

# 数理 科学

12

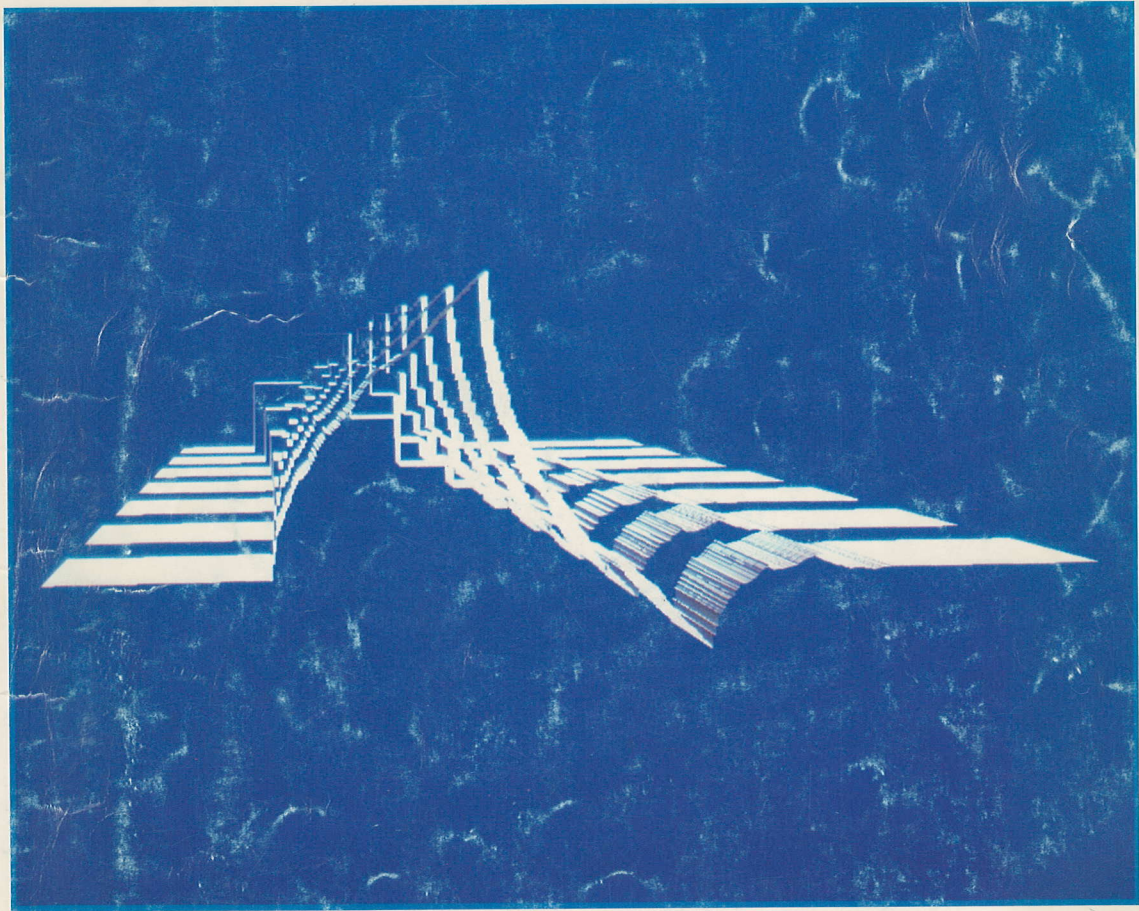
1992

特集

## ウェーブレット

信号の新しい表現

- |                                |                |
|--------------------------------|----------------|
| カオス・フラクタル・ウェーブレット              | 山口 昌哉          |
| ウェーブレット変換とは何か                  | 山田 道夫          |
| 乱流への応用 <small>実験家の視点から</small> | 大田黒俊夫          |
| 画像符号化における直交ウェーブレット             | 太田 睦           |
| ウェーブレット変換による打楽器音の分析・合成         | 上野山 努<br>小沢 慎治 |
| ウェーブレットを用いた数値計算について            | 守本 晃           |
| 異常燃焼のウェーブレット解析                 | 菊池 久和          |
| 《連載》 多変量解析の最近の動向 2             | 市川 雅教          |
| ヒト遺伝子の探究 3                     | 加治 和彦          |
| 《物理学の方向》 20世紀までの物理学            | 江沢 洋           |
| 《視覚探索》 外界情報の獲得・処理様式            | 三浦 利章          |



No. 354

サイエンス社



## ウェーブレット変換とは何か

山田 道夫

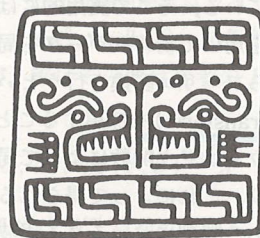
### 1. はじめに

ウェーブレット解析は過去十年ほどの間に急速に進歩した分野である。当初は石油探査技師のアイデアであったそうであるが、数学者の手にわたるとともにその基礎付けが精力的に行われ、ここ1、2年の間にその成果が書物として出版されるようになった。これと平行してウェーブレット解析の応用もさまざまな分野において試みられてきた。時系列や画像データの解析、あるいは情報通信への応用などが盛んに議論され、最近ではウェーブレット解析用のコンピュータボードも発売されるようになってきている。しかし、基礎的性質に関して一応の結果が得られているものの理工学的応用に関してはまだ試行段階のものが多い、といったところがウェーブレット解析の現状のように思われる。ここではこのようなウェーブレット解析について、その概略をデータ解析の道具としての観点から述べてみたい。

