

力学系の軌道分布と熱力学形式

追手門学院大学理工学部 盛田 健彦

講演では2次元無食散乱開撞球系をひな形として、熱力学形式と呼ばれる一般論を適用して力学系の軌道の分布を調べる手法を紹介した。本ノートでは講演内容を補足し参考文献を与える。

1. 2次元無食散乱開撞球系

力学系やエルゴード理論についての基礎知識については久保-矢野 [17] や Walters [31] が参考になる。とくに, [17] の第1部には本ノートで扱う2次元無食散乱開撞球系について詳しい説明が与えられている。井川 [11, 12] には散乱理論における修正 Lax-Phillips 予想への記号力学系の応用が扱われており, [13, 14] には, [11, 12] の研究手法に至った経緯についても触れられている。関連して [11, 12] で導入された記号力学系の特異摂動の考え方を発展させて, より汎用性の高いものにする定式化が [27] で提案されている。

$N \geq 3$ とし以下の条件を満たす N 個の有界領域 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N \subset \mathbb{R}^2$ を考える。

(H1)(散乱条件) 任意の $j(1 \leq j \leq N)$ に対して Q_j は凸領域で境界 ∂Q_j は C^3 級単純閉曲線。

(H2)(無食条件) 任意の相異なる添え字の三つ組 (j_1, j_2, j_3) に対して

$$\text{conv}(\overline{Q_{j_1}} \cup \overline{Q_{j_2}}) \cap \overline{Q_{j_3}} = \emptyset.$$

ここで, $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して $\text{conv}(A)$ は A の凸包 (A を包む最小の凸集合) を表す。

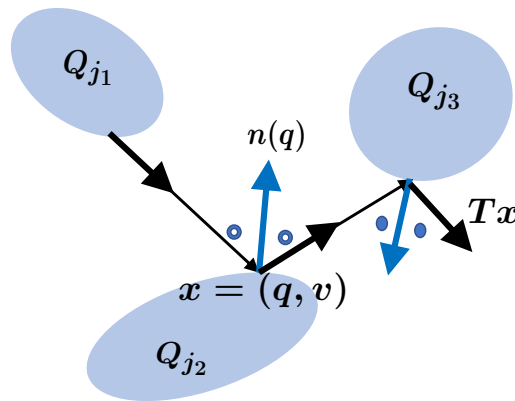


図 1

$x = (q, v)$ は $q \in \partial Q_{j_2}$ における反射状態であり, Tx が次の反射状態を表している。

補足. (1) **(力学系)** 図 1 を説明する前に力学系について書いておく．本ノートで力学系というときは、 M を想定しうる状態全体の空間とし、 $\mathbb{T}$ を時間の空間として $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, $\mathbb{Z}$, または $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ を考え、時間発展の規則が変換を要素とする半群 $\{T^t : t \in \mathbb{T}\}$ を用いて

$$\begin{cases} x_0 = x \in M, \\ x_t = T^t x \end{cases}$$

で与えられていることを意味している．したがって、状態空間と変換の族 $(M, \{T^t\})$, または、変換族 $\{T^t\}$ を力学系という．とくに、 $\mathbb{T}$ が $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、離散 (時間) 力学系という．より一般に「力学系とは幾何学的な対象への代数系の作用である」といってもよいだろう．

(2) 平面内を単位質量の質点が単位速度で等速直線運動する状況を考えてみよう．指定された時刻 0 における質点の位置 q と速度 v が与えられると、時刻 t における質点の状態 $x_t = (q_t, v_t)$ は

$$x_t = (q_t, v_t) = (q + tv, v)$$

となる．この場合、状態空間 M は $\mathbb{R}^2$ の単位接束

$$S\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times S^1 = \{x = (q, v) : q \in \mathbb{R}^2, v \in S^1\}$$

である．ただし、 $S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1\}$. $\pi : S\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (q, v) \mapsto q$ を自然な射影とする．

各領域 $\overline{Q_j}$ は**散乱体 (scatterer)** とか**障害物 (obstacle)** という．今回ひな形とするのは平面内の等速直線運動を少しだけ複雑にしたもので、散乱体の外部領域 $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^N Q_j$ では単位速度で等速直線運動し、境界 $\partial Q = \bigcup_{j=1}^N \partial Q_j$ において完全弾性衝突、すなわち、 ∂Q への入射角と反射角が等しい反射を行って運動を続ける質点の運動を記述する力学系である．状態空間は

$$M = \pi^{-1}Q \cup ((\pi^{-1}\partial Q)/\sim)$$

とするのが自然であろう．ただし、 $M_0 = (\pi^{-1}\partial Q)/\sim$ は ∂Q における入射状態 (q, u) と反射状態 (q, v) を同一視したもので、以後は代表元として反射状態を採用し

$$M_0 = \{x = (q, v) : (v, n(q)) \geq 0\}.$$

とみなすことにしよう．ここで、 $n(q)$ は領域 $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^N \overline{Q_j}$ の $q \in \partial Q$ における Q の単位内法線ベクトル (外部領域 Q の内部に向いていることに注意、図 1 参照)．

(3) ひな形の力学系は完全弾性衝突を伴うということで**撞球系 (billiard system)**と呼ばれる力学系の一種である．閉曲面や閉領域内に散乱体を配置した Sinai の撞球系 ([30]) が有名であるが，それに対して今回の撞球系は**開撞球系**と呼ばれるものに類する．領域 Q を**撞球台**ということもある．散乱開撞球や Sinai の撞球は‘カオスの’撞球の例である．カオスの撞球については Chernov-Markarian [5] を参照されたい．また，[15, 16] では Sinai の撞球を一般化した力学系のエルゴード理論的性質が調べられている．

力学系 $(M, \{T^t\}_{t \in \mathbb{T}})$ を考えるとき，状態空間の元 $x \in M$ に対して $\{T^t x\}_{t \in \mathbb{T}}$ を x の**軌道**という． $T^t x = x$ を満たす $t > 0$ が存在するとき t を x の**周期**といい， x は力学系 $\{T^t\}_{t \in \mathbb{T}}$ の**周期点**であるという．とくに， $p(x) = \min\{t > 0 : T^t x = x\}$ を x の**素周期**，または**最小周期**という．本ノートでは周期を表す記号としては，便宜上，離散時間の場合には「 p 」を，連続時間の場合には「 l 」を使うことがある．

周期点 x の軌道を**周期軌道**といい，集合 $\{y : y = T^t x \text{ for some } t (0 \leq t < p(x))\}$ と同一視する．周期軌道は γ などで表し， x の周期軌道であることを強調するとき $\gamma(x)$ などと書く．周期軌道 γ に対して $x \in \gamma$ のとき $p(x)$ は x に依存しないから $p(\gamma) = p(x)$ を γ の素周期ということにする．

以下では， T^t はときとして一般の力学系を指す場合もあるが，とくに断らない限り，ひな形となる散乱開撞球系を表すものとする．

われわれの興味の対象となるのは次のような集合となる．

$$\Omega = \{x = (q, v) : \text{無限個の } t > 0 \text{ と無限個の } t < 0 \text{ に対して } \pi(T^t x) \in \partial Q\}$$

