \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \left(1 + \left|\frac{\tau_1}{\omega_1}\right|^2 + \left|\frac{\tau_2}{\omega_2}\right|^2\right)^s \frac{d\tau d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \\ &\leq \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 4^s (1 + |\tau|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

1 つ目の式の評価をする． ξ^0 の小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ として，
 $\Gamma(\xi^0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid (4/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \xi_1/\xi_2 < (5/4)(\xi_1^0/\xi_2^0)\}$ としておく．

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi(\phi f)(x, \xi)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{d\tau d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}. \quad (4) \end{aligned}$$

$\omega_1 = \xi_1^{-1} \tau_1, \omega_2 = \xi_2^{-1} \tau_2$ という変数変換を行う． $\hat{\psi}$ のサポートの条件から
 $1/2 < \omega_1, \omega_2 < 2$ なので，変数変換の仕方から $(1/4)(\xi_1/\xi_2) < \tau_1/\tau_2 < 4(\xi_1/\xi_2)$
 という評価ができる．従って，最初に定めた小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ の取り方より，
 $(1/5)(\xi_1^0/\xi_2^0) < \tau_1/\tau_2 < 5(\xi_1^0/\xi_2^0)$ が得られる．従って

$$\begin{aligned} (4) &\leq \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \left(1 + \left|\frac{\tau_1}{\omega_1}\right|^2 + \left|\frac{\tau_2}{\omega_2}\right|^2\right)^s \frac{d\tau d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \\ &\leq \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\tau)|^2 4^s (1 + |\tau|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

後半：(3) かつ (1) ならば (2)

x_0 のある近傍 $U(x_0)$ と

$$\Gamma_\psi = \left\{ \tau = (\tau_1, \tau_2) \in (\mathbb{R}_{>0})^2 \mid \frac{\xi_1^0}{5\xi_2^0} < \frac{\tau_1}{\tau_2} < \frac{5\xi_1^0}{\xi_2^0} \right\}$$

で定められた錐近傍 $\Gamma_\psi(\xi^0)$ に対して

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty$$

が成り立つならば、 x_0 のある近傍で恒等的に 1 に等しい関数 $\phi \in C_0^\infty$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して

$$\int_{\Gamma(\xi^0)} |(\phi f)^\wedge(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty$$

が成り立つ。

ウェーブレット逆変換公式

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} - \{0\})^2} W_{\psi} f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|},$$

$$C_{\psi} = \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|}$$

を用いて，関数 $f(t)$ を 2 つに分ける．すなわち $f = f_{\Gamma_{\psi}} + f_{\Gamma_{\psi}^c}$ とし

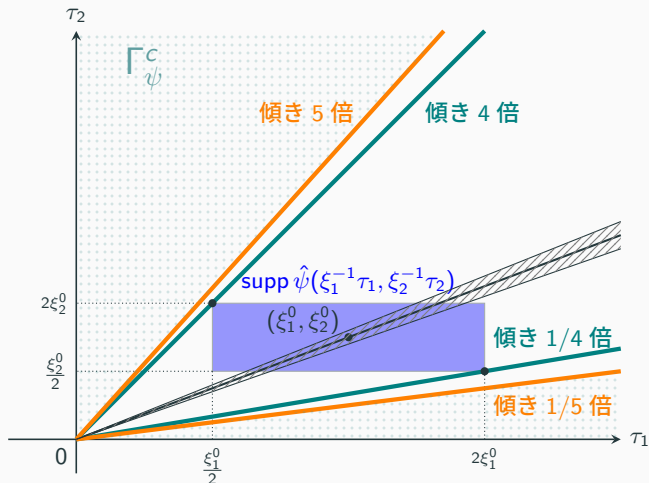
$$f_{\Gamma_{\psi}}(t) = C_{\psi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_{\psi}(\xi^0)} W_{\psi} f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|},$$

$$f_{\Gamma_{\psi}^c}(t) = C_{\psi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_{\psi}^c(\xi^0)} W_{\psi} f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}.$$

ここで $f_{\Gamma_\psi^c}(t)$ のフーリエ変換を考えると

$$\hat{f}_{\Gamma_\psi^c}(\tau) = \int_{\Gamma_\psi^c(\xi^0)} (W_\psi f)^\wedge(\tau, \xi) \hat{\psi}(\xi_1^{-1}\tau_1, \xi_2^{-1}\tau_2) \frac{d\xi}{|\xi_1\xi_2|}.$$