### 2. 時間一周波数解析

与えられた時系列データからそれに含まれる周期性を検出する必要があるとき、しばしばフーリエ解析が用いられる。多くの場合、FFTなどを用いてもとのデータをフーリエ変換し、フーリエスペクトルを描いてみることで主要な周期の同定が行われる。周期性の検出が可能であるのは、もちろん、フーリエ変換の積分核である  $\exp(i\omega t)$  という関数が周期関数であるためである。この積分核は微分作用素の固有解でもあるため、フーリエ変換は線形微分方程式と深く関わり、また数値計算においてもフーリエスペクトル法の基礎を与えている。

一方、周期性とは別の用途にフーリエ変換を用いる場合がある。それはデータに含まれる相似性を検出する道具としてのフーリエ変換である。データの時系列



が自己相似的な構造を持っている場合、スペクトルの形はべき関数となる。物理現象ではこのべき指数が重要な意味を持つことが多い。1つだけ例を挙げれば、発達した流体乱流の速度場のフーリエスペクトルはべき型となりこのべき指数が $-5/3$ であることが知られている。このようなスペクトルのべき則は、実は  $\exp(i\omega t)$  の周期性とは直接の関係がない。それよりもこの積分核が( $\omega$ の異なるもの同士)互いに相似な関係にあることが、データの自己相似性をスペクトルのべき則という形に反映させる原因になっている。

ふだん意識することは少ないが、フーリエ解析の有用性にはこのような2つの側面があり、逆に言えばこの2つが融合合っていることがデータ解析の道具としてのフーリエ解析の優秀さを支えているわけである。標語的に言えば次のようになる。

フーリエ解析…周期性+相似性

しかしいつもフーリエ解析が便利なわけではない。フーリエスペクトルはフーリエ変換の位相部分を消去した量で時刻に関する情報を失っているため、スペクトルと局所的な事象との対応関係を見いだすことは難しい。例えば時刻とともに周波数が単調に増加していくような場合でも、スペクトルだけを見て周波数変化の傾向を判断することは不可能である。また各時刻において明瞭な局所的相似性を持つデータ、つまり各々の時刻の付近だけとってみればはっきりしたスペクトルのべき則が現れる場合でも、時系列のなかに異なる相似性を持つ時刻が混在するときにはスペクトルの明瞭なべき則は期待できず、スペクトルの形をもって相似性の特徴を判断することはほとんど不可能である。そこであらためてフーリエ変換の位相部分を検討しようとしてもこのような解析は一般的に言って大変難しい。

フーリエ変換のこのような不都合な性質は積分核  $\exp(i\omega t)$  が一様に広がった関数であることに起因し



ている。そこで実用的には、ウィンドウと称する関数を用いて初めにデータを局所的部分のみに限定してからフーリエ変換を行うという方法 (windowed Fourier transform) を採用することが多い\*1。これは核関数をウィンドウ関数によって局所化することに相当しており、これによって得られる局所スペクトルを用いて、ある時刻におけるある周波数の成分の解析、すなわち時間一周波数解析が実用化されている。

しかしこの方法にはいくつかの問題がある。まず第1に、積分核の局所化は不確定性関係を通して周期性検出の精度の低下を引き起こす。第2に、時刻に関する分解能がある程度以上良くならない。第3に、核関数が互いに相似的になっていない\*2。局所的な解析では第1の点は不可避であろうが、あとの2つの点は必ずしも必然的ではなくこの方法に固有の特徴である。標語的に言えば、この方法はフーリエ変換を、周期性と相似性の両方を(部分的に)崩しながら局所化したものに相当している。

これに対して、フーリエ変換を、周期性は崩しながらも相似性は厳格に保ったまま局所化するのがこの稿の主題であるウェーブレット変換である。このような性格から応用の対象もおおのずと決まることに注意されたい。すなわち、周波数の分解能はそれほど高いわけではない(相対精度一定)ので周波数解析にはあまり適していないが、核関数の局所性と相似性から、データを持つ局所相似性の解析には非常に適しており、例えば、スペクトルのべき則を伴う現象の解析やデータ関数の各点毎の特異性強度の検出などに有利な方法である。標語的に言えば、ウェーブレット解析とは、フーリエ解析において周期性を局所性に置き換えた道具である。

#### ウェーブレット解析…局所性+相似性

この観点からすれば、ウェーブレット解析を「時間一周波数解析」の道具とするには注意が必要である。確かにウェーブレット解析は時系列を時間と周波数の2次元面に表現する方法であり、その意味では「時間一周波数解析」を実現している。周波数分解能の悪さを気にしなければ局所周波数解析の道具として使うことも可能である。しかしそのような目的であればウィンドウをかけて通常のフーリエ変換を使う方が有利な場合も多

\*1 積分核は  $g(t-s)\exp(i\omega t)$  ( $g$  はウィンドウ関数,  $s$  は時刻のパラメーター)

\*2 windowed Fourier transform は次節で述べる連続ウェーブレット変換と同様に展開基底が1次従属であるためそれに伴う注意も必要となる(後節参照)。