Ω は過去においても未来においても有界集合内にとどまるような初期状態の全体に一致することは明らかであろう． Ω が豊富な構造をもっていることを説明するにはもう少し準備が必要である． T^t を Ω 上に制限したものと同じ記号で表すことにする．

2. 記号力学系—離散化と符号化—

本節の参考文献としては第 1 節と重複するが，[11, 12, 13, 14, 17] を挙げておく．双曲力学系に研究において記号力学系の構成は極めて基本的な手法である．通常は例外的な集合を除いての議論となるが，われわれのひな形では上の Ω で考えることにより例外点なしで扱うことができる．そのため，むしろ人工的に感じる方もあるかも知れない．双曲力学系に関する標準的な記号力学系の構成法については Bowen [1, 2, 3] を参照されたい．

$x \in M_0$ に対して

$$\begin{cases} t^+(x) = \inf\{t > 0 : T^t x \in M_0\}, \\ t^-(x) = \sup\{t < 0 : T^t x \in M_0\} \end{cases}$$

とおく．ただし，便宜上， $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$ としておく．

$$\Omega_0 = \Omega \cap M_0 = \{x = (q, v) : x \in \Omega, q \in \partial Q\}$$

とおくと， $x \in \Omega_0$ ならば $t^+(x) < +\infty$ かつ $t^-(x) > -\infty$ である．このとき， $x \in \Omega_0$ ならば，

$$Tx = T^{t^+(x)}x, \quad T^{-1}x = T^{t^-(x)}x$$

が定義できる． $t^-(Tx) = -t^+(x)$ が成り立つことに注意しておく．商空間

$$\Omega_0^{t^+} = \{(x, u) : x \in \Omega_0, 0 \leq u \leq t^+(x)\} / \sim$$

を考える．‘ $\sim$ ’は $(x, t^+(x))$ と $(Tx, 0)$ を同一視を意味する．さらに $\Omega_0^{t^+}$ 上の変換族 S^t を $(x, u) \in \Omega_0^{t^+}$ に対して

$$S^t(x, u) = (x, u + t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

と定めれば S^t は $\Omega_0^{t^+}$ 上の力学系となる．力学系 (Ω, T^t) は力学系 $(\Omega_0^{t^+}, S^t)$ とみなすことができる．連続時間の力学系 (Ω, T^t) の軌道の情報は離散時間力学系 (Ω_0, T) と関数 t^+ の情報に変換された．イメージとしては図2ようになる．力学系 $(\Omega_0^{t^+}, S^t)$ は T を底変換 (base transformation) とし， t^+ を天井関数 (roof function, ceiling function) とする $\{T^t\}$ の S 表現，または，懸垂流 (suspension) という．

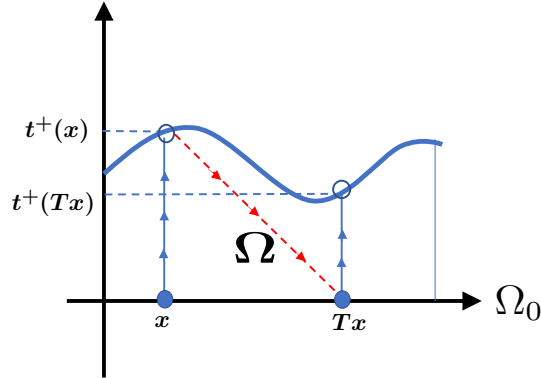


図 2

次に，底変換の符号化を導入しよう． $S = \{1, 2, \dots, N\}$ とし，散乱体 Q_j を j で表す．散乱体を天体のようにみなすと条件 (H2) は各散乱体から他の散乱体がいつも満月の状態で観測されることを意味する．実現可能であることは後ほど述べるが， n 回目の衝突が散乱体 ξ_n で起こるという意味で想定し得るすべての衝突パターン全体は以下のような数列全体となる．

$$\Sigma = \{\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in S^{\mathbb{Z}} : \xi_n \neq \xi_{n+1} \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}.$$

対角成分のみが0となる $N \times N$ 0-1 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (1 - \delta(ij))$$

を考えると

$$\Sigma = \Sigma_A = \{\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in S^{\mathbb{Z}} : A(\xi_n \xi_{n+1}) = 1 \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}$$

である. Σ に付随した離散力学系としてシフト変換 $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma; \xi \mapsto \sigma\xi$

$$(\sigma\xi)_n = \xi_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を考えることができる.

補足. (1)(有限型サブシフト (subshift of finite type)) 一般に $S = \{1, 2, \dots, N\}$ をアルファベット集合などといい, $N \times N$ 0-1 行列 A に対して

$$\Sigma_A = \{\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{Z}} : A(\xi_n \xi_{n+1}) = 1 \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}$$

とおく. Σ_A はシフトを力学系として備えており, **有限型サブシフト** と呼ばれる. とくに, A のすべての成分が1の場合を N 文字の**フルシフト**という. フルシフトは $S^{\mathbb{Z}}$ に他ならない. フルシフト $S^{\mathbb{Z}}$ に S の直積位相を導入するとコンパクト空間となり, 有限型サブシフトの空間は $\sigma\Sigma_A \subset \Sigma_A$ を満たす閉部分集合となる.

(2)(**位相的混合性**) 0-1 行列 A が定める有限型サブシフトにおいて $A^{n_0} > 0$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在するならば, (Σ_A, σ) は以下の**位相的混合性**をもつ.

空でない任意の開集合 $U, V \subset \Sigma_A$ に対して $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_1$ なる限り $U \cap \sigma^{-n}V \neq \emptyset$.

われわれの Σ の場合には $A^2 > 0$ であり, 対応するサブシフト (Σ, σ) は位相的混合性をもつ.

(3)(**d_θ 距離**) $S^{\mathbb{Z}}$ の直積位相は以下で導入する距離による距離位相に一致する.

$\theta \in (0, 1)$ をとる. $\xi = (\xi_n), \eta = (\eta_n) \in S^{\mathbb{Z}}$ に対して

$$n(\xi, \eta) = \inf\{n \geq 0 : \xi_n \neq \eta_n \text{ または } \xi_{-n} \neq \eta_{-n}\}$$

とおき,

$$d_\theta(\xi, \eta) = \theta^{n(\xi, \eta)}$$

と定める. ここでも $\inf \emptyset = +\infty$ としておく.