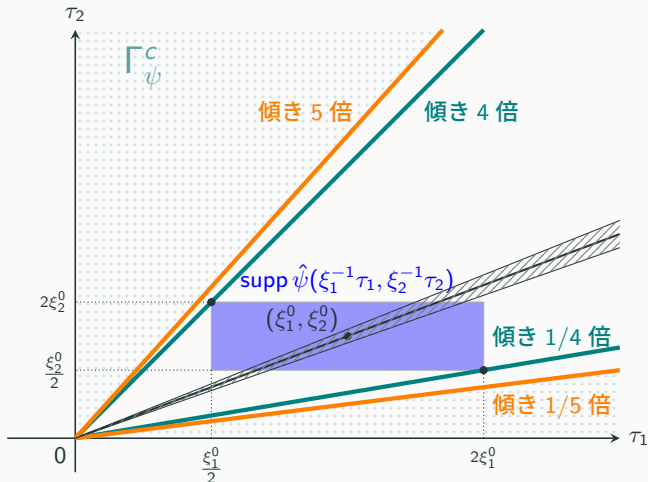
(τ_1, τ_2) が (ξ_1^0, ξ_2^0) の近傍にあるとすると, $(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_\psi^c(\xi^0)$ に対して $\hat{\psi}(\xi_1^{-1}\tau_1, \xi_2^{-1}\tau_2) \equiv 0$.



ここで $f_{\Gamma_\psi^c}(t)$ のフーリエ変換を考えると

$$\hat{f}_{\Gamma_\psi^c}(\tau) = \int_{\Gamma_\psi^c(\xi^0)} (W_\psi f)^\wedge(\tau, \xi) \hat{\psi}(\xi_1^{-1}\tau_1, \xi_2^{-1}\tau_2) \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}.$$

(τ_1, τ_2) が (ξ_1^0, ξ_2^0) の近傍にあるとすると, $(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_\psi^c(\xi^0)$ に対して $\hat{\psi}(\xi_1^{-1}\tau_1, \xi_2^{-1}\tau_2) \equiv 0$. 従って f_ψ の評価のみを考えればよい.



次に $U(x_0)$ にコンパクトサポートを持ち, x_0 のある近傍で恒等的に 1 に等しい関数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を用いて f_{Γ_ψ} を更に 2 つに分ける. すなわち

$$f_{\Gamma_\psi} = f_{\phi, \Gamma_\psi} + f_{1-\phi, \Gamma_\psi} \text{ とし}$$

$$f_{\phi, \Gamma_\psi}(t)$$

$$= C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} \phi(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|},$$

$$f_{1-\phi, \Gamma_\psi}(t)$$

$$= C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} (1 - \phi)(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}.$$

ここで $U'(x_0)$ を $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x) = 1\}$ に含まれる小さな近傍とすると, $f_{1-\phi, \Gamma_\psi}$ は $t \in U'(x_0)$ において C^∞ である.

次に $U(x_0)$ にコンパクトサポートを持ち, x_0 のある近傍で恒等的に 1 に等しい関数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を用いて f_{Γ_ψ} を更に 2 つに分ける. すなわち

$$f_{\Gamma_\psi} = f_{\phi, \Gamma_\psi} + f_{1-\phi, \Gamma_\psi} \text{ とし}$$

$$f_{\phi, \Gamma_\psi}(t)$$

$$= C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} \phi(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|},$$

$$f_{1-\phi, \Gamma_\psi}(t)$$

$$= C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} (1 - \phi)(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}.$$

ここで $U'(x_0)$ を $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x) = 1\}$ に含まれる小さな近傍とすると, $f_{1-\phi, \Gamma_\psi}$ は $t \in U'(x_0)$ において C^∞ である. 従って $f_{\phi, \Gamma_\psi}(t)$ がソボレフ空間 H^s に属することを示していけばよい.

$$f_{\phi, \Gamma_\psi}(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} \phi(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}$$

がソボレフ空間 H^s に属することを示していく.

$g(x, \xi) = \phi(x) W_\psi f(x, \xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ として, $f_{\phi, \Gamma_\psi}(t)$ のフーリエ変換を考えると

$$\hat{f}_{\phi, \Gamma_\psi}(\tau) = C_\psi^{-1} \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} \hat{g}(\tau, \xi) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2) \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}.$$

また, $g(x, \xi)$ を用いて元の仮定の

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty$$

を書き換えると

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |g(x, \xi)|^2 \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} < \infty$$

と書ける.

$$f_{\phi, \Gamma_\psi}(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} \phi(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}$$

がソボレフ空間 H^s に属することを示していく.

$g(x, \xi) = \phi(x) W_\psi f(x, \xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ として, $f_{\phi, \Gamma_\psi}(t)$ のフーリエ変換を考え
ると

$$\hat{f}_{\phi, \Gamma_\psi}(\tau) = C_\psi^{-1} \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} \hat{g}(\tau, \xi) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2) (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}.$$

また, $g(x, \xi)$ を用いて元の仮定の

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty$$

を書き換えると

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |g(x, \xi)|^2 \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} < \infty$$

と書ける.

$$f_{\phi, \Gamma_\psi}(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} \phi(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}$$

がソボレフ空間 H^s に属することを示していく.