い。ウェーブレットは、局所周波数の解析よりはむしろ局所相似性の解析に適した道具であり、この意味でフーリエ解析とは守備範囲を異にしているのである。

### 3. 連続ウェーブレット変換

まず1次元の場合を考えよう。まず1つ関数を選び  $\phi(t)$  として、これをアナライジングウェーブレット (analyzing wavelet) あるいはマザーウェーブレット (mother wavelet) とよぶ。この関数を用いて次のような2パラメーターの関数系を作り

$$\phi^{(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$$

これをウェーブレット (wavelet) とよぶことにする。ウェーブレットは互いに相似な(すべて  $L^2$  ノルムが等しい)関数からなっていることに注意されたい。フーリエ変換と比較すると、 $a$  は周期(周波数の逆数)の役割を持つが、 $b$  は時刻のパラメーターでフーリエ変換には対応するものがない。この関数系を用いて与えられた関数を表現するのがウェーブレット変換であり、(1)パラメーター  $a, b$  が連続的(連続ウェーブレット変換)か離散的(離散ウェーブレット変換)か、また離散の場合(2)ウェーブレットが非直交基底か直交基底か、によって合計3種類の異なるものが存在する。以下に述べるように、フーリエ変換の場合と違って連続変換と離散変換は単なる離散化の関係にはなくかなり異なった数学的構成を持っている。

連続ウェーブレット変換は、形式的には、上の  $\phi^{(a,b)}(t)$  をフーリエ変換の場合の  $\exp(i\omega t)$  のように用いたもので、順変換と逆変換(反転公式)はそれぞれ次のようになる<sup>1)</sup>。

$$T(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(a,b)}(t) * f(t) dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(a, b) \phi^{(a,b)}(t) \frac{da db}{a^2}$$

ここで  $T(a, b)$  は  $f(t)$  の(連続)ウェーブレット変換とよばれる。但しこの対を成立させるために  $\phi(t)$  と  $f(t)$  はいずれも  $L^2(\mathbf{R})$  に属していることが仮定されている。またさらに  $\phi(t)$  は次の条件 (admissibility condition) を満たしていなければならない。

$$c_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

$$\left( \hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \phi(t) dt \right)$$

ここで  $c_\psi$  は上の順・逆変換の定義に現れる定数である。この条件は遠くで十分速く減衰する関数、具体的

には  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 0$  である。  
 実際の応用では  $(d)$  (Mexican hat) 関数を用いる。  
 ここで1次元反転公式は  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$  であり、  
 ゼロでない関数の下限を有する  $L^1(\mathbf{R})$  の意味で連続変換は奇妙なものである。  
 おける) 等長基底を成り立つ。  
 これをも持つエネルギー特性を論じや矛盾する。一般に時間領域での表現において対象関数  $f(t)$  と基底関数  $\phi(t)$  の内積  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(t) dt$  がゼロでない限り、基底関数  $\phi(t)$  は、基底関数でないばかりでなく、  
 \*3 その定義は、  
 たア



には  $\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t^\varepsilon|)|\phi(t)|dt$ , (for some  $\varepsilon > 0$ ) を満たす  $\phi(t)$  については次の簡明な条件と同値になる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 0$$

実際の応用では  $\phi(t)$  として例えば

$$-(d^2/dt^2)\exp(-t^2/2) = (1-t^2)\exp(-t^2/2)$$

(Mexican hat とよばれる) などが良く用いられる<sup>\*3</sup>。ここで1つ注意しておかなければならないのは、上の反転公式は  $L^2(\mathbf{R})$  の意味で成り立つが  $L^1(\mathbf{R})$  の意味では成り立たないことである。そもそも  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$  がゼロでない場合でも、反転公式の右辺は、積分がゼロになる関数  $\phi^{(a,b)}(t)$  の和 (積分) であるから (積分の上下限を有限に止めたとき) やはり積分がゼロとなり、 $L^1(\mathbf{R})$  の意味では  $f(t)$  に収束しないのである<sup>2)</sup>。この意味で連続ウェーブレット変換の反転公式はかなり微妙なものである。

さて連続ウェーブレット変換では (フーリエ解析における) Parseval の関係に似た式が成立し特に次のような等長関係式、つまり 'エネルギー分配' の関係式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |T(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^2}$$

これをもって「時刻  $b$  において '周波数'  $1/a$  の成分の持つエネルギー」は  $|T(a,b)|^2$  であるとして時系列の特性を論じることも (不確定性関係の観点からすればやや矛盾をはらむ言い回しではあるが) 一応可能である。一般的に言って、時系列中の激しい変動が生じている時間帯には高い '周波数' の励起が期待されるが、このような予想は  $T(a,b)$  あるいは  $|T(a,b)|^2$  を用いてある程度定量的に確かめることもできる。(  $T(a,b)$  において  $a$  を変えることは着目する解像度を変えながら対象を観察することに似ているため「数学的顕微鏡」などと比喩されることもある。) また例えば、 $|T(a,b)|^2$  を  $ab$  平面の上に鳥瞰図あるいはカラープロットとして表示し、そこに見られるパターンを用いて時系列中に含まれる種々の現象を分類する、といった使い道もある。もともと1次元のデータを2次元面に展開することでパターンが見やすくなる、といったメリットもある<sup>3,4)</sup>。しかしこのような使い方をする場合には、基底関数系であるウェーブレットが互いに直交しないばかりでなく1次独立ですらないということに十