散乱開撞球に話をもどそう． Σ を上で与えた有限型サブシフトとし， $\xi(\cdot) : \Omega_0 \rightarrow \Sigma$ を $x \in \Omega_0$ に対して

$$\xi(x) = (\xi_n) \quad (\text{各 } n \text{ に対して } \pi(T^n x) \in \partial Q_{\xi_n} \text{ のとき}).$$

で定義する．このとき，以下が成り立つ．

定理 1 ([21]). (H1), (H2) を満たす撞球台 Q に対して， $\xi(\cdot) : \Omega_0 \rightarrow \Sigma$ は全単射で可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Omega_0 & \xrightarrow{T} & \Omega_0 \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

が成り立つ． $x(\cdot) : \Sigma \rightarrow \Omega_0$ を $\xi(\cdot)$ の逆写像とし， $\theta = 1/(1 + t_{\min} k_{\min})$ とおく．ただし，

$$t_{\min} = \min\{\text{dist}(Q_i, Q_j) : i \neq j\}$$

$$k_{\min} = \min\{k(q) : k(q) \text{ は } q \in \partial Q \text{ における曲率}\}$$

とする．このとき， $r : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ を $r(\xi) = t^+(x(\xi))$ で定義すると， r は d_θ -Lipschitz 連続となる．すなわち， $C > 0$ が存在して，任意の $\xi, \eta \in \Sigma$ に対して

$$|r(\xi) - r(\eta)| \leq C d_\theta(\xi, \eta)$$

が成り立つ．

定理 1 の系 商空間

$$\Sigma^r = \{(\xi, u) : \xi \in \Sigma, 0 \leq u \leq r(\xi)\} / \sim$$

上に，底変換 σ ，天井関数 r の Σ^r 上の懸垂流 $\{\sigma^t\}$ を考える． Ω_0^+ の場合と同様に ‘ $\sim$ ’ は $(\xi, r(\xi))$ と $(\sigma\xi, 0)$ の同一視を意味する．このとき，同相写像 $\varphi : \Sigma^r \rightarrow \Omega$ で，以下の可換図式を満たし，対応する $\{\sigma^t\}$ の周期軌道と $\{T^t\}$ の周期軌道の素周期が一致するものが存在する．

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^r & \xrightarrow{\sigma^t} & \Sigma^r \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \Omega & \xrightarrow{T^t} & \Omega \end{array}$$

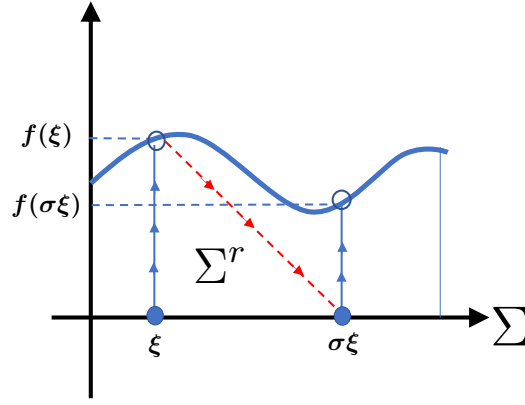


図 3

イメージとしては横軸 Σ と r のグラフで囲まれた部分が Σ^r .

補足. (1) Ω や Ω_0 が豊富な構造をもっていることは気にせず話を進めてきたが、定理 1 によってそれが空論ではなかったことが確かめられたわけである。

(2) Σ^r は距離空間の直積 $\Sigma \times \mathbb{R}$ から自然に距離が入る．それも d_θ であらわす．局所的な議論のみでよいときには実質的に基本領域 $\{(\xi, u) : \xi \in \Sigma, 0 \leq u < r(\xi)\}$ 上の直積距離のことと思ってとくに問題はない。

(3) 無食散乱開撞球 $(\Omega, \{T^t\})$ の場合，対応する記号力学系 $(\Sigma^r, \{\sigma^t\})$ との関係は同相写像 $\varphi : \Sigma^r \rightarrow \Omega$ で結び付けられている。

3. 熱力学形式

本節では，熱力学形式の基本的事実を散乱撞球系に対応する記号力学系を使って紹介するが，それらすべてが位相的混合性をもつ有限型サブシフトおよびそれを底変換とし，正值 d_θ -Lipschitz 連続関数を天井関数とする懸垂流に対しても成立することが知られている．熱力学形式の一般論については Ruelle [29] や Bowen [3] を，懸垂流についての扱いについては [4, 28] を参照されたい。

われわれの散乱開撞球系の力学系としての情報は底変換が有限型サブシフト Σ と Σ 上の天井関数 r の性質に変換されている．一方， Σ は $N \times N$ 0-1 行列 $A = (1 - \delta_{ij})$ が定める 1 次元格子 $\mathbb{Z}$ 上の N 種類のスピンの配置空間を表しているとみなすことができる． $r(\cdot)$ を Σ 上のポテンシャルと考えることで平衡統計力学の視点からポテンシャル r に対応した平衡状態の言葉で系の詳細を調べることができる。

$F_\theta(\Sigma)$, $F_\theta(\Sigma^r)$ をそれぞれの距離に関する Lipschitz 連続関数全体とし， $C(\Sigma)$, $C(\Sigma^r)$ は連続関数全体とする。

まず，Gibbs 測度の存在と一意性から始めよう。

定理 2. 実数値関数 $f \in F_\theta(\Sigma)$ に対して以下の条件を満たす σ 不変確率測度 μ が一意的に存在する.

定数 P と $C \geq 1$ が存在して, 任意の $\xi \in \Sigma$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C^{-1} \leq \frac{\mu(\{\eta \in \Sigma : \eta_i = \xi_i \text{ for each } i(0 \leq i \leq n-1)\})}{\exp(-nP + S_n(\sigma)f(\xi))} \leq C.$$

ただし, $S_n(\sigma)f(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k \xi)$.

補足. (1) 習慣的に変換 T と関数 f に対して $S_n(T)f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ と書く. 変換 T がなんであるか明確な場合は $S_n(T)f$ は $S_n f$ と書く. 連続時間の力学系 $\{T^t\}$ の場合には $S_t f(\cdot) = \int_0^t f(T^u(\cdot)) du$ である.

(2) 力学系理論では定理 2 の不等式を満たす σ 不変確率測度をポテンシャル f に関する **Gibbs 測度** という. 統計力学における通常の Gibbs 測度の定義とは異なるが, この場合については同一のものであることが知られている.

(3) 一般に ν が力学系 $\{T^t\}_{t \in \mathbb{T}}$ の不変測度とは任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して $\nu((T^t)^{-1}B) = \nu(B)$ がすべての可測集合 B について成り立つような測度である. 以下, 不変測度というときはとくに断らない限り不変確率測度のこととする.

(4) 定理 2 の不等式の各辺の $(-1/n) \log$ をとって $n \rightarrow \infty$ とすると, 極限の存在を認めて考えると

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\{\eta \in \Sigma : \eta_i = \xi_i \text{ for each } i(0 \leq i \leq n-1)\}) \\ &= P + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k \xi) \end{aligned}$$

が成り立つ. ひな形の場合 Gibbs 測度はエルゴード的 (実は, さらに強く混合的) であることが知られており, エルゴード定理によって μ -a.e. ξ に対して極限値は $\int_{\Sigma} f d\mu$ である. 結果として μ -a.e. ξ に対して 1 行目の極限が存在するわけだが, こちらのほうは Shanon-McMillan-Breiman の定理によって μ に関するエントロピー $h(\sigma, \mu)$ に等しいことがわかる. エルゴード定理や Shanon-McMillan-Breiman の定理の主張については [31] を参照.

(5) 定理 2 で出現した定数 P は一意的に定まり, f に関する位相的圧力と呼ばれる量 $P(\sigma, f)$ で

$$P(\sigma, f) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(\sigma)} \left(h(\sigma, \nu) + \int_{\Sigma} f d\nu \right)$$

で与えられる. ここで $\sup_{\nu \in \mathcal{M}(\sigma)}$ はすべての σ 不変測度 ν にわたっての上限を考えることを意味する. Gibbs 測度 μ は右辺の括弧内の量を最大化しており, f に関する **平衡状態** と呼ばれるものになっている. 実のところ位相的圧力の本来の定義は

別にあり，上述の上限による特徴づけは**変分原理**といわれる一連の結果の一つである (詳細については [3] の Ch.1, Ch.2 および [31] Ch.9 参照).

