

不連続ポテンシャルをもつ半線形楕円型方程式の基底状態解の漸近挙動

豊田 洋平 (奈良工業高等専門学校)*

本講演で対象とするのは次のポテンシャルをもつ劣臨界半線形楕円型方程式である:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = u^{p-1}, & u > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

ここで $N \geq 3$, $2 < p < 2^* := 2N/N - 2$, $V(x) \geq 0$ とする. 単純な場合ではあるが $V(x) \equiv m > 0$ のとき,

$$-\Delta u + mu = u^{p-1}, \quad u > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

この方程式の解の性質は多くの結果が調べられている (存在性, 一意性, 球対称性, 基底状態解, 遠方での減衰評価等, また文献としては [6, 1, 5, 2] 等を参照). 一方で, $V(x) \equiv 0$ の場合,

$$-\Delta u = u^{p-1}, \quad u > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

このときは非自明な解は存在せず, いわゆるリューヴィル型の定理が成立し, 自明解 $u \equiv 0$ のみが得られる, [4]. ここではポテンシャル項と解の存在の有無の関係性に着目し, $V(x)$ が不連続な関数の場合での解の存在性とポテンシャルの変化に伴う解の漸近性について考察する. 改めて以降では次の方程式を扱う:

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\epsilon(x)u = u^{p_\epsilon-1}, & u > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1)$$

ここで $N \geq 3$, $0 < \epsilon \ll 1$, $2 < p_\epsilon = 2^* - \epsilon < 2^* = 2N/N - 2$ とし, さらに $V_\epsilon(x)$ に関して次の形を仮定する ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界領域でかつ $|\Omega| \neq 0$),

$$V_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \in \Omega, \\ \epsilon & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

ここでは方程式 (1) に対して非自明解の存在性および $\epsilon \rightarrow 0$ における解の漸近性について言及する. 非自明解の存在性に関して Nehari の変分原理を利用する. まずエネルギー汎関数は

$$I_\epsilon(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_\epsilon(x)|u|^2) dx - \frac{1}{p_\epsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_\epsilon} dx$$

であり, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して $I_\epsilon(\cdot)$ は well defined かつ $C^1(H^1, \mathbb{R})$ である. さらに, Nehari 多様体およびその臨界値を次で定義する.

$$\mathcal{N}_\epsilon := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \mid I'_\epsilon(u)[u] = 0\}, \quad m_\epsilon := \inf_{\mathcal{N}_\epsilon} I_\epsilon(u).$$

本誌は奈良女大・埼玉関数不等式研究での講演資料である

* e-mail: y-toyota@libe.nara-k.ac.jp

また次の最小化問題の最良定数に注意する.

$$S = \inf_{\substack{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \\ |u|_{2^*}=1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad S_{p_\epsilon} = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \\ |u|_{p_\epsilon}=1}} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \epsilon |u|^2) dx,$$

ただし $|u|_t = (\int_{\mathbb{R}^N} |u|^t dx)^{1/t}$ であり, 各々の定数に対してミニマイザーが保証される.

定理 1. 方程式 (1) の基底状態解, すなわち $m_\epsilon = \inf_{N_\epsilon} I_\epsilon(u)$ を達成する $u_\epsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在する. また u_ϵ に対して次の等式が成立する.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\epsilon|^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon|^{p_\epsilon} dx = S^{\frac{N}{2}}, \quad (2)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} V_\epsilon(x) |u_\epsilon|^2 dx = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon|^{2^*} dx = S^{\frac{N}{2}}. \quad (3)$$

さらに, 部分列をとると, ある非自明な $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ が存在して $u_\epsilon \rightharpoonup u$ in $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ でかつ次を満たす.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = S^{\frac{N}{2}}. \quad (4)$$

注意. (i) $\epsilon = 0$ としたときの形式的な極限方程式は $-\Delta u = u^{2^*-1}$ in $\mathbb{R}^N$ であり次のタイプの解 (*Aubin-Talenti* 関数) をもつ:

$$U(x) = \frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |U|^{2^*} dx = S^{\frac{N}{2}}.$$

従って定理 1 の極限関数 u は *Aubin-Talenti* 関数の性質を満たしていることがわかる. また (2), (3), および (4) の関係から直ちに $u_\epsilon \rightarrow u$ in $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ と $u_\epsilon \rightarrow u$ in $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ の強収束性が得られることがわかる.

(ii) $\tilde{u}_\epsilon = u_\epsilon / (\int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon|^{2^*} dx)^{\frac{1}{2^*}}$ を導入すると, (2), (3), (4) の関係から $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}_\epsilon|^2 dx \rightarrow S$ かつ $\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_\epsilon|^{2^*} dx = 1$ となる. このことから $\tilde{u}_\epsilon$ は S に対する最小化列の性質を満たすので, この $\tilde{u}_\epsilon$ に対して [3] の議論 (凝集・集中原理) から, $(\tilde{u}_\epsilon)$ に平行移動および拡大縮小の変換を施すことで S に対する $D^{1,2}$ での相対コンパクト性が得られることがわかる. この事実に対して定理 1 ではこのような変換を施すことなく u_ϵ に対してのある意味でのコンパクト性が得られることを述べている.

参考文献

- [1] M. S. Berger, *On the existence and structure of stationary states for a nonlinear Klein-Gordon equation*, J. Func. Anal. **9**(1972) 249-261.
- [2] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I- Existence of a ground state*, Arch. Ration. Mech. Anal. **82**(1983) 313-346.
- [3] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I*, Rev. Mat. Iberoam. **1**(1985), no. 1, 145- 201.
- [4] B. Gidas and J. Spruck, *Global and Local Behavior of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations*, Comm. Pure and Appl. Math. (1981) 525-598.
- [5] M. K. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^N$* , Arc. Rational Mech. Anal. **105**(1989) 243-266.
- [6] Z. Nehari, *On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **62**(1963), 117-135.