\*3 そのほか French hat, Morlet wavelet などの名前のついたアナライジングウェーブレットもよく用いられる。

分注意しなければならない。上の等長関係式はウェーブレット変換が  $L^2(\mathbf{R})$  から  $L^2(\mathbf{R}^2; dadb/a^2)$  への写像であることを示しているが、実はその像は後者の  $L^2$  空間全体ではなく、

$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(a,b;a',b') T(a',b') \frac{da'db'}{a'^2},$$

$$K(a,b;a',b') = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(a,b)}(t) * \phi^{(a',b')}(t) dt$$

を満たす  $T(a,b)$  に限られている<sup>1),\*4</sup>。もし  $\{\phi^{(a,b)}(t)\}$  が正規直交系であれば  $K(a,b;a',b')$  はデルタ関数となってウェーブレット変換が全射となることに注意されたい。ウェーブレットの1次従属性がウェーブレット像  $T(a,b)$  の1次従属性を引き起こしているのである。別の言い方をすると、そもそも1次元のデータ  $f(t)$  を2次元の関数に写すのだから必ず重複が生じるわけで、この重複が1次従属性を引き起こすのである。このことは、 $T(a,b)$  の示すパターンの中には、データ本来の特徴に起因するもののほかに、連続ウェーブレット変換そのものに内在しデータとは無関係なパターンが含まれることを示している。従って  $T(a,b)$  に見られるパターンを利用する際にはこのような 'ghost' に十分注意しなければならない。さらに、この1次従属性は  $|T(a,b)|^2$  のエネルギー的な解釈にも注意が必要なることを意味している。実際、例えば  $f(t) = \phi^{(a_0,b_0)}(t)$  と選んだとしても  $T(a,b)$  のサポートは  $(a_0,b_0)$  のただ一点ではなく (上の関係式を満たすように) もっと広がったものとなる。これは正規直交系の場合とはかなり異なった状況であることに注意しておかなければならない<sup>\*5</sup>。

一方、基底関数の相似性は、前節でも述べたように、ウェーブレットの最も重要な特徴であり、データに含まれる相似の特徴 (スケーリングに関する性質) の解析はウェーブレットの守備範囲として最も適したものの1つである。いま (有界な) データ  $f(t)$  が  $t=t_0$  において  $\alpha$  位のヘルダー連続、すなわち

$$|f(t_0+h) - f(t_0)| \leq C|h|^\alpha, \quad (0 < \alpha \leq 1, C \text{ は定数})$$

であるとする。このとき、 $\phi(t)$  が遠方で十分速く減衰していれば、 $f(t)$  の連続ウェーブレット変換  $T(a,b)$  は指数  $\alpha$  の値を敏感に反映し、

$$|T(a,b)| \leq C'|a|^{1/2}(|a|^\alpha + |b|^\alpha), \quad (C' \text{ は定数})$$

\*4 このことを通信におけるノイズ除去に利用する、というアイデアもある。

\*5 連続ウェーブレットに似た例として、 $\mathbf{R}^2$  の中で互いに120度の角をなす長さ  $\sqrt{2/3}$  の1次従属な3つのベクトルがある。これは  $\mathbf{R}^2$  の tight frame (後出) の例である。



が成り立つ<sup>2)</sup>。また適当な条件のもとにこの逆に相当する命題も成立する。従って、 $a$ の値を検出するためには、原理的には、ウェーブレット変換  $T(a, b)$  を作りそのスケーリング則を(例えば log-log プロットして)調べれば良い。このような指数(しばしば特異性強度(singularity strength)とよばれる)は、多くのDLA図形やフラクタル集合上の測度、また乱流速度場などで重要な物理的意味を持つため、ウェーブレット変換の応用が多く試みられている<sup>5)-9), \*6)</sup>。ただ、点毎に指数が異なるようなマルチフラクタル測度では  $T(a, b)$  のグラフの振動が激しく漸近形を見いだすのが困難な場合があり、対象に応じたアナライジングウェーブレットの最適化なども試みられている。

さて、ここまで1次元の連続ウェーブレット変換に限って述べてきたが、多次元への拡張は容易である。1次元の場合、 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$  に対して

$$(a, b)f(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

のように作用する対  $(a, b)$  の集合  $S$  は自然に導入される積演算によって群となり、 $f(t)$  への作用はこの群  $S$  の  $L^2(\mathbf{R})$  上の既約ユニタリ表現となる。1次元ウェーブレット変換は、 $L^2(\mathbf{R})$  から  $L^2(S; dadb/a^2)$  への写像にほかならない。ここで  $dadb/a^2$  は群  $S$  上の左不変ハール測度である。実はこの事情は、 $L^2(\mathbf{R})$  をヒルベルト空間  $H$  で、 $S$  と  $dadb/a^2$  を局所コンパクト群  $G$  とその上の左不変ハール測度  $dg$  でそれぞれ置き換えればそのまま一般化可能である<sup>1)</sup>。特に  $H = L^2(\mathbf{R}^n)$  の場合は  $G = \{(a, r, \mathbf{b}) | a > 0, r \in SO(n), \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n\}$ ,  $dg = dadrd\mathbf{b}/a^{n+1}$  ( $dr$  は  $SO(n)$  のハール測度)となり、admissibility condition, ウェーブレット,  $f(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbf{R}^n)$  の連続ウェーブレット変換, 逆変換はそれぞれ