次に，転送作用素について述べておこう．転送作用素を利用した Gibbs 測度の構成法は熱力学形式における極めて重要な手法を提供してきた．可逆な系に転送作用素の方法を使う場合には過去において同じ符号化をもつ点の全体 (局所安定多様体) を 1 点とみなすことによって，ある種の粗視化を行って不可逆化する．ひな形を例にとると両側シフト Σ に対して片側シフト

$$\Sigma^+ = \{\xi \in S^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} : A(\xi_n \xi_{n+1}) \text{ for any } n \geq 0\}$$

を考えるとということに対応する．

命題 3 任意の $f \in F_\theta(\Sigma)$ に対して $\psi \in F_{\sqrt{\theta}}(\Sigma)$ が存在して $\tilde{f} = f + \psi \circ \sigma - \psi$ とおくと， $\xi[0, \infty, 0) = \eta[0, \infty)$ を満たす任意の $\xi, \eta \in \Sigma$ に対して $\tilde{f}(\xi) = \tilde{f}(\eta)$ が成り立つ．ただし， $\xi[0, \infty) = \xi_0 \xi_1 \xi_2 \cdots$.

命題 3 によって，

$$S_n \tilde{f}(\xi) = S_n f(\xi) + \psi(\sigma^n \xi) - \psi(\xi)$$

であるから，部分和 $S_n f$ と $S_n \tilde{f}$ の差は n によらず有界である．とくに $\sigma^n \xi = \xi$ であれば両者は一致する．さらに，定理 2 から容易に μ が f の Gibbs 測度であることと $\tilde{f}$ の Gibbs 測度であることは同値となることがわかる．

結局， $n \rightarrow \infty$ における $S_n f$ や周期軌道に関する量の挙動を調べる際は，懸垂流における天井関数 r も含め命題 3 を適用することによって片側シフト Σ^+ の上の話に帰着することができる．以下，しばらくの間は $\tilde{r}, \tilde{f}$ を改めて r, f と書くことにして Σ^+ 上で議論する．ひな形の系を考える上では， $\sqrt{\theta}$ についても θ と書き換えて議論する．

$f \in F_\theta(\Sigma^+)$ と $g \in C(\Sigma^+)$ に対して

$$\mathcal{L}_f g(\xi) = \sum_{\eta: \sigma \eta = \xi} e^{f(\eta)} g(\eta) \quad (\xi \in \Sigma^+)$$

とおく．作用素 $g \mapsto \mathcal{L}_f g$ は転送作用素の一種で Ruelle 作用素と呼ばれる．次は Ruelle-Perron-Frobenius の定理として知られている．

定理 4 (1) $\mathcal{L}_f$ は $C(\Sigma^+)$ からそれ自身への有界線形作用素であると同時に $F_\theta(\Sigma^+)$ からそれ自身への有界線形作用素でもある．

(2) $\mathcal{L}_f : C(\Sigma^+) \rightarrow C(\Sigma^+)$ は正の単純最大固有値 $\lambda = \lambda_f$ をもち，対応する 1 次元固有空間は $h \in F_\theta(\Sigma^+)$ で $h > 0$ なるものによって張られる．

(3) $\mathcal{L}_f : F_\theta(\Sigma^+) \rightarrow F_\theta(\Sigma^+)$ の固有値 λ 以外スペクトルは λ より小さい半径の円板内にある．

(4) $\mathcal{L}_f : C(\Sigma^+) \rightarrow C(\Sigma^+)$ の双対作用素 $\mathcal{L}_f^*$ に対して $\lambda^{-1}\mathcal{L}_f^*\nu = \nu$ を満たす確率測度 $\nu = \nu_f$ がただ 1 つ存在し、任意の開集合 U に対して $\nu(U) > 0$ が成り立つ。

以下、(2) の h は $\int_{\Sigma} h d\nu_f = 1$ なるものとする。

(5) 任意の $g \in C(\Sigma^+)$ に対して $\lambda^{-n}\mathcal{L}_f^n g$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $\int_{\Sigma} g d\nu_f \cdot h$ に一様収束する。

補足. (1) $\nu = \nu_f$ は f に関する**共形測度**と呼ばれることもあり、任意の $g_1 \in L^1(\nu)$ と $g_2 \in L^\infty(\nu)$ に対して

$$\int_{\Sigma} (\lambda^{-1}\mathcal{L}_f g_1) g_2 d\nu = \int_{\Sigma} g_1 (g_2 \circ \sigma) d\nu$$

が成り立つ。 ν を参照測度として (Σ^+, σ) を ν に関して非特異な力学系とみなせば $\lambda^{-1}\mathcal{L}_f$ は ν に関する σ の Perron-Frobenius 作用素と呼ばれるものになり、そのスペクトル論的性質から ν 絶対連続不変測度の情報を引き出す際に重要な役割を果たす。

(2) $\mu = \mu_f = h\nu$ 、つまり、 h を密度関数とする ν 絶対連続測度が f に関する Gibbs 測度となっており、位相的圧力 $P(\sigma, f)$ は $P(\sigma, f) = \log \lambda$ で与えられる。

(3) 転送作用素の n 回合成は

$$\mathcal{L}_f^n g(\xi) = \sum_{\eta: \sigma^n \eta = \xi} e^{S_n f(\eta)} g(\eta) \quad (\xi \in \Sigma^+)$$

となる。

実数値関数 $f \in F_\theta(\Sigma^+)$ に対して $e^{P(\sigma, f)}$ が $\mathcal{L}_f$ の単純固有値であることにより、線形作用素の摂動論を使うことができて $P(\sigma, f)$ が f に実解析的に依存することがわかる。 $f, g \in F_\theta(\Sigma)$ のとき $S_n g$ の Gibbs 測度 μ_f に関する分布の特性関数を近似している。

命題 5. 実数値関数 $f, g \in F_\theta(\Sigma)$ に対して

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} P(f + tg) \right|_{t=0} &= \int_{\Sigma^+} g d\mu_f \\ \left. \frac{d^2}{dt^2} P(f + tg) \right|_{t=0} &= V_{\mu_f}(g) \geq 0, \end{aligned}$$

ここで、 $V_{\mu_f}(g)$ は μ_f に関する g の極限分散

$$V_{\mu_f}(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\Sigma^+} \left(S_n g - n \int_{\Sigma^+} g d\mu_f \right)^2 d\mu_f.$$

である。とくに、 $V_{\mu_f}(g) = 0$ となる必要十分条件は定数 c と $\psi \in L^2(\mu_f)$ が存在して $g = c + \psi \circ \sigma - \psi$ となることである。

本来、位相的圧力はコンパクト距離空間 X 上の連続変換 T と実数値連続関数 $f \in C(X)$ に対して定義されている。この機会にその基本的性質を命題にまとめておこう。 $f, g \in C(X)$ に対して $\psi \in C(X)$ があって $g = f + \psi \circ T - \psi$ が成り立つとき $f \simeq g$ と書く。

