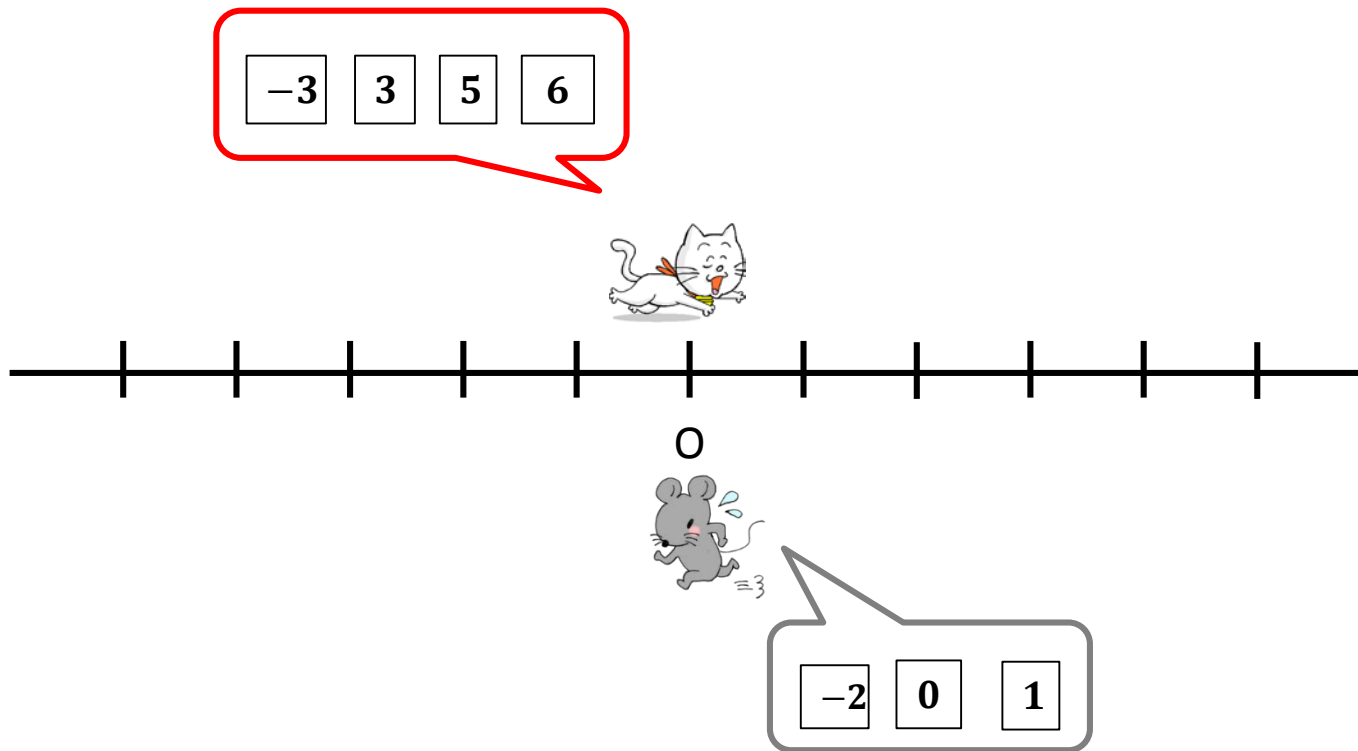


# A Cat-and-Mouse game on the set of integers

杉山悦子 (奈良女子大学大学院人間文化研究科)  
篠田正人 (奈良女子大学大学院自然科学系)