$$c_\psi \equiv \int_{\mathbf{R}^n} \frac{|\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|^n} d\mathbf{k} < \infty,$$

$$\psi^{(a, r, \mathbf{b})}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a^{n/2}} \psi\left(\frac{r^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})}{a}\right),$$

$$T(a, r, \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbf{R}^n} \psi^{(a, r, \mathbf{b})}(\mathbf{x})^* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_G T(a, r, \mathbf{b}) \psi^{(a, r, \mathbf{b})}(\mathbf{x}) \frac{dadrd\mathbf{b}}{a^{n+1}}$$

のように得られる。3次元以上の場合を応用した例はあまりないが、2次元のものは多くの応用例があり、2次元Mexican hatや2次元Morlet waveletなどがアナライジングウェーブレットとして良く用いられる。

\*6 計算機を用いずに光学機械の組み合わせによって  $T(a, b)$  を得るという試みもある。

## 4. 離散ウェーブレット変換

### 4.1 非直交ウェーブレットとフレーム

パラメーターの離散化はウェーブレット全体の相似性を保つように

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{j/2} \psi\left(a_0^j \left(t - \frac{kb_0}{a_0^j}\right)\right),$$

$$(a_0 > 1, b_0 > 0, j, k \in \mathbf{Z})$$

のように行われる。もちろんやみくもな離散化では  $\{\psi_{j,k}\}$  を完全基底とすることはできないので、 $\psi(t)$  や  $a_0, b_0$  などをうまく選ぶ必要がある。おおよそに言って、 $\psi(t)$  およびそのフーリエ変換  $\hat{\psi}(\omega)$  がともに遠くで十分速く減衰するときは、 $a_0$  と  $b_0$  をうまく選んで、 $\{\psi_{j,k}\}$  を  $L^2(\mathbf{R})$  のフレーム(frame)とすることができる<sup>2)</sup>。一般にフレームとは、ヒルベルト空間  $H$  の部分集合  $\{\phi_m | m \in M\}$  ( $M$  は添字集合)で、ある2つの正数  $A, B$  (frame bound) が存在し、任意の元  $f \in H$  に対して、

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m \in M} |\langle \phi_m, f \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (\langle, \rangle \text{ は } H \text{ の内積})$$

となるものを言う。例えば Mexican hat を適当に離散化すると  $L^2(\mathbf{R})$  のフレームが得られる。フレームには双対フレームとよばれる集合  $\{\tilde{\phi}_m | m \in M\}$  が伴い、任意の元  $f$  に対して  $f = \sum_{m \in M} \langle \phi_m, f \rangle \tilde{\phi}_m$  となること、また特に  $A=B$  となる場合には  $\tilde{\phi}_m = \phi_m$  となること(この場合を tight frame とよぶ)などが知られている。tight frame の場合でも、基底は必ずしも1次独立ではないが、さらに規格化( $\|\phi_m\|=1$ )される場合には基底は実は完全正規直交基底となる。しかし、離散ウェーブレットでこのように性質の良いものを構成することは大変難しく、次に述べる一般的な枠組みが得られたのも80年代の半ばを過ぎてからであった。

### 4.2 完全正規直交ウェーブレット

最も簡単な完全正規直交ウェーブレット(以下直交ウェーブレット)は、ハール基底という名で昔から知られている不連続関数系で、

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq t < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

および  $a_0=2, b_0=1$  として得られる。しかし、もっと連続性の良いものは80年代に Stromberg と Meyer によって独立に構成され、その後 Mallat らによって多重解像度解析とよばれる一般的な枠組みが整備された<sup>11)-14)</sup>。以下では(必ずしも必要ではないが)普通行



われるように2のべきで離散化を行うこととし、 $a_0=2$ ,  $b_0=1$ とする。

いま analyzing wavelet  $\phi(t)$  をうまく選んで離散ウェーブレット

$$\{\phi_{j,k} | \phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), j, k \in \mathbf{Z}\}$$

が完全正規直交系になったと仮定すると、任意の  $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$  に対して、

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(t),$$

$$\alpha_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(t) * f(t) dt$$

が成り立つ。添字  $j$  は2倍毎の拡大・縮小のパラメータだから、この展開の  $j$  に関する和は、倍々に解像度を上げながら関数  $f(t)$  を観察する過程に対応する。この事情を抽象化したものが次の「多重解像度解析 (multi-resolution analysis)」である。

**定義** 関数空間  $L^2(\mathbf{R})$  の中の閉部分空間列  $V_j$  ( $j \in \mathbf{Z}$ ) で次の5つの条件を満たすものを多重解像度解析 (multi-resolution analysis) という。