命題 6 (1) $f, g \in C(X)$ が $f \leq g$ を満たすならば $P(T, f) \leq P(T, g)$ 。

(2) $P(T, \cdot) : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ は凸である。すなわち、 $f, g \in C(X)$, $0 \leq t \leq 1$ ならば $P(T, tf + (1-t)g) \leq tP(T, f) + (1-t)P(T, g)$ 。

(3) $c \in \mathbb{R}$, $f, g \in C(X)$ が $f \simeq g + c$ のとき、 $P(T, f) = P(T, g) + c$ 。

(4) $f, g \in C(X)$ に対して $|P(T, f) - P(T, g)| \leq \|f - g\|_\infty$ 。

命題 3 と命題 6 を合わせると可逆な力学系 (Σ, σ) についても $f \in F_\theta(\Sigma)$ について (Σ^+, σ) の場合と同様の位相的圧力に関する結果が成立することがわかる。

f を複素数値とした場合には Pollicott による次の結果が知られている ([28] または [18] の Sharp によるサーベイを参照)。有界線形作用素 L に対してスペクトル半径を $\rho(L)$ で表す。

定理 7. $f \in F_\theta(\Sigma^+)$ とし $u = \text{Ref}$, $v = \text{Im}f$ とする。このとき、 $F_\theta(\Sigma^+)$ の作用素として $\rho(\mathcal{L}_f) \leq \rho(\mathcal{L}_u) = e^{P(\sigma, u)}$ が成り立つ。 $\rho(\mathcal{L}_f) = e^{P(\sigma, u)}$ となるのは $a \in \mathbb{R}$, $k \in C(\Sigma^+ \rightarrow 2\pi\mathbb{Z})$ および実数値関数 ψ が存在して $v = a + k + \psi \circ \sigma - \psi$ が成り立つときに限る。このとき、 $\mathcal{L}_f$ は絶対値最大の単純固有値 $e^{P(\sigma, u) + \sqrt{-1}a}$ をもち、他のスペクトルは半径が $e^{P(\sigma, u)}$ より小さい円板に含まれる。

$\mathcal{L}_f$ のスペクトルについてはさらに本質的スペクトル半径に関する次の結果が知られている。これも Pollicott による ([18] の Sharp によるサーベイを参照)。

定理 8. $f \in F_\theta(\Sigma^+)$ とし $u = \text{Ref}$, $v = \text{Im}f$ とする。このとき、 $F_\theta(\Sigma^+)$ の作用素としてのスペクトルは次の集合 (i), (ii) の和集合である。

(i) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \theta e^{P(\sigma, u)}\}$ 。

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : \theta e^{P(\sigma, u)} < |z| \leq e^{P(\sigma, u)}\}$ に属する高々可算個の有限重複度をもつ固有値。

離散化 (Σ^+, σ) についてはこれくらいにして、懸垂流 $(\Sigma^r, \{\sigma^t\})$ についての類似について考える。

ひな形の力学系に付随する記号力学系 (Σ^r, σ^t) で考える。連続時間力学系 $\{\sigma^t\}$ の不変測度 ν に関するエントロピーは $h(\sigma^t, \nu) = |t|h(\sigma^1, \nu)$ を満たすことが知られている。そこで、離散時間の場合の変分原理からの類似の発想で実数値関数 $F \in C(\Sigma^r)$ に対して

$$P(\{\sigma^t\}, F) = \sup_{\tilde{\nu} \in M(\{\sigma^t\})} \left(h(\sigma^1, \tilde{\nu}) + \int_{\Sigma^r} F d\tilde{\nu} \right)$$

で位相的圧力を定義する．離散時間のときと同様に位相的圧力には本来別に定義があり，上式のような変分原理が成立することが知られている (例えば，[4, 28]).

底変換 σ の不変測度の全体 $\mathcal{M}(\sigma)$ と懸垂流 $\{\sigma^t\}$ の不変測度の全体 $\mathcal{M}(\{\sigma^t\})$ の間には次の関係式によって自然な全単射が存在する．

$$\int_{\Sigma^r} F d\tilde{\nu} = \left(\int_{\Sigma} r(\xi) d\nu \right)^{-1} \int_{\Sigma} d\nu \int_0^{r(\xi)} F(\xi, u) dl \quad (F \in C(\Sigma^r)).$$

ここで l は Lebesgue 測度を表す．したがって，エントロピーについては

$$h(\sigma^1, \tilde{\nu}) = \left(\int_{\Sigma} r(\xi) d\nu \right)^{-1} h(\sigma, \nu)$$

の関係がある．平衡状態および位相的圧力の関係について命題としてまとめておく．

命題 9. 実数値関数 $F \in F_{\theta}(\Sigma^r)$ に対して， $f \in F_{\theta}(\Sigma)$ を

$$f(\xi) = \int_0^{r(\xi)} f(\xi, u) dl \quad (\xi \in \Sigma)$$

で定義する．また， $c = P(\{\sigma^t\}, F)$ とする．このとき，以下が成り立つ．

- (1) F に関する平衡状態 $\mu_F \in \mathcal{M}(\{\sigma^t\})$ が一意的に存在する．
- (2) $\mu_F = \tilde{\mu}_{f-cr}$ が成り立つ．ただし， $\mu_f \in \mathcal{M}(\sigma)$ は $f - cr$ に関する σ の平衡状態である．
- (3) μ_F はエルゴード的で，空でない開集合で正の値をとる．
- (4) $G \in F_{\theta}(\Sigma^r)$ を実数値関数とすると， $t \mapsto P(tG + F)$ は t について実解析的であって，

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} P(F + tG) \right|_{t=0} &= \int_{\Sigma^r} G d\mu_F \\ \left. \frac{d^2}{dt^2} P(F + tG) \right|_{t=0} &= V_{\mu_F}(G) \geq 0. \end{aligned}$$

ここで， $V_{\mu_F}(G)$ は μ_F に関する G の極限分散

$$V_{\mu_F}(G) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\Sigma^r} \left(S_t G - t \int_{\Sigma^r} G d\mu_F \right)^2 d\mu_F.$$

である．ただし， $S_t G = \int_0^t G \circ \sigma^s ds$ ．とくに， $V_{\mu_F}(G) = 0$ となる必要十分条件は定数 c と $\psi \in L^2(\mu_F)$ が存在して任意の $t \geq 0$ に対して $S_t G = c + \psi \circ \sigma^t - \psi$ となることに限る．

4. 周期軌道の分布とゼータ関数

本節では主に [21, 22, 24, 25, 26] で得られた一連の結果を紹介する．双曲力学系の周期軌道分布に関する一般論についても [28] および [18] の後半に収められている Sharp のサーベイが参考になる．

(Σ^r, σ) , (Σ, σ) はそれぞれ散乱開撞球系 (Ω, T^t) , (Ω_0, T) に対する記号力学系とする．また, $PO(\{T^t\})$, $PO(T)$ 等は周期軌道の全体を表すこととする．

次の形式的なオイラー積で散乱開撞球の周期軌道に関するゼータ関数を定義する．

$$\zeta_Q(s) = \prod_{\gamma \in PO(\{T^t\})} (1 - e^{-sl(\gamma)})^{-1}. \quad (*)$$