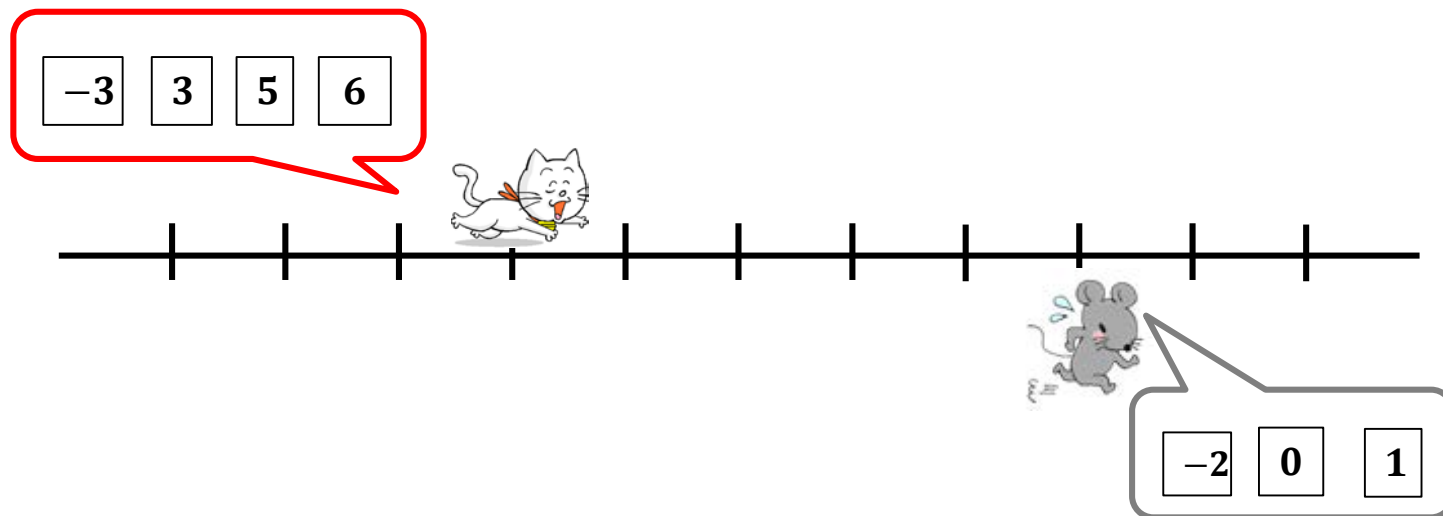
# 問題



# 問題設定

- Mouse と Cat は時刻  $n = 0$  で原点を出発し, 数直線上を単位時間ごとに動く
- 時刻  $n$  における Mouse の位置 $\cdots M_n$ , Cat の位置 $\cdots C_n$   
 $(M_n, C_n \in \mathbb{Z})$
- $T = \inf \{n > 0 | M_n = C_n\}$  (捕まらなかったときは  $T = \infty$ )
- 各時刻  $n$  ごとに, Mouseは  $R_M = \{m_1, m_2, \cdots, m_{k_M}\}$ , Catは  $R_C = \{c_1, c_2, \cdots, c_{k_C}\}$  から要素を1つ選ぶ ( $m_i, c_j \in \mathbb{Z}$ )

# MouseとCatの戦略(1)



- 過去に依存せず現在の状態によって将来の確率分布が決まるマルコフ過程であると考え、戦略はMouseとCatの位置の差  $M_n - C_n$  の値にのみ依存するものとする
- $M_n - C_n = x$  のとき, Mouseは  $m_i$  を確率  $p(x, m_i)$  で, Catは  $c_j$  を確率  $q(x, c_j)$  で選ぶ (混合戦略)

# MouseとCatの目標(1)

- Catは, Mouseを有限時間内 ( $T < \infty$ ) に捕まえたい
- Mouseは有限時間内に捕まらないようにしたい
- 全体の確率法則  $\mathbb{P}$  が  $\boldsymbol{p} = \{p(x, m_i)\}, \boldsymbol{q} = \{q(x, c_j)\}$  によって定まり,  $T$  の確率分布が決まる

(なお、任意の整数  $x$  に対し  $\sum_{i=1}^{k_M} p(x, m_i) = 1, \sum_{j=1}^{k_C} q(x, c_j) = 1$  が成り立っている)

- Mouseは  $\mathbb{P}(T < \infty)$  が小さくなるように  $\boldsymbol{p}$  を定め,  
Catは  $\mathbb{P}(T < \infty)$  が大きくなるように  $\boldsymbol{q}$  を定める

# 研究の目標(1)

- 最初に与えられたカード  $R_M = \{m_1, m_2, \dots, m_{k_M}\}$ ,  
 $R_C = \{c_1, c_2, \dots, c_{k_C}\}$  のもとで, MouseとCatが最善を尽くして  $p, q$  を定めたときの  $\mathbb{P}(T < \infty)$  を知りたい
  - 特に,  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$  かどうかを判定する条件を知りたい
- 例1.1  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-2, 4, 5, 7\}$
- 例1.2  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-3, 5, 6, 8\}$

# クラス分類

- 2つのクラス分け  $M_n, C_n$  の組を以下に分類する

## クラス(I)

どのように  $q$  を定めても,  $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$  となる  $p$  がある

## クラス(II)

ある  $q$  を定めると, すべての  $p$  に対して  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$  となる