1.  $\forall j \in \mathbf{Z}$  に対して、 $V_j \subset V_{j+1}$
2.  $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$ ,  $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$  は  $L^2(\mathbf{R})$  の中で dense.
3.  $\forall f \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $\forall j \in \mathbf{Z}$  に対して、  
 $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$
4.  $\forall f \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $\forall k \in \mathbf{Z}$  に対して、  
 $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-k) \in V_0$
5.  $\exists \phi(t) \in V_0$  s.t.  $\{\phi(t-k) | k \in \mathbf{Z}\}$  は  $V_0$  の完全正規直交系

直交ウェーブレットには必ずこのような多重解像度解析が対応している。また逆に、多重解像度解析が与えられればそれに対応する直交ウェーブレットは次のように組み立てられる。直和分解

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}, \quad V_j \perp W_j, \quad (j \in \mathbf{Z})$$

で定義される部分空間  $W_j$  を考えると、 $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$  となるので、 $\{\phi(t-k) | k \in \mathbf{Z}\}$  が  $W_0$  の完全正規直交系となる関数  $\phi(t)$  を選ぶことができればこれが求める analyzing wavelet となる。詳細は略すがこのような  $\phi(t)$  は  $\phi(t)$  (father wavelet とよばれる) から容易に組み立てることができる ( $\phi(t)$  は唯一ではない)。従って、多重解像度解析さえ得ることができればあとは自動的に直交ウェーブレットが構成されるわけである。

ウェーブレットを考える動機からすると、実・フーリエの両空間で同時にできるだけ局在しているものが望ましい。しかし不確定性関係のためそれには限度が

あり、また、両空間で同時にサポートコンパクトになることは不可能である。また一方では、ウェーブレットは連続性(微分可能性)が良いほど展開が速く収束するという事情があり、なるべくなめらかなものが望ましい。しかし、(1) (実空間の)遠方で指数的に減衰し、(2) 無限回微分可能、(3) すべての導関数が有界、となる直交ウェーブレットは存在しない、という否定的定理もあるため<sup>2)</sup>、普通は(1)または(2)の一方または両方をゆるめるやり方が選ばれる。

現在では、いくつかの種類の多重解像度解析とそれに伴う直交ウェーブレットが知られているが、実空間とフーリエ空間での局在の程度で分類すると、次の2つの場合が対照的であろう。

1. Daubechies のウェーブレット (実空間でサポートコンパクト,  $N \in \mathbf{N}$ )<sup>10)</sup>

$$\phi(t) \in C^{\lambda(N)}(\mathbf{R}), \quad \lambda(N) \approx 0.3485N$$

$$\text{for large } N, \quad \text{supp } \phi(t) \subset [1-N, N],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) t^m dt = 0, \quad \text{for } 0 \leq m \leq N-1$$

2. Meyer のウェーブレット (フーリエ空間でサポートコンパクト)<sup>12)</sup>

$$\phi(t) \in C^{\infty}(\mathbf{R}),$$

$$\text{supp } \hat{\phi}(\omega) \subset \left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) t^m dt = 0, \quad \text{for } 0 \leq m < \infty$$

Daubechies のウェーブレットは実空間でサポートコンパクトという著しい性質を持っている(図1)が、ウェーブレットの微分可能回数を増すとサポートが大きくなり、関数形は左右非対称である。Meyer のウェーブレットは、フーリエ空間でサポートコンパクト、そのため実空間では無限に広がっており(遠方で減衰はどんなべきよりも速いが指数的ではない; 図2)、無限回微分可能な関数で形は左右対称(中心は1/2)である。これらの多重解像度解析の具体的構成は多分に技術的でありここでは省略するが、数値的な扱いはそれほど困難ではない\*7。

直交ウェーブレットは展開の収束性における利点を持っている。理論的には、 $L^2(\mathbf{R})$  での収束はもちろん、アナライジングウェーブレットがある程度のなめらかさと遠方で減衰の速さを持つときは、もっと広く  $L^p(\mathbf{R})$  ( $1 < p < \infty$ ) やソボレフ空間、ヘルダー空間でも(直交)ウェーブレットが無条件基底となることが知ら

\*7 Daubechies のウェーブレットの場合は彼女自身によって必要な具体的数値の表が与えられている。



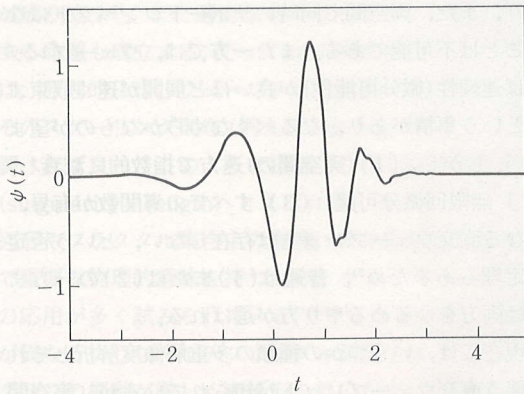


図1 Daubechiesのウェーブレット ( $N=5$ )