ここで, ζ_Q の添字 Q は散乱撞球台 Q の長さスペクトルに関するものであることを意味する．

まずは, $\operatorname{Re} s$ が十分大きな s に対して $(*)$ の右辺の無限積が絶対収束することを仮定して式変形を実行してみる．

$$\log \zeta_Q(s) = \sum_{\gamma \in PO(\{T^t\})} -\log(1 - e^{-sl(\gamma)}) = \sum_{\gamma \in PO(\{T^t\})} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-ksl(\gamma)}}{k}$$

$PO(\{T_t\})$ と $PO(T)$ の間には, 対応する周期軌道を $\gamma \in PO(\{T_t\})$, $\tau \in PO(T)$ とすると各 $x \in \tau$ に対して

$$l(\gamma) = \sum_{k=0}^{p(\tau)-1} t^+(T^k x)$$

が成り立つような自然な全単射があることに注意すると $x \in \tau$ に対して $p(x) = p(\tau)$ として

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in PO(\{T^t\})} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-ksl(\gamma)}}{k} &= \sum_{\tau \in PO(T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{p(\tau)} \sum_{x \in \tau} \exp \left(-s \sum_{j=0}^{p(\tau)k-1} t^+(T^j x) \right) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\tau \in PO(T): p(\tau)=p} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x \in \tau} \frac{1}{kp} \exp \left(-s \sum_{j=0}^{pk-1} t^+(T^j x) \right) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{x: p(x)=p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp} \exp \left(-s \sum_{j=0}^{pk-1} t^+(T^j x) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{x: T^n x = x} \exp \left(-s \sum_{j=0}^{n-1} t^+(T^j x) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\xi: \sigma^n \xi = \xi} \exp(-s S_n r(\xi)) \end{aligned}$$

を得る．よって, $\operatorname{Re} s$ が十分大のとき,

$$\zeta_Q(s) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\xi: \sigma^n \xi = \xi} \exp(-s S_n r(\xi)) \right)$$

が成り立つはずである．実際，定理 4 ～ 定理 7 を参考にして $P(-Hr) = 0$ をみたす H をとると $\operatorname{Re} s > H$ においては (*) の右辺が絶対収束し， $s = H$ を越えて ζ_Q を有理型に解析接続できるかという問題と転送作用素のスペクトルが関係あることが想像できるであろう．散乱開撞球系のゼータ関数 ζ_Q に関して得られている結果を定理にまとめておこう．

定理 10 正数 H, α, β が存在して以下が成立する．

(1) 半平面 $\operatorname{Re} s > H$ において (*) の右辺の無限積は絶対収束し，零点をもたない解析関数を表す．

(2) 半平面 $\operatorname{Re} s > H - \alpha$ において ζ_Q は $s = H$ に 1 位の極をもつ以外は解析的な有理型関数に接続される．

(3) 半平面 $\operatorname{Re} s > -\beta$ において ζ_Q は零点をもたない有理型関数に接続される．とくに， $\zeta_Q(0) = -1/(N-2)2^{N-1}$ が成り立つ．

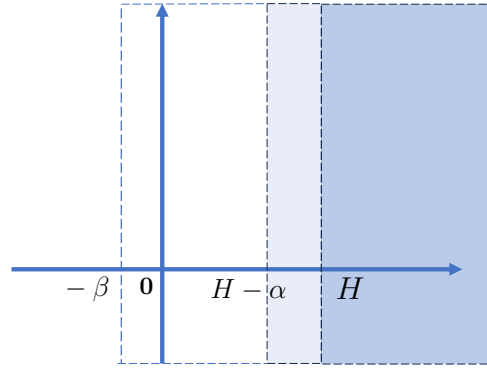


図 4

補足. (1) 定理 10(2) から $\operatorname{Re} s \geq H$ を含む領域に $s = H$ のみを 1 位の極とするように有理型接続できることから，その領域において，正則関数 φ があって

$$-\frac{\zeta_Q(s)}{\zeta_Q(s)} = \frac{1}{s-1} + \varphi(s)$$

のように表されていることがわかる．一方，Rieman ゼータ関数との類似から

$$-\frac{\zeta_Q(s)}{\zeta_Q(s)} = \int_0^\infty e^{-Hst} d\Phi(t),$$

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in PO(\{T^t\}): nl(\gamma) \leq t} Hl(\gamma)$$

であるから Ikehara-Wiener の Tauber 型定理を適用して素数定理の類似

$$\pi_Q(t) \frac{Ht}{e^{Ht}} \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow \infty)$$

を得る。ただし,

$$\pi_Q(t) = \sharp\{\gamma \in PO(\{T^t\}) : l(\gamma) \leq t\}.$$

ここまでは [21] で扱われている。双曲力学系に関する周期軌道分布についての一般論については [28] によって 1990 年ごろまでの文献も含め情報を得ることができる。

(2) 定理 10(2) の $s = H$ 以外に極をもたない半平面の存在については扱われている文献をみつけることは難しいが, [8] で得られている結果に散乱開撞球系の幾何学的な性質を組み合わせることで証明できる (関連して [6, 7, 8, 9] も参照)。

$s = H$ 以外に極をもたない半平面の存在がわかると, 素数定理の類似は以下のように精密化される ([18] に収められている Sharp のサーベイを参照, とくに, 散乱開撞球系を扱う際には [8] が便利である)。 $0 < c < H$ が存在して

$$\pi_Q(t) = \text{li}(e^{Ht}) + O(e^{ct}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

ただし,

$$\text{li}(t) = \int_2^t \frac{du}{\log u}.$$

(3) $x, y \in \Omega_0$ を $\xi(x)_0 = \xi(y)_0$ なるようにとる。このとき,

$$[x, y] = x(\xi(x)(-\infty, -1]\xi(y)[0, \infty)), \quad [y, x] = x(\xi(y)(-\infty, -1]\xi(x)[0, \infty)).$$

言い換えると, $[x, y]$ は x とは過去において衝突する散乱体が一致し, 未来においては y と衝突する散乱体が一致するような点を表す (定理 1 より, このような点は一意に存在する)。

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{t^+(T^n x) - t^+(T^n[x, y]) - t^+(T^n[y, x]) - t^+(T^n y)\}$$

で**時間的距離関数 (temporal distance function)** を定義すると $\varphi(x, y)$ は Ω_0 における 4 点 $x, [x, y], y, [y, x]$ を頂点とするある種の四辺形の面積となり, 強非可積分性をみたすことがわかる。結果として $C > 0$ と $c > 0$ が存在して任意の実数値関数 $F, G \in F_\theta(\Sigma^r)$ と $t > 0$ に対して

$$\left| \int_{\Sigma^r} (F \circ \sigma^t) G d\mu_0 - \int_{\Sigma^r} F d\mu_0 \int_{\Sigma^r} G d\mu_0 \right| \leq C e^{-ct} \|F\|_\theta \|G\|_\theta$$

が成り立つ。ここでは便宜上, Σ^r 定数関数 0 関する $\{\sigma^t\}$ の平衡状態 μ_0 , すなわち, 命題 9(2) より $\tilde{\mu}_{-r}$ を用いたが, 同様の結果は $F_\theta(\Sigma^r)$ に属する任意の実数値関数に関する平衡状態についても成立しており, 基本となる不変測度として必ずしも μ_0 に限定する必要はない。