$g(x, \xi) = \phi(x) W_\psi f(x, \xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ として, $f_{\phi, \Gamma_\psi}(t)$ のフーリエ変換を考え
ると

$$\hat{f}_{\phi, \Gamma_\psi}(\tau) = C_\psi^{-1} \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} \hat{g}(\tau, \xi) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2) (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}.$$

また, $g(x, \xi)$ を用いて元の仮定の

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty$$

を書き換えると

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |g(x, \xi)|^2 \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} < \infty$$

と書ける.

$$f_{\phi, \Gamma_\psi}(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} \phi(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}$$

がソボレフ空間 H^s に属することを示していく.

$g(x, \xi) = \phi(x) W_\psi f(x, \xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ として, $f_{\phi, \Gamma_\psi}(t)$ のフーリエ変換を考え
ると

$$\hat{f}_{\phi, \Gamma_\psi}(\tau) = C_\psi^{-1} \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} \hat{g}(\tau, \xi) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2) (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}.$$

また, $g(x, \xi)$ を用いて元の仮定の

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty$$

を書き換えると

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |g(x, \xi)|^2 \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} < \infty$$

と書ける.

$$f_{\phi, \Gamma_\psi}(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} \phi(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}$$

がソボレフ空間 H^s に属することを示していく.

$g(x, \xi) = \phi(x) W_\psi f(x, \xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ として, $f_{\phi, \Gamma_\psi}(t)$ のフーリエ変換を考え
ると

$$\hat{f}_{\phi, \Gamma_\psi}(\tau) = C_\psi^{-1} \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} \hat{g}(\tau, \xi) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2) (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}.$$

また, $g(x, \xi)$ を用いて元の仮定の

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty$$

を書き換えると

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} |g(x, \xi)|^2 \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} < \infty$$

と書ける.

ゆえにコーシー・シュワルツの不等式, フビニの定理, プランシュレルの定理, 仮定をもちいることで

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}_{\phi, \Gamma_\psi}(\tau)|^2 (1 + |\tau|^2)^s d\tau \\
 & \leq C_\psi^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |\hat{g}(\tau, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) \\
 & \quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 \left(\frac{1 + |\tau|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^s \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) d\tau \\
 & \leq C_\psi^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |\hat{g}(\tau, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) 4^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau \\
 & = 4^s C_\psi^{-1} \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |g(x, \xi)|^2 dx \right) \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} < \infty.
 \end{aligned}$$

ゆえにコーシー・シュワルツの不等式, フビニの定理, プランシュレルの定理, 仮定をもちいることで

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}_{\phi, \Gamma_\psi}(\tau)|^2 (1 + |\tau|^2)^s d\tau \\
 & \leq C_\psi^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |\hat{g}(\tau, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) \\
 & \quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 \left(\frac{1 + |\tau|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^s \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) d\tau \\
 & \leq C_\psi^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |\hat{g}(\tau, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) 4^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau \\
 & = 4^s C_\psi^{-1} \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |g(x, \xi)|^2 dx \right) \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} < \infty.
 \end{aligned}$$

ゆえにコーシー・シュワルツの不等式, フビニの定理, プランシュレルの定理, 仮定をもちいることで

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}_{\phi, \Gamma_\psi}(\tau)|^2 (1 + |\tau|^2)^s d\tau \\
 & \leq C_\psi^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |\hat{g}(\tau, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) \\
 & \quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 \left(\frac{1 + |\tau|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^s \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) d\tau \\
 & \leq C_\psi^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |\hat{g}(\tau, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) 4^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau \\
 & = 4^s C_\psi^{-1} \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |g(x, \xi)|^2 dx \right) \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} < \infty.
 \end{aligned}$$

ゆえにコーシー・シュワルツの不等式, フビニの定理, プランシュレルの定理, 仮定をもちいることで

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}_{\phi, \Gamma_\psi}(\tau)|^2 (1 + |\tau|^2)^s d\tau \\
 & \leq C_\psi^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |\hat{g}(\tau, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) \\
 & \quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 \left(\frac{1 + |\tau|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^s \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) d\tau \\
 & \leq C_\psi^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |\hat{g}(\tau, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \right) 4^s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \omega_2|} \right) d\tau \\
 & = 4^s C_\psi^{-1} \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |g(x, \xi)|^2 dx \right) \frac{d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} < \infty.
 \end{aligned}$$

4. 参考文献

- [H] L. Hörmander, *Fourier integral operators. I*, Acta Math. **127** (1971), no. 1–2, 79–183.
- [M] S. Moritoh, *Wavelet transforms in Euclidean spaces —their relation with wave front sets and Besov, Triebel-Lizorkin spaces—*, Tohoku Math. J. (2) **47** (1995), no. 4, 555–565.
- [PU] J. N. Pandey and S. K. Upadhyay, *The continuous wavelet transform and window functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 11, 4759–4773.