※ Catが先に  $q$  を定め、Mouseが後から  $p$  を定める

## クラス分類（自明な例）

例0.1  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-2, -1, 0, 1\}$

$$\Rightarrow \text{クラス(I)} \quad \mathbb{P}(T < \infty) = 0$$

例0.2  $R_M = \{2\}$ ,  $R_C = \{-83, 105\}$

$$\sim R_M = \{0\}, R_C = \{-85, 103\}$$

$$\Rightarrow \text{クラス(II)} \quad \mathbb{P}(T < \infty) = 1$$

以下  $c_{\min} < m_{\min} < m_{\max} < c_{\max}$  を仮定する



# クラス分類（自明でない例）

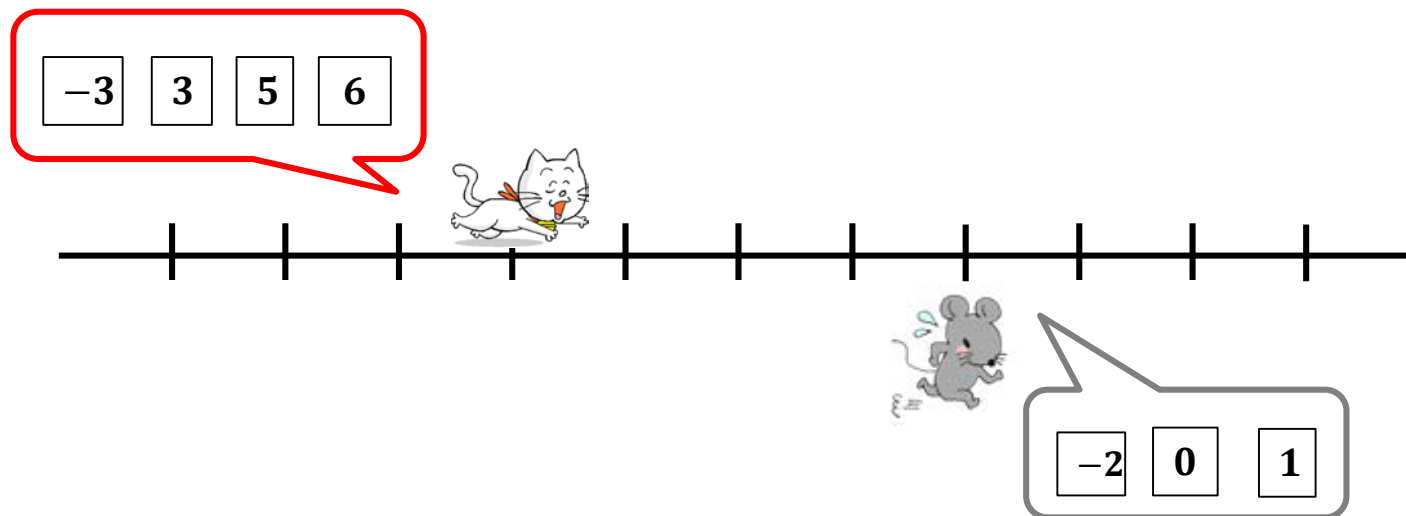
例1.1  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-2, 4, 5, 7\}$

$\Rightarrow$  クラス(I)  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$

例1.2  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-3, 5, 6, 8\}$

$\Rightarrow$  クラス(II)  $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$

# Mouseの戦略（Catに捕まらない十分条件）

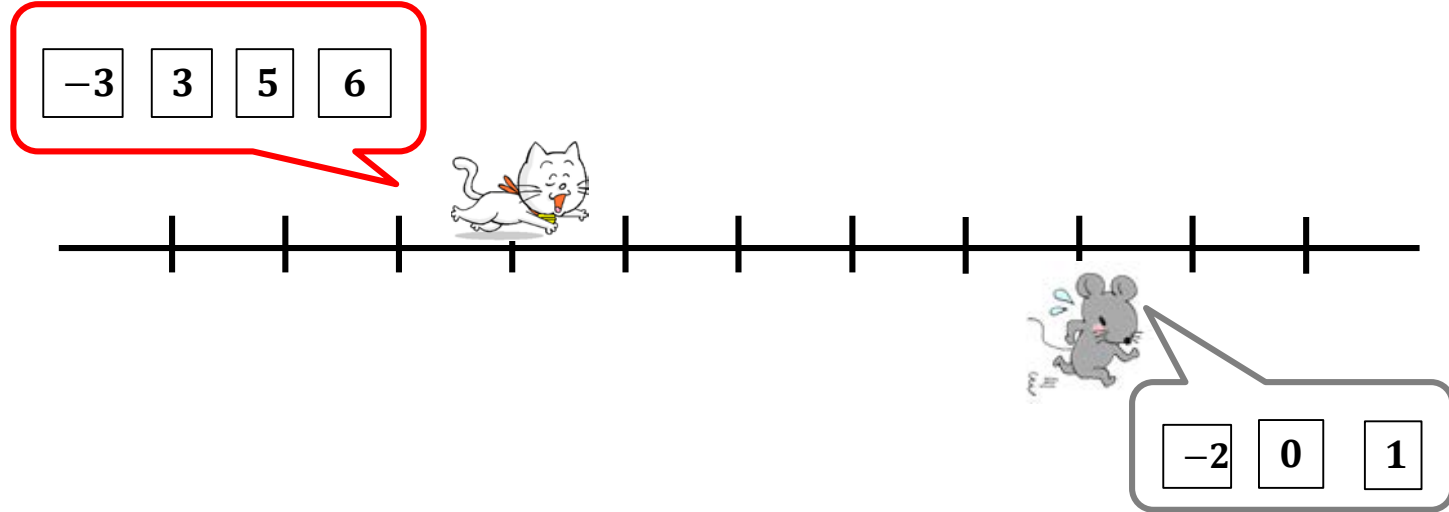


- $M_n - C_n = 4$  のとき

Mouseは 1 を出すと危ない (Catが5を出すと捕まる)  
-2 or 0 を出せば (すぐには) 捕まらない

# Catの戦略

(Mouseを捕まえられるための必要条件)