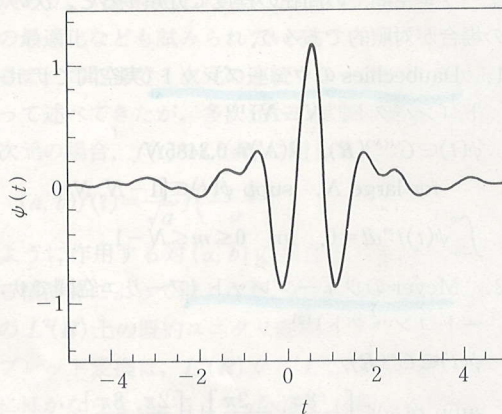


図2 Meyerのウェーブレット

れている。またさらに、関数  $f(t)$  がこれらの空間に属する必要十分条件を展開係数  $a_{j,k}$  の絶対値を用いて与えることも可能である<sup>15)</sup>。実用的な面からみると、フーリエ解析では基本となる関数が  $\exp(i\omega t)$  というように広がった関数であるため、データ  $f(t)$  のどこか一点でも連続性が悪い点があれば展開全体の収束性が悪くなったのに対し、直交ウェーブレットによる表現では、ある点での関数値を表現するのに必要な項数は、基底関数が局所化されているために他の点の不連続性の程度にあまり影響されない。従って標語的に言えば、各点毎に必要な項数を用意すれば良い。この利点は画像や音声のデータ圧縮の技術などに応用可能である。同様の理由から画像の境界の検出などにも利用される。

また直交ウェーブレットも、データの局所的な相似性の検出に利用できる。例えば、アナライジングウェーブレットが適当ななめらかさと減衰の速さを持つとき、データ  $f(t)$  ( $\in L^1(\mathbf{R})$  ならよい) が  $t=t_0$  において  $\alpha$  位のヘルダー連続 ( $0 < \alpha \leq 1$ ) であるとする、直交ウェーブレットの展開係数  $a_{j,k}$  は、

$$|a_{j,k}| \leq C 2^{-j(\alpha+1/2)} (1 + |2^j t_0 - k|^\alpha), \quad (C \text{ は定数})$$

となることを示すことができる。またある意味でこの逆に相当する命題も証明されている<sup>2)</sup>。これは連続ウェーブレット変換のものに類似の命題である。この性質は、展開係数  $a_{j,k}$  が  $f(t)$  の差分  $f(t_0+h) - f(t_0)$  と密接に関係することを意味しており、マルチフラクタル測度の解析などへの応用を示唆している。

ところで、データ解析の観点からみた場合には、直交ウェーブレットの最も良い点は、基底が完全正規直交系をなすため、データ  $f(t)$  のウェーブレット係数  $a_{j,k}$  が互いに完全に独立になることであろう。すなわち、ウェーブレット係数の示す内容はすべてもとの  $f(t)$  に起因するものであり、連続ウェーブレット変換の場合のような 'ghost' を心配する必要はない。さらに直交ウェーブレットでは、展開係数とフーリエスペクトルとの相性は悪くない。例えば Meyer のウェーブレットの場合、 $a_{j,k}$  とフーリエスペクトル  $E(\omega) \equiv (1/2\pi) |\hat{f}(\omega)|^2$  の間には、適当な条件のもとに

$$E(\omega) \sim \omega^{-p} \Leftrightarrow E_j \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{j,k}|^2 \sim 2^{-(p-1)j}$$

が成り立つ。この関係は、直交ウェーブレットによる解析の結果を従来のフーリエ解析の結果と関連させて論じる根拠を与えるもので、広く応用が可能であろう<sup>16)</sup>。この関係がフーリエスペクトルの値に関するものではなく、そのべき指数に関するものであることに注意されたい。これは、ウェーブレットが周波数解析ではなく相似性解析により適していることの反映でもある。

この関係の1つの応用は次のようなものである。いま異なる事象の混合からなる時系列を考える。例えば、A, B 2つの事象があって、それぞれが異なるべき期のフーリエスペクトルを持つとする。時系列中に A と B のどちらか一方しかないのならば明瞭なべき期が得られるが、A と B が混在しているときにはフーリエスペクトルは明瞭なべき期を示さなくなる。しかし、このような混合事象でも、時系列を時間と周波数の(2次元の)平面上に展開すると、適当な判定基準を用いてそれぞれの事象に分離することが可能な場合がある。この作業は、データを直交ウェーブレットで展開し、ウェーブレット係数  $a_{j,k}$  を A, B 2つのグループに分けることに相当する。このような分離が可能な場合には、与えられた時系列中に A と B の事象がどれくらいの割合で含まれるか、またエネルギーはこれらの事象にどのように分割されているか、などを議論することができる<sup>17)</sup>。またここで、A を理想的な事象、B を



未でこの  
は連続ウ  
この性  
f(t)と  
フラクタ  
全完は  
には、直  
全正規直  
ット係数  
すなわ  
もとの  
ット変換  
さらに  
エスペク  
エーブレ  
E(ω)≡  
トによる  
連させて  
能である  
関するも  
ること  
波数解析  
反映でも  
ある。い  
例えば、  
べき則の  
にAとB  
則が得ら  
リエスペ  
し、この  
の(2次  
を用いて  
がある。  
展開し、  
ープに分  
な場合に  
どれくら  
これらの事  
論するこ  
象、Bを

雑音とすれば、AとBの分離は、汚れたデータからの雑音の除去にほかならない。なお、このような分離作業は連続ウェーブレット変換では困難であることを注意しておく。連続ウェーブレット変換の場合、 $T(a, b)$ をなんらかの方法で2つの関数  $T_A(a, b)$  と  $T_B(a, b)$  に分離してみても、(連続ウェーブレット変換が全射でないため) これらそれぞれの関数に対応するデータの存在が必ずしも保証されないのである。

