

# pre-Sierpiński gasket 上の percolation 再訪

篠田 正人

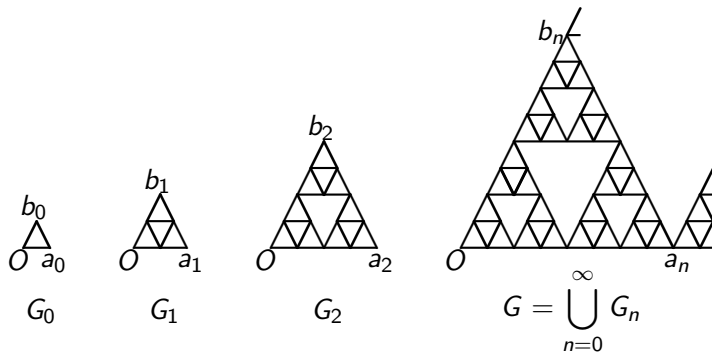
奈良女子大学研究院自然科学系

January 6, 2018

1 Percolation on the pre-Sierpiński gasket

2 Random spanning trees on the pre-Sierpiński gasket

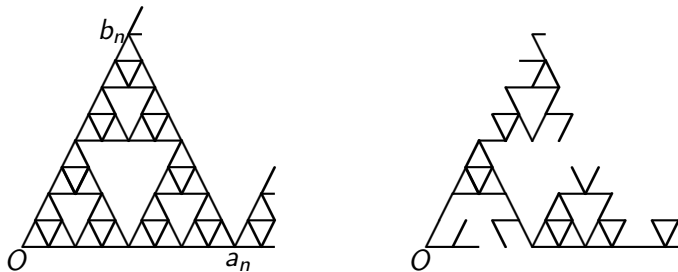
# pre-Sierpiński gasket



2次元 pre-Sierpiński gasket

# Bond percolation on the pre-Sierpiński gasket

$G$  上での Bernoulli bond percolation を考える. 各辺が独立に確率  $p$  で open (つながっている), 確率  $1 - p$  で closed (切れている) ものとする.



$O$  を含む連結成分 (open cluster) を  $C$  とする. 臨界確率  $p_c$  を

$$p_c = \inf \{p : P_p(|C| = \infty) > 0\}$$

で定義すると  $p_c = 1$ .

$\therefore p < 1$  では  $P_p(O \leftrightarrow a_n \text{ or } O \leftrightarrow b_n) \leq (1 - (1 - p)^4)^n \longrightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ .

# Bond percolation on the pre-Sierpiński gasket

correlation length  $\xi(p)$  を以下のように定義する.

$$\xi(p) = \lim_{p \rightarrow 1} \left\{ -\frac{1}{2^n} \log P_p(O \leftrightarrow a_n) \right\}^{-1}.$$

すなわち  $P_p(O \leftrightarrow a_n) \approx e^{-2^n/\xi(p)}$  (実際には  $P_p(O \leftrightarrow a_n) \sim e^{-2^n/\xi(p)}$ ).

この  $\xi(p)$  の  $p \rightarrow 1$  での漸近挙動を知りたい. 通常の  $\mathbb{Z}^d$  上では  $\xi(p) \approx (p_c - p)^{-\nu}$  であるとされている.

以下の命題により, pre-Sierpiński gasket 上ではこの漸近挙動がかなり具体的に求められる.

# Bond percolation on the pre-Sierpiński gasket

## Proposition 1.1

$$\Phi_n(p) = P_p(O \leftrightarrow a_n \text{ in } G_n), \quad \Psi_n(p) = P_p(O \leftrightarrow a_n \leftrightarrow b_n \text{ in } G_n)$$

とすると  $\Phi_0(p) = p + p^2 - p^3$ ,  $\Psi_0(p) = 3p^2 - 2p^3$  であり, 以下の関係式が成り立つ.

$$\Phi_{n+1}(p) = \Phi_n(p)^2 + \Phi_n(p)^3 - \Phi_n(p)\Psi_n(p)^2,$$

$$\Psi_{n+1}(p) = 3\Phi_n(p)^2\Psi_n(p) - 2\Psi_n(p)^3.$$

## Proposition 1.2

$$p \neq 0 \text{ に対し } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_p(O \leftrightarrow a_n)}{\Phi_n(p)} = 1.$$

# Bond percolation on the pre-Sierpiński gasket

## Theorem 1.3 (S,1996)

$$\lim_{p \rightarrow 1} \frac{\log \xi(p)}{\log(1-p)} = -\infty, \quad \lim_{p \rightarrow 1} \frac{\log \log \xi(p)}{\log(1-p)} = -2.$$

すなわち,  $\xi(p) \approx (1-p)^{-\nu}$  ではなく  $\log \xi(p) \approx (1-p)^{-2}$ . さらに

## Theorem 1.4 (S,1998)

$$\lim_{p \rightarrow 1} \xi(p) \approx \exp \left\{ \frac{\log 2}{4} (1-p)^{-2} \right\}.$$

なお,  $d$  次元 pre-Sierpiński gasket でも同様に

$$\lim_{p \rightarrow 1} \xi(p) \approx \exp \left\{ \frac{\log 2}{2^d(d-1)} (1-p)^{-d(d-1)} \right\}$$

であることがわかる.