- $M_n - C_n = 5$  のとき

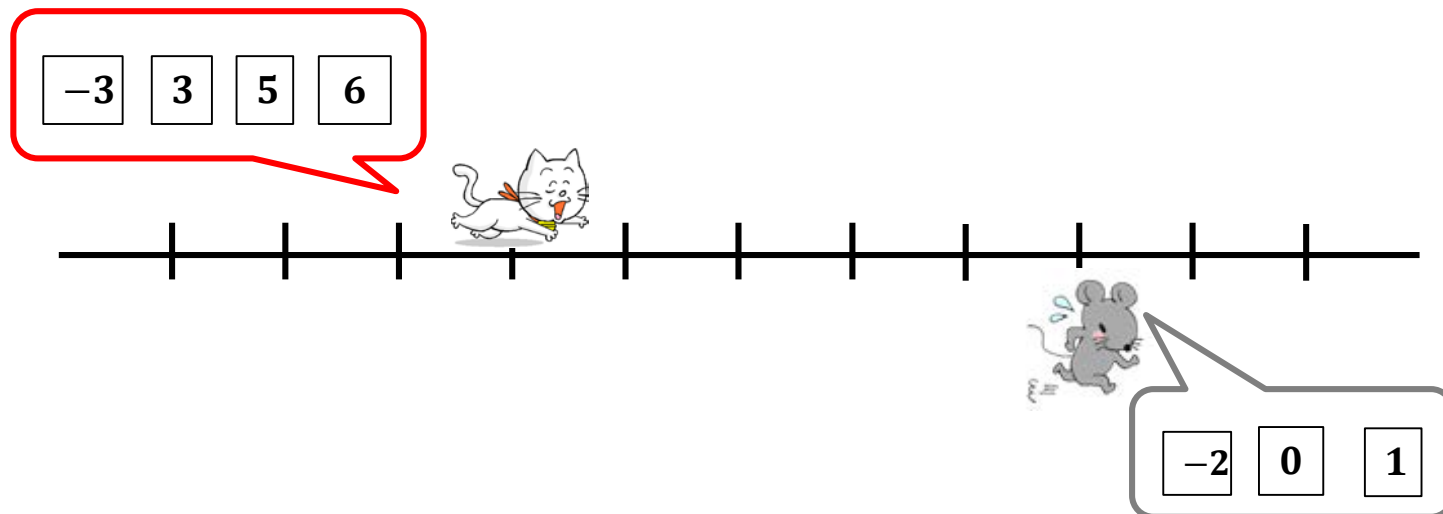
Mouseが-2を出す → Catが3を出せば捕まる

Mouseが0を出す → Catが5を出せば捕まる

Mouseが1を出す → Catが6を出せば捕まる

# Catの戦略

(Mouseを捕まえられるための必要条件)

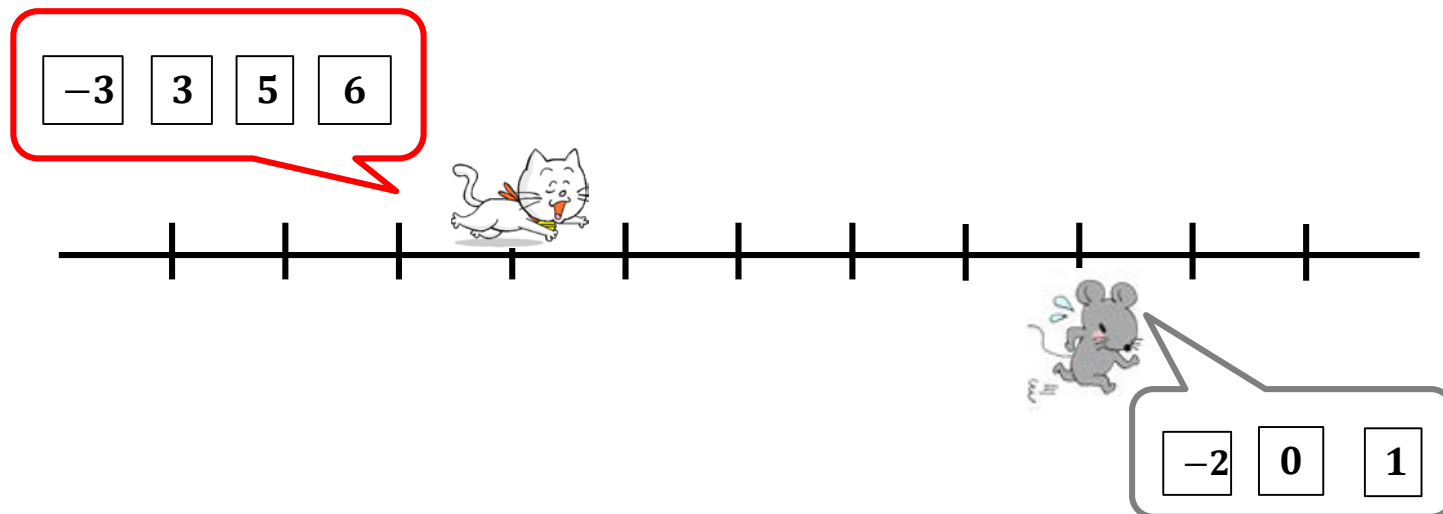


- よって,  $M_n - C_n = 5$  のとき

Catが 3,5,6 をそれぞれ1/3の確率で出せば, Mouseが  
どのように数字を選んでも1/3の確率で捕獲できる

# Catの戦略

(Mouseを捕まえらるための必要条件)



- よって,  $M_n - C_n = 10$  のとき

Catが 3,5,6 をそれぞれ1/3の確率で2回出せば, Mouseが  
どのように数字を選んでも1/9の確率で捕獲できる

# クラス分類（捕まる必要条件）

- Mouseが次に捕まる可能性がある危険な場所  $D$  を定める

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \forall m \in R_M, \exists c \in R_C \text{ s.t. } x + m - c = 0\} \setminus \{0\}$$

命題  $D = \emptyset$  ならば  $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ ,  
すなわちクラス(II) に属する.