時間的距離関数の計算については Sinai の撞球の類ではあるが、久保 [15] においても懸垂流の Kolmogorov 性を示す際に同様の議論が使われていることは特筆に値する。

5. 力学系の中心極限定理

本節では講演当日は時間の都合で話すことができなかった懸垂流に関する中心極限定理について少し触れておく。

まず、ひな形の散乱開撞球系に対応する記号力学系 (Σ, σ) および $(\Sigma^r, \{\sigma^t\})$ について考える。離散時間力学系 (Σ, σ) については、命題 3 を再度利用して不可逆な力学系 (Σ^+, σ) の議論に帰着する。 $r \in F_\theta(\Sigma^+)$ であり、 $\lambda_{-Hr} = 1$ ，すなわち、 $P(-Hr) = 0$ となることに注意して Ruelle-Perron-Frobenius の定理 (定理 4) を適用すると $C > 0$ と $\rho \in (0, 1)$ が存在して任意の実数値関数 $f \in F_\theta(\Sigma^+)$ に対して自己相関係数 $C_n(f)$ が $|C_n(f)| \leq C\rho^n$ を満たすことがわかる。というのは、簡単のため $\mu = \mu_{-Hr}$ ， $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-Hr}$ とし、 $\int_{\Sigma^+} f d\mu = 0$ を仮定すると $C_n(f)$ については

$$C_n(f) = \int_{\Sigma^+} (f \circ \sigma^n) f d\mu = \int_{\Sigma^+} f \mathcal{L}^n(fh) d\nu$$

が成り立ち、 $\mathcal{L}(\cdot) - \int_{\Sigma} (\cdot) d\nu : F_\theta(\Sigma^+) \rightarrow F_\theta(\Sigma^+)$ のスペクトル半径を ρ とすると $\rho < 1$ である。よって、 $\int_{\Sigma^+} f d\mu = \int_{\Sigma^+} fh d\nu = 0$ を加味すると

$$\left| \int_{\Sigma^+} f \mathcal{L}^n(fh) d\nu \right| \leq C \|f\|_\infty \|f\|_\theta \rho^n$$

を得る。さらに、命題 5 で与えた極限分散は絶対収束級数

$$V_\mu(f) = C_0(f) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(f)$$

で与えられる。ゆえに、Gordin [10] により、 $V_\mu(f) > 0$ が成り立つならば中心極限定理

$$\mu \left(\left\{ \xi \in \Sigma^+ : \frac{S_n f}{\sqrt{V_\mu(f)n}} \leq t \right\} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る。

補足. (1) $t \in \mathbb{R}$ とすると $\mathcal{L}_{\sqrt{-1}tf-Hr} : F_\theta(\Sigma^+) \rightarrow F_\theta(\Sigma^+)$ は t に関して実解析的な有界線形作用素の族となることに注目しよう。

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^+} \exp(\sqrt{-1}t S_n f) g d\nu &= \int_{\Sigma^+} \mathcal{L}_{-Hr}^n(e^{\sqrt{-1}t S_n f} g) d\nu \\ &= \int_{\Sigma^+} \mathcal{L}_{\sqrt{-1}tf-Hr}^n g d\nu \end{aligned}$$

が成り立ち、上式の左辺は参照測度 ν に関する確率密度 $g \in F_\theta(\Sigma^+)$ をもつ測度に関する $S_n f$ の特性関数に他ならない． t の作用素値関数として実軸の近くでの $\mathcal{L}_{\sqrt{-1}tf-Hr}^n$ のスペクトル分解

$$\mathcal{L}_{\sqrt{-1}tf-Hr}^n = e^{nP(\sqrt{-1}tf-Hr)} E(t) + R(t)^n$$

と摂動論を利用することで収束のスピードの評価を含めた中心極限定理を示すことができる．ここで、 $E(t)$ は 1 次元固有空間への射影であり、 $R(r)$ は $R(t)E(t) = E(t)R(r) = O$ を満たし、スペクトル半径が 1 より小さい．摂動論を使ったこの種の結果とその精密化については区間上の区分的拡大写像の力学系について [20] で扱われている．力学系と関数空間は異なるが、技術的なアイデアはまったく同様である．

(2) 素数定理の類似が $\mathcal{L}_{-sr}$ のスペクトル論的性質と関係していたことを思い出そう．こちらは s についての摂動論によって平衡状態について周期点という零集合の分布の情報を引き出しているのに対し、 $\mathcal{L}_{\sqrt{-1}tf-Hr}$ は平衡状態で観測される極限定理を導くことに使われている．二つのパラメータをもつ転送作用素が出現したわけである．[23] や散乱撞球系のゼータ関数 ζ_Q の $\text{Re } s = 0$ を越えた解析接続に関する [25] においても二つのパラメータをもつ転送作用素が用いられている．

次に、 $(\Sigma^r, \{\sigma^t\})$ について Σ^r 上の定数関数 0 に関する平衡状態 $\mu_0 = \tilde{\mu}_{-Hr}$ を基本となる分布として中心極限定理を考えてみよう．この場合、前節で述べたように相関係数の指数的減衰がわかっている．したがって実数値関数 $F \in F_\theta(\Sigma^r)$ に対して自己相関係数も指数的減衰しており、 (Σ, σ) の場合と同様に中心極限定理を議論することが可能である．

散乱開撞球に対応して現れる有限型サブシフト (Σ, σ) のみならず、位相的混合性をもつ有限型サブシフトに対しても Ruelle 作用素に関する Ruelle-Perron-Frobenius の定理が成立するから、中心極限定理についても同様の結果を得ることができる．ところが、底変換が位相的混合性をもつ有限型サブシフト (Σ_A, σ) であったとしても、天井関数が r が d_θ に関して Lipschitz 連続であるという条件だけでは対応する懸垂流について相関係数の指数的減衰が保証されないこともあり、中心極限定理を散乱開撞球に対応する懸垂流と同様に扱うことは難しい．そこで、最後に、[27] において得られている懸垂流に関する中心極限定理の一般的結果を一つ紹介しておこう．

定理 11. T をコンパクト距離空間 X 上の点測度をもたない Borel 確率測度に関するエルゴード的保測変換とし、 $r \in L^a(\mu)$ を X 上の正值可測関数とする．

$$X^r = \{(x, u : x \in M, 0 \leq u \leq r(x))\} / \sim$$

上の懸垂流 $\{T^t\}$ を考える． X^r 上の実数値関数 $F \in L^b(\tilde{\mu})$ に対して X 上の関数 f を

$$f(x) = \int_0^{r(x)} F(x, u), dl \quad (x \in X)$$

で定義する. さらに, $a \geq 2$, $b \geq 2$ が $\left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \geq \frac{1}{2}$ を満たすとする. このとき, $S_n(T)f/\sqrt{n}$ と $S_n(T)r/\sqrt{n}$ の μ に関する分布が中心極限定理を満たすならば, $S_t F/\sqrt{t}$ の $\tilde{\mu}$ に関する分布も中心極限定理を満たす. ただし, $\tilde{\mu}$ は $\left(\int_X r d\mu\right)^{-1} \mu \times l$ で定義される X^r 上の $\{T^t\}$ 不変測度である. とくに, $\frac{1}{\sqrt{n}} \left(S_n(T)f - n \int_X f d\mu\right)$ の μ に関する分布が $n \rightarrow \infty$ のとき平均 0, 分散 σ_f^2 の正規分布に弱収束するならば, $\frac{1}{\sqrt{t}} \left(S_t F - t \int_{X^r} F d\tilde{\mu}\right)$ の $\tilde{\mu}$ に関する分布は $t \rightarrow \infty$ のとき平均 0, 分散 $\left(\int_X r d\mu\right)^{-1} \sigma_f^2$ の正規分布に弱収束する.