# Bond percolation on the pre-Sierpiński gasket

なお,

$$\Phi_n(p) = P_p(O \leftrightarrow a_n \text{ in } G_n), \quad \Psi_n(p) = P_p(O \leftrightarrow a_n \leftrightarrow b_n \text{ in } G_n)$$

について,

$$\Phi_n(p)^2 \leq \Psi_n(p) \leq \Phi_n(p)$$

は自明である.

最近分かったこととして

## Proposition 1.5

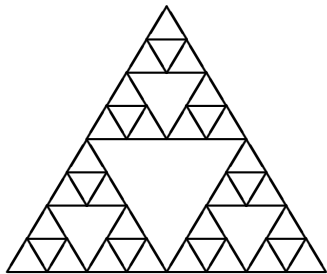
$0 < p < 1$  に対し, 極限值

$$t(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi_n(p)}{3^n \Phi_n(p)^2}$$

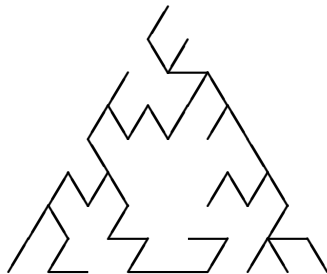
が存在し,  $t(p)$  は単調減少かつ  $0 < t(p) < 3$  である.

# Random spanning trees on the pre-Sierpiński gasket

有限グラフ  $G_n$  における全域木 (spanning tree) をランダムに選び, その性質を調べたい.



$G_3$



a spanning tree of  $G_3$

spanning tree をランダムに選ぶ方法として以下の 2 つを考える.

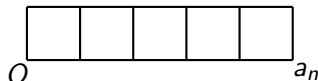
- Uniform Spanning Tree (UST)  
すべての spanning treeの中から 1 個を等確率で選ぶ.
- Minimal Spanning Tree (MST)  
各辺  $e \in E$  に重み  $X_e$  を  $[0, 1]$  一様分布に従って独立に与え, その総和が最小になるような spanning tree を選ぶ.

それぞれで選ばれる spanning tree の特徴

(特に, spanning tree によって定まる  $O$  から  $a_n$  への self-avoiding path) の違いを知りたい.

# Random spanning trees on the pre-Sierpiński gasket

例  $n$  個の box を並べたグラフを  $G_n$  とする.



$n = 2$  のとき, spanning tree は全部で 15 通り



|     |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|
| UST | 1/15 | 1/15 | 1/15 | 1/15 | 1/15 | 1/15 |
| MST | 1/14 | 1/14 | 1/14 | 1/14 | 5/84 | 5/84 |

$O$  から  $a_n$  への path の長さ  $L_n$  の期待値は

$$\text{UST: } E_n L_n \sim \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) n = 1.2887n,$$

$$\text{MST: } E_n L_n \sim \left(1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2 dx}{(1-x^2+x^3)^2}\right) n = 1.3076n.$$

# Uniform spanning trees on the pre-Sierpiński gasket

$G_n$  の spanning tree の個数は、漸化式を用いて具体的に求めることができる (Teufl-Wagner '06, Chang-Chen-Yang '07) .

さらに, UST によってできる  $O$  から  $a_n$  への self-avoiding path の長さ  $L_n$  について以下の性質が成り立つ.

Theorem 2.1 (S-Teufl-Wagner, 2014)

$$E_n L_n \sim K_1 \alpha^n, \quad \text{Var}_n L_n \sim K_2 \alpha^{2n}.$$

ただし  $\alpha = \frac{20 + \sqrt{205}}{15} = 2.28785 \dots,$

$$K_1 = \frac{82 + 5\sqrt{205}}{123} = 1.24869 \dots,$$

$$K_2 = \frac{164809 + 7667\sqrt{205}}{2593332} = 0.10588 \dots.$$

# Uniform spanning trees on the pre-Sierpiński gasket

こうしてできる self-avoiding path は loop-erased random walk と対応することがよく知られており, 通常の self-avoiding walk

(Hattori-Kusuoka '92,  $\alpha$  に対応する値が  $2.3819\dots$ ) よりも短く  
極限過程の Hausdorff 次元  $\frac{\log \alpha}{\log 2} = 1.19399\dots$  も小さい.