系  $|R_M| = |R_C| > 1$  のときクラス(II) に属する.

# 有限時間で捕まる十分条件

定理  $D \neq \emptyset$  と仮定し,  $D$  の最大公約数を  $l (\geq 1)$  とする.

$l = 1$  のとき,  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ .

- 例1.3  $R_M = \{-1, 0, 1\}$ ,  $R_C = \{-4, -3, -2, 1, 2, 3\}$   
 $\Rightarrow D = \{-3, 2\} \Rightarrow l = 1$
- $M_n - C_n = 3$  のとき  $(-3) \times 1 + 2 \times 3 = 3$  なので
  - 1回目は $-4, -3, -2$ のいずれかを $1/3$ の確率で出し
  - 2~4回目は $1, 2, 3$ のいずれかを $1/3$ の確率で出せば  
 $1/3^4$ の確率で捕獲できる

# 有限時間内に捕まることの保証

補題 表が出る確率が正のコインを,  $k$  回連続で表が出るまで投げ続けるとする. このときコインを投げる回数の期待値は有限であり, その値は

$$p^{-k}(1 + p + p^2 + \cdots + p^{k-1})$$

である.



# クラス分類（自明でない例）

例1.1  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-2, 4, 5, 7\}$

$$\Rightarrow D = \{5\}$$

例1.2  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-3, 5, 6, 8\}$

$$\Rightarrow D = \{6\}$$

# クラス分類（詳しい判定条件）

- $l > 1$  のとき

$$D_1 = \{x \in \{1, 2, \dots, l\} \mid \forall m \in R_M, \exists c \in R_C \text{ s.t.} \\ x + m - c \equiv 0 \pmod{l} \}$$

とし,  $D_1$  の最大公約数を  $l_1$  とする.

定理  $l_1 = 1$  のとき,  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ .

## クラス分類（自明でない例）

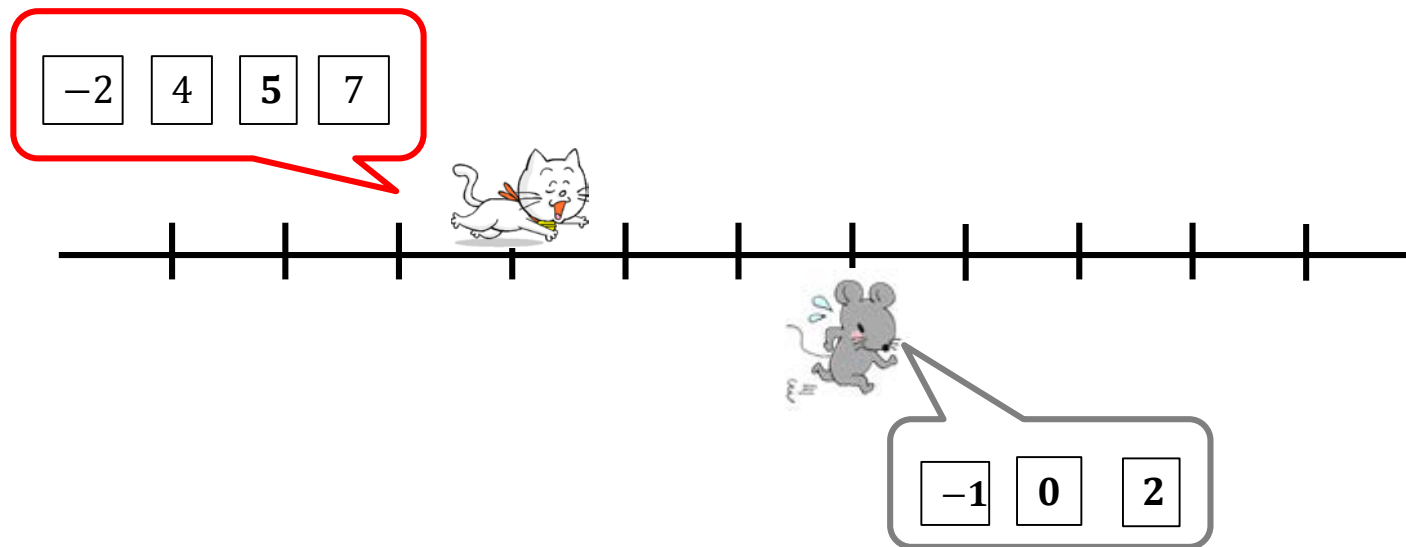
例1.1  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-2, 4, 5, 7\}$

$$\Rightarrow D = \{5\} \Rightarrow D_1 = \{3, 5\} \Rightarrow l_1 = 1$$

例1.2  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-3, 5, 6, 8\}$

$$\Rightarrow D = \{5\} \Rightarrow D_1 = \{3, 6\} \Rightarrow l_1 = 3$$

# クラスの分類（自明でない例）



- $M_n - C_n \equiv 3 \pmod{5}$  のとき

Mouseが-1を出す → Catが7を出せば  $M_{n+1} - C_{n+1} \equiv 0$  になる

Mouseが0を出す → Catが-2を出せば  $M_{n+1} - C_{n+1} \equiv 0$  になる

Mouseが2を出す → Catが5を出せば  $M_{n+1} - C_{n+1} \equiv 0$  になる

# クラス分類（自明でない例）

- すなわち, 正の確率で

$$M_n - C_n \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow M_n - C_n \equiv 4 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow M_n - C_n \equiv 1 \pmod{5}$$