最後に2つの点に触れておく。直交ウェーブレットを応用する場合、どのようなウェーブレットを使えば良いかは、実用上からも気になる点である。実際、MeyerやDaubechiesの直交ウェーブレットの場合でも、ウェーブレットの形には自由度が残されている。そこで逆に、この自由度を生かしてウェーブレットの最適化を行い、ある範囲のwavelet(「wavelet packet」)から、例えば展開項数が少なくすむようなものを選ぶことも行われている<sup>2), 18)</sup>。また、直交ウェーブレットはテンソル積を用いて容易に多次元化され、例えば2次元の場合は、 $\{\phi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y), \phi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y) | j, k, k' \in \mathbb{Z}\}$  のように、father wavelet  $\phi$  を用い、3種類( $n$ 次元の場合  $2^n - 1$ 種類)の積のものを併せて直交ウェーブレットが構成される<sup>2), 15)</sup>。

## 5. おわりに

ウェーブレット解析は、時系列を時間と周波数の2次元面において分析することを可能にした。もともとこのような「共役」な変数の組を同時に扱うことは、不確定性関係からの制約がある上に1次従属性の問題があつて容易ではなかった。直交ウェーブレットはこのような問題の1つの解決法を与えており、時間一周波数空間においてデータを自由に取り扱うことを可能にしたと言えるだろう。但しこの過程で、周波数空間を対数的に等間隔に分割したため、周波数分解能はあまり良くなく、むしろ局所相似性の解析に適した形で定式化されている。確率過程や確率場などの解析法としても整備が進めば、応用範囲はさらに広がるのではないかと思われる。いずれにせよ、ウェーブレット解析はフーリエ解析とは異なる守備範囲を持つ道具であり、フーリエスペクトルのようなルーチン的使用法は確立されていない。しばらくはユーザーの創意工夫が必要と思われる。

### 参考文献

連続ウェーブレットについては1)などが、またウェーブ

レット全般に関して成書としてまとまったものとしては2), 12), 23), 24), 25)などがある。19)以下は解説・成書・総合報告である。

- 1) Grossmann, A. and J. Morlet: Mathematics+ Physics (L. Streit ed.), vol.1, World Scientific, 1985, p.135.
- 2) Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets, SIAM CBMS-61, 1992.
- 3) Argoul, F. et al.: *Nature*, **338** (1989) 51.
- 4) Everson, R. M. and L. Sirovich: Report of Center of Fluid Mech., Turbulence and Computation, Brown University, #89-182.
- 5) Arneodo, A., et al.: Wavelets (J. M. Combes et al. eds.), Springer, 1989, p.182.
- 6) Arneodo, A. et al.: Nonlinear Dynamics (G. Turchetti ed.), World Scientific, 1989, p.130.
- 7) Arneodo, A. et al.: *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1989) 2281.
- 8) Everson, R., L. Sirovich and K. R. Sreenivasan: *Phys. Lett.*, **A145** (1990) 314.
- 9) Bacry, E. et al.: Turbulence and Coherent Structures (M. Lesieur and O. Metais eds.), Kluwer, 1990.
- 10) Daubechies, I.: *Comm. Pure Appl. Math.*, **XLI** (1988) 909.
- 11) Stromberg, J. O.: Conf. in honor of A. Zygmund, Vol. II. W. Becker et al. ed., Wadsworth math. series, 1982, p.475.
- 12) Meyer, Y.: Wavelets (J. M. Combes et al. eds.), Springer, 1989, p.21.
- 13) Mallat, S.: *Trans. of the American Mathematical Society*, **315** (1989) 69-87.
- 14) Mallat, S.: IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989.
- 15) Meyer, Y.: Ondelette et Opérateur I, Hermann, 1990.
- 16) Yamada, M. and Ohkitani, K.: *Prog. Theor. Phys.*, **86** (1991) 799; *Fluid Dyn. Res.*, **8** (1991) 101; *Prog. Theor. Phys.*, **83** (1990) 819.
- 17) Yamada, M. et al.: Wavelet Analysis of High Winds, *Bull. Disast. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ.*, **33B-1** (1990) 285 (in Japanese).
- 18) Farge, M. et al.: Topological Fluid Mechanics (K. Moffat ed.), Cambridge Univ. Press, 1989, p.765. Farge, M. et al.: to appear in *Fluid Dyn. Res.*
- 19) 山口昌哉・山田道夫: ウェーブレット解析, 科学, 岩波書店, 1990年5月, p.398.
- 20) ウェーブレット技術セミナー講習会テキスト, 日本応用数理学会, 1991年12月.
- 21) 佐藤雅昭: ウェーブレット理論の数学的基礎, 第1部, 日本音響学会誌, 47-6 (1991) 405. 第2部, 47-6 (1991) 416.
- 22) Combes, J. M. et al. eds.: Wavelets, Springer, 1990.
- 23) Chui, C. K.: An Introduction to Wavelets, Academic Press, 1992.
- 24) Meyer, Y. ed.: Wavelets and Applications, Masson-Springer, 1991.
- 25) M. Farge: *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **24** (1992) 395. (やまだ・みちお, 東京大学・数理科学研究科)