補足. (1) 定理 11 の正規分布は分散が 0 に退化したものも含んでいる.

(2) 位相的混合性をもつ有限型サブシフト (Σ_A, σ) を底変換とし, $r \in F_\theta(\Sigma_A)$ を天井関数とする懸垂流 $(\Sigma^r, \{\sigma^t\})$ について定理 11 を適用してみよう. 実数値関数 $F, G \in F_\theta(\Sigma_A^r)$ に対して, μ_F を F に関する $\{\sigma^t\}$ の平衡状態とする.

$$f(\xi) = \int_0^{r(\xi)} F(\xi, u) dl, \quad g(\xi) = \int_0^{r(\xi)} G(\xi, u) dl \quad (\xi \in \Sigma_A)$$

とすると, $f, g \in F_\theta(\Sigma_A)$ である. c を F に関する位相的圧力とし $\mu = \tilde{\mu}_{f-cr}$ とすると $\tilde{\mu} = \mu_F$ が成り立つ. このとき, $\frac{1}{\sqrt{n}} \left(S_n g - n \int_{\Sigma_A} g d\mu\right)$ の μ に関する分布は $n \rightarrow \infty$ のとき, 平均 0, 分散 $V_\mu(g)$ の正規分布に弱収束する. 一方, r についても同様の中心極限定理の成立がわかる. したがって, 定理 11 より $\frac{1}{\sqrt{t}} \left(S_t G - t \int_{\Sigma_A^r} G d\tilde{\mu}\right)$ の $\tilde{\mu}$ に関する分布は $t \rightarrow \infty$ のとき, 平均 0, 分散 $\left(\int_{\Sigma_A} r d\mu\right)^{-1} V_\mu(g)$ の正規分布に弱収束する. $V_\mu(g) = 0$ となる条件についても $g \simeq c$ なる定数 c の存在であることがわかる.

参考文献

- [1] R. Bowen, *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*, Amer. J. Math. **91**(3) (1970) 725–747.
- [2] R. Bowen, *Symbolic dynamics for hyperbolic flows*, Amer. J. Math. **95**(2) (1973) 429–460.
- [3] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Note in Math. **470**, Second, Corrected Edition, Springer Verlag, Berlin-Hedelberg-New York 2008.

- [4] R. Bowen and D. Ruelle, *The ergodic theory of Axiom A flows*, Invent. Math. **29** (1975) 180–202.
- [5] N. Chernov and R. Markarian, *Chaotic Billiards*, AMS, Providence RI, 2006.
- [6] D. Dolgopyat, *On decay of correlations in Anosov flows*, Ann. of Math. **147** (1998) 357–390.
- [7] D. Dolgopyat, *Prevalence of rapid mixing in hyperbolic flows I*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **18** (1998) 1097–1114.
- [8] D. Dolgopyat, *Prevalence of rapid mixing in hyperbolic flows II Topological prevalence*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **20** (2000) 1045–1059.
- [9] D. Dolgopyat and M. Pollicott, *Addendum to ‘Periodic orbits and dynamical systems’*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **18** (1998) 293–301.
- [10] M. I. Gordin, *On the central limit theorem for stationary processes*, Soviet Math. Dokl. **10** (1969) 1174–1176.
- [11] M. Ikawa, *Singular perturbation of symbolic flows and poles of the zeta functions*, Osaka J. Math. **27** (1990) 281–300.
- [12] M. Ikawa, *Singular perturbation of symbolic flows and poles of the zeta functions. Addendum*, Osaka J. Math. **29** (1992) 161–174.
- [13] 井川 満, 記号力学系入門—周期軌道に対する素数定理の類似, 龍谷大学科学技術共同研究センター, 2007.
- [14] 井川 満, 散乱理論, 岩波オンデマンドブックス, 岩波書店 2023.
- [15] I. Kubo, *Perturbed billiard system I. Ergodicity of the motion of a particle in a compound central field*, Nagoya Math. J. **61** (1976) 1–57.
- [16] I. Kubo and H. Murata, *Perturbed billiard system II. Bernoulli properties*, Nagoya Math. J. **81** (1981) 1–25.
- [17] 久保 泉, 矢野 公一, 力学系, 岩波オンデマンドブックス, 岩波書店 2018.
- [18] G. A. Margulis, *On Some Aspects of the Theory of Anosov Systems with a Survey by Richard Sharp: Periodic Orbits of Hyperbolic Flows*, Springer 2004.
- [19] I. Melbourne and A. Török, *Statistical limit theorems for suspension flows*, Israel J. Math. **144** (2004) 191–209.

- [20] T. Morita, *A generalized local limit theorem for Lasota-Yorke transformations*, Osaka. J. Math., **26** (1989) 579–505, Correction, Osaka. J. Math., 30 (1993) 611–612.
- [21] T. Morita, *The symbolic representation of billiards without boundary condition*, Trans. Amer. Math. Soc., **325** (1991) 819–828.
- [22] T. Morita, *Billiards without boundary and their zeta functions*, Advanced Studies in Pure Math. **21** Zeta Functions in Geometry, ed T. Sunada, (1992) 173–176.
- [23] T. Morita, *Local limit theorem and distribution of periodic orbits of Lasota-Yorke transformations with infinite Markov partition*, J. Math. Soc Japan, **46**(2) (1994) 309–343, Correction . Math. Soc Japan, **47**(1) (1995) 191–192.
- [24] T. Morita, *Construction of K -stable foliations for two-dimensional dispersing billiards without eclipse*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004) 803–831.
- [25] . T. Morita, *Meromorphic extensions of a clas of dynamical zeta functions and their special values at the origin*, Ergod. Th.& Dynam. Sys. **26**(4) (2006) 1127–1158.
- [26] T. Morita, *Meromorphic extensions of a class of zeta functions for two-dimensional billiard without eclipse*, Tohoku Math. J. **59**(2) (2007) 167–202.
- [27] T. Morita and H. Tanaka, *Singular perturbation of symbolic dynamics via thermodynamic formalism*, Ergod. Th.& Dynam. Sys. **28**(4) (2008) 1261–1289.
- [28] W. Parry and M. Pollicott, *Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics*, Astérisque **187-188** Soc. Math. France 1990.
- [29] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, 2nd. ed., Cambridge Univ. Press, New York 2004.
- [30] Ya. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections*, Russian Math. Surveys **25** (1970) 137–189.
- [31] P. Walters, *Introduction to ergodic theory*, Springer Verlag, Berlin-Hedelberg-New York 1982.