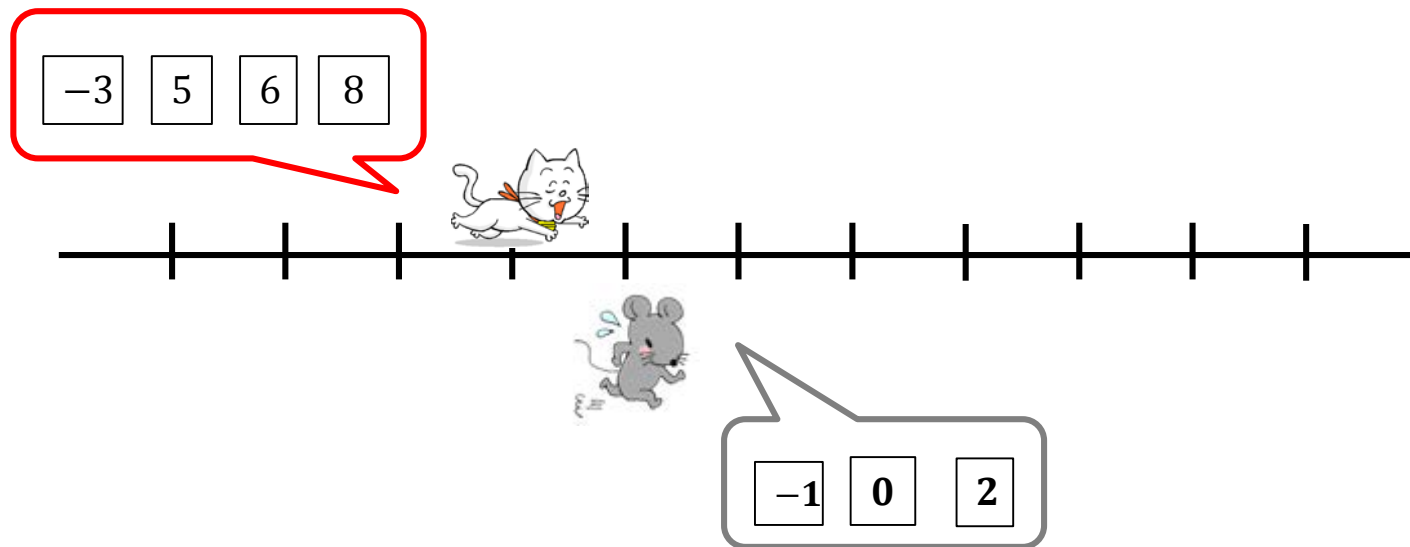
$$\Rightarrow M_n - C_n \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow M_n - C_n \equiv 0 \pmod{5}$$

と,  $M_n - C_n \equiv 0$  を5の倍数にできる

※  $M_n - C_n$  を十分大にしてから実行する

# クラス分類（自明でない例）



- $M_n - C_n \equiv 1 \pmod{3}$  のとき

Mouseが0を出す  $\rightarrow$  Catが何を出しても  $M_{n+1} - C_{n+1} \equiv 0$  になる

- $M_n - C_n \equiv 2 \pmod{3}$  のとき

Mouseが-1を出す  $\rightarrow$  Catが何を出しても  $M_{n+1} - C_{n+1} \equiv 0$  になる

# クラス分類（さらに詳しい判定条件）

- $l_1 > 1$  のとき

$$D_2 = \{x \in \{1, 2, \dots, l\} \mid \forall m \in R_M, \exists c \in R_C \text{ s.t. } \\ x + m - c \equiv 0 \pmod{l_1}\}$$

とし, 以下  $D_2$  の最大公約数を  $l_2$ 、 $D_3$  の最大公約数を  $l_3$ 、 $\dots$  とする。

定理  $l_1 > 1$  とする. このとき, (i), (ii) が成り立つ.

(i)  $l_N = l_{N+1} > 1$  となる  $N$  が存在し, かつ

$$\forall c \in R_C \exists m \in R_M \text{ s.t. } m - c \not\equiv 0 \pmod{l_N}$$

のとき,  $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$  である.

(ii) (i) 以外 のとき,  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$  である.