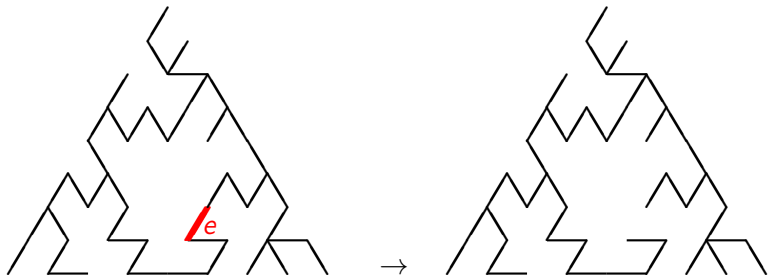
なお, この次元の値は 3 次元 pre-Sierpiński gasket においても計算できる.

$$\alpha_3 = 2.55995, \text{ 極限過程の Hausdorff 次元 } \frac{\log \alpha_3}{\log 2} = 1.35612\dots$$

# Minimal spanning trees on the pre-Sierpiński gasket

minimal spanning tree は percolation と深い関係にあり,  $\{X_e\}$  から MST を得るアルゴリズムとして invasion percolation を用いたものがよく知られているが, ここでは  $G_n$  の MST を得る方法として次のようなものを考える.

- $G_n$  を構成する  $G_{n-1}$ ,  $G'_{n-1}$ ,  $G''_{n-1}$  の MST を選ぶ.
- 3つの MST でできる circuit 上で  $X_e$  の値が最も大きい辺  $e$  を切る.



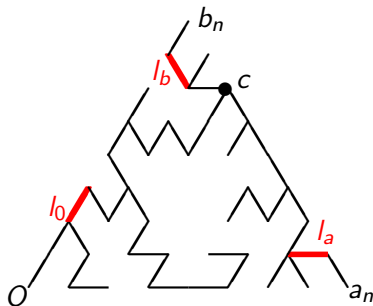
# Minimal spanning trees on the pre-Sierpiński gasket

MST の漸化式を立てるために、次のような確率変数を導入する.

$G_n$  で得られた minimal spanning tree における "center"  $c$  を定め、 $O$  から  $c$ ,  $a_n$  から  $c$ ,  $b_n$  から  $c$  への path 内での  $X_e$  の最大値をそれぞれ  $l_0, l_a, l_b$  とする. さらに、この  $l_0, l_a, l_b$  の最大値を  $X$ , 2 番目の値を  $Y$  とする. すると

$$P_n(X < p) = P_n(l_0, l_a, l_b < p) = P_p(O \leftrightarrow a_n \leftrightarrow b_n \text{ in } G_n),$$

$$P_n(Y < p < X) = 3P_n(l_0, l_a < p < l_b) = 3P_p(O \leftrightarrow a_n, c \not\leftrightarrow b_n \text{ in } G_n).$$



# Minimal spanning trees on the pre-Sierpiński gasket

$F_n(p, q) = P_n(q < Y < X < p)$  とすると

$$F_n(p, 0) = \Psi_n(p), \quad F_n(1, q) = 1 - 3\Phi_n(q) + 2\Psi_n(q)$$

であり, さらに漸化式を立てることができる.

## Proposition 2.2

$G_n(p) = 1 - F_n(p, 0) - F_n(1, p)$  とする. このとき

$$F_{n+1}(p, q) = H(F_n(1, p), G_n(p), F_n(1, q), G_n(q), F_n(p, q)),$$

$$H(x, y, z, s, t)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{9} \{ 3s^2 + 2s^3 + 6st - 5s^2t + 3t^2 - 30xs + 7xs^2 + 6xt - 3xt^2 + 30x^2 \\ & - 6x^2t - 12x^3 - 6ys - ys^2 + 12yt - 4yst - 3y^2t + 30xy - 4xys \\ & - 12xyt - 18x^2y + 3y^2 - 4y^2s - 6y^2t - 3xy^2 + 3y^3 + 30zs - 10zs^2 \\ & - 10zs^2 - 6zt - 6zst - 60xz + 30xzs + 6xzt + 6x^2z - 30yz + 10yzs \\ & + 6xyz + 30z^2 - 30z^2s + 24xz^2 + 12yz^2 - 18z^3 \}. \end{aligned}$$

## 現状

- $E_n L_n \approx \alpha^n$  の形の計算結果は得られていない
- 小さい  $n$  に対しては  $E_n L_n$  の具体的な計算ができる. その結果から  $E_n L_n \approx (2.291 \dots)^n$  くらい  
(UST の場合の  $\alpha = 2.2878 \dots$  よりも真に大きな値になると予想)

## 今後の方針

- $\Phi_n(p)$  と  $\Psi_n(p)$  の関係をより精密に知る
- $F_n(p, q)$  の主要項を明確にする
- ただし, MST の形状を見るだけなら  $\{X_e\}$  の値でなく大小順序だけあればよいはずなので, もっとよい解析方法があるかもしれない