# クラス分類（自明でない例）

例1.1  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-2, 4, 5, 7\}$

$$\Rightarrow D = \{5\} \Rightarrow D_1 = \{3, 5\} \Rightarrow l_1 = 1$$

例1.2  $R_M = \{-1, 0, 2\}$ ,  $R_C = \{-3, 5, 6, 8\}$

$$\Rightarrow D = \{5\} \Rightarrow D_1 = \{3, 6\} \Rightarrow l_1 = 3$$

$$\Rightarrow D_2 = \{3\} \Rightarrow l_2 = 3$$



## 研究の目標(2)

- クラス(I), すなわち  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$  であるとき

Mouseは捕獲時間の期待値 $E(T)$ が小さくなるように  $p$  を定め,

Catは $E(T)$ が大きくなるように  $q$  を定めることで,

(MouseがCatに捕まるまでの平均捕獲時間を  $T(p, q)$  とする)

$E(T) = \min_q \left( \max_p T(p, q) \right)$  の理論値を求めたい

- 本来の目標は, この理論値をさまざまな学習で得ること
- 今回は, 2つの例での計算を紹介するにとどめる

# 捕獲時間の最小化(1)

例4.1  $R_M = \{-1, 0, 1\}, R_C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$D = \{-1, 0, 1\}$ であるので有限時間内に捕まる

- $x > 2$  で  $p(x, 1) = q(x, 2) = 1$
- $x < -2$  で  $p(x, -1) = q(x, -2) = 1$   
としてよい ( $-2 \leq x \leq 2$ での戦略を考えれば十分)
- $q(2, 2) = 1$
- $q(1, 2) = q(1, 1) = q(1, 0) = 1/3$
- $q(0, 1) = q(0, 0) = q(0, -1) = 1/3$   
とすると  $E(T) = 4$  になる

# CatとMouseの混合戦略

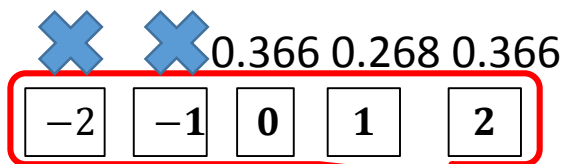
- $x = \pm 2$  では戦略の優劣が定まり、  
 $p(2,1) = q(2,2) = 1, p(-2,-1) = q(-2,-2) = 1$  がいえる

- 対称性を考慮して

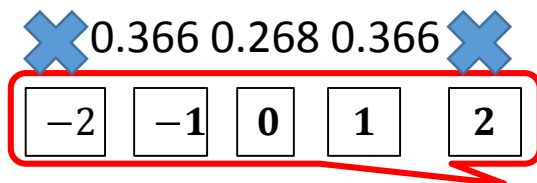
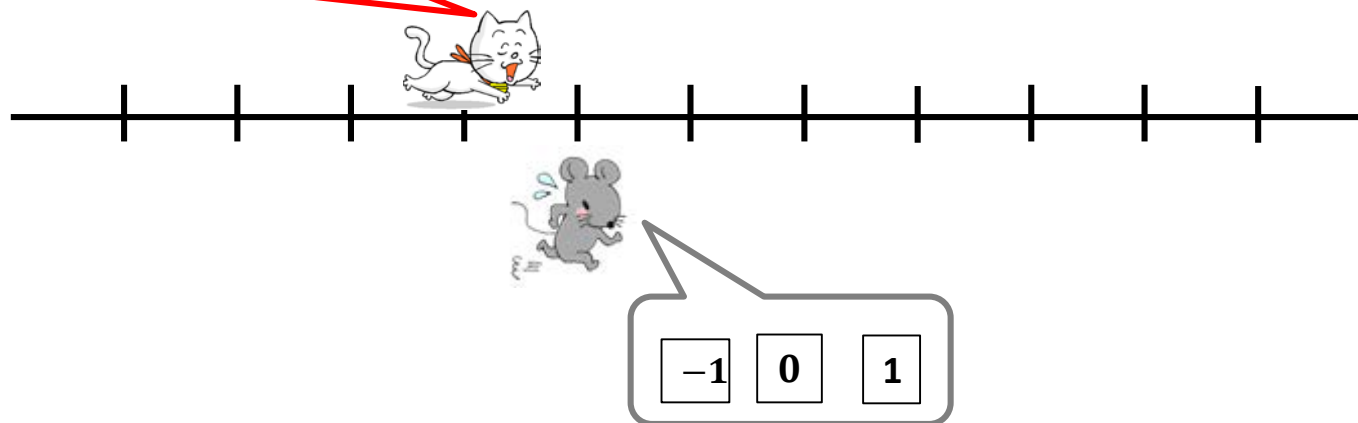
$$\begin{aligned} p(1,1) &= p(1,-1) = a, & p(1,0) &= 1 - 2a \\ q(1,0) &= q(1,2) = b, & q(1,1) &= 1 - 2b \end{aligned}$$

として解くと最善の  $b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0.366 \dots, 1 - 2b = 0.268 \dots$

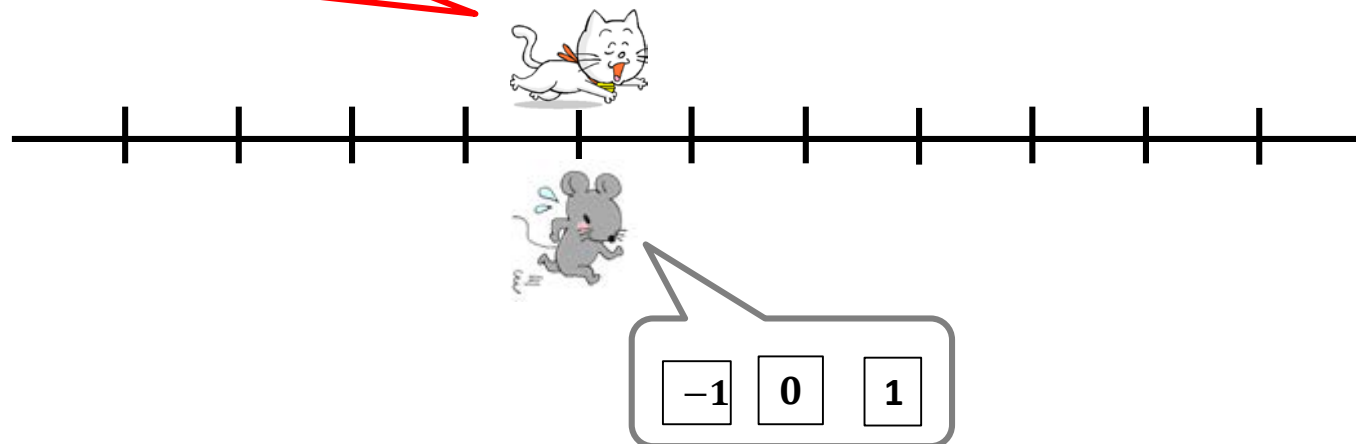
- 結果  $E(T) = \min_q \left( \max_p T(p, q) \right) = 2 + \sqrt{3} = 3.732 \dots$



$$M_n - C_n = 1$$



$$M_0 - C_0 = 0$$



## 捕獲時間の最小化(2)

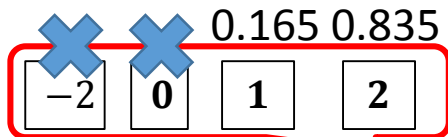
例4.2  $R_M = \{-1, 0, 1\}, R_C = \{-2, 0, 1, 2\}$

$D = \{1\}$ であるので有限時間内に捕まる

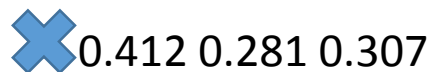
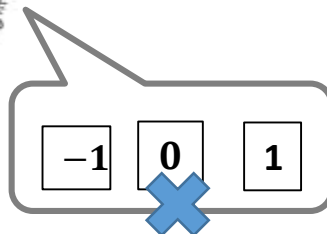
ただし例4.1と比べて $R_C$ から $-1$ が除外されているので  
捕獲時間は大きくなる

- $x > 2$  で  $p(x, 1) = q(x, 2) = 1$
- $x < -1$  で  $p(x, -1) = q(x, -2) = 1$

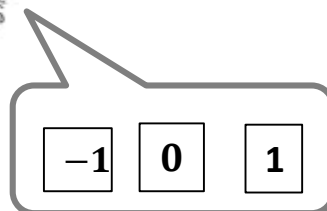
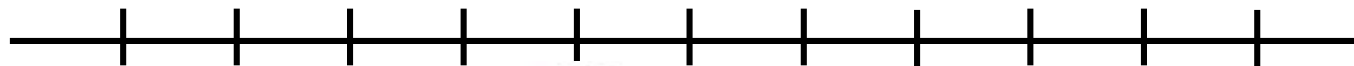
としてよい ( $-1 \leq x \leq 2$ での戦略を考えれば十分)



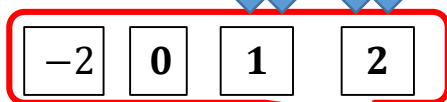
$$M_n - C_n = 2$$



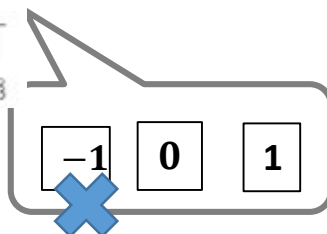
$$M_n - C_n = 1$$



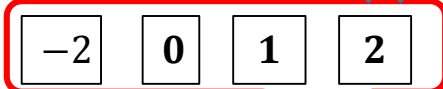
0.835 0.165



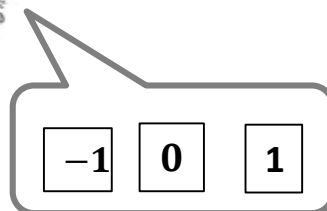
$$M_n - C_n = -1$$



0.514 0.223 0.263



$$M_0 - C_0 = 0$$



# 数値の比較

- 例4.1  $R_M = \{-1, 0, 1\}, R_C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$\Rightarrow E(T) = 2 + \sqrt{3} = 3.732 \dots$$

- 例4.2  $R_M = \{-1, 0, 1\}, R_C = \{-2, 0, 1, 2\}$

$$\Rightarrow E(T) = 5.717 \dots$$



# まとめ

- 数直線上でMouseが逃げCatが追うゲームを考え, 有限時間内で捕まる確率が1となるかどうかを, それぞれの動きを指定する $R_M, R_C$ から判定する必要十分条件を得た.
- いくつかの例について, 捕獲時間の期待値を計算した. ただし複雑な例では戦略の優劣判断と計算に手間がかかるため, 判断の簡略化する方法が必要である.
- このゲームを「厳密な答えがわかっている」確率モデルとして, さまざまな学習方法の評価に使えればと考えている.