Delete Nim の一般化と勝敗判定

篠田　正人

奈良女子大学研究院自然科学系数学領域

March 18, 2022

Nim とは

Nim は，古くからよく知られた，2 人のプレイヤーで行われる石取りゲームである．

いくつかの石で構成される山が 3 つあり，プレイヤーは自分の手番で 1 つの山を選び，その山から任意の正の整数個の石を取り除く．

ゲームの途中の局面を 3 つの山の石の数を列挙することで $\langle x, y, z\rangle$ の形で表す（x, y, z はすべて非負整数）とき，たとえば $\langle 3, 5, 7\rangle$ の局面において手番側のプレイヤーは $\langle 3, 2, 7\rangle$ や $\langle 0, 5, 7\rangle$ の局面にすることができる．

この手番での操作を交互に行い，最後の石を取ったほうのプレイヤーが勝ちである．

このゲームは山の数を 3 つより増やした場合も同様のルールで定義することができる．

$\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面

Nim は二人零和完全情報確定有限ゲームであり引き分けがないため，すべての局面を

- 手番側必勝（その局面で次の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{N}$ 局面と
- 手番側必敗（その局面で前の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{P}$ 局面

に分類できる．

Nim における $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面の判定は Bouton(1902) で示され，このゲームの勝敗条件には数学的にも興味深い構造が含まれることが知られるようになった．

またゲームのより詳しい解析として各局面の Grundy 数を得る研究もなされている．

Delete Nim とは

Delete Nim は，Abuku-Suetsugu(2021) らによって導入された，石を取りつつ山を分割するゲームである．

Delete Nim ではいくつかの石で構成する山が 2 つあり，2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の 2 つの操作を続けて行い（この 2 つの操作を合わせて「一手」と呼ぶことにする），手番を相手に交代する．

- 片方の山を選び，その山の石をすべて取り去ることで山を除去する．
- 残っているもう 1 つの山の石を 2 つの山に分ける．このとき，どちらの山も 1 個以上の石を含むようにしなければならない．

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる．

Delete Nim の勝敗条件

Delete Nim の局面を 2 つの山の石の数 y, z を用いて $\langle y, z \rangle$ と表す．

ゲームに現れる局面全体の集合は $G_2 = \{ \langle y, z \rangle \mid y, z \in \mathbb{N} \}$ であり，$\langle 1, 1 \rangle$ では手番側のプレイヤーが上記の操作を行うことができないため負けとなる．

G_2 に含まれる各局面は手番側が必ず勝てる $\mathcal{N}$ 局面と，手番側が必敗である $\mathcal{P}$ 局面に分類できる．この判定条件は以下のように知られている．

Theorem 1

Delete Nim において y, z がともに奇数であるとき $\langle y, z \rangle$ は $\mathcal{P}$ 局面であり，それ以外は $\mathcal{N}$ 局面である．

Abuku-Suetsugu(2021) では各局面の Grundy 数も得られている．

Delete Nim の一般化とは

本研究では,「いくつかの山を除去し，残した山を分割して山数は一定数を保つ」という Delete Nim の特徴を持ちながら山の数 n を一般化する 2 種類の拡張ルールを考える.

All-but one delete Nim　1 つの山以外をすべて除去する
（残った 1 つの山を n 分割する）

Single-delete Nim　1 つの山だけを除去する
（残った山の 1 つを選んで 2 分割する）

いずれの拡張も、2 人のプレイヤーが交互に手番での操作を行う点は同じである．また，山の数が 2 であればいずれも Delete Nim に一致する.

All-but one delete Nim (ABO-delete Nim)

いくつかの石で構成される n 個の山がある．2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の 2 つの操作を続けて行い，手番を相手に交代する．

- $n-1$ 個の山を選び，それらの山を除去する．
- 残っている 1 つの山の石を n 個の山に分ける．
  このとき，どの山も 1 個以上の石を含まなければならない．

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる．

このゲームの終了局面の集合は

$$\{\langle z_1, z_2, \dots, z_n\rangle \mid 1 \le z_1, z_2, \dots, z_n \le n-1\}$$

である．

Single-delete Nim

いくつかの石で構成される n 個の山がある．2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の 2 つの操作を続けて行い，手番を相手に交代する．

- 1 つの山を選んで除去する．
- 残っている $n-1$ 個の山のうちの 1 つを選んで 2 つの山に分ける．このとき，どちらの山も 1 個以上の石を含まなければならない．

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる．

このゲームの終了局面は

$$\langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$$

のみである．

ABO-delete Nim の勝敗判定条件

ABO-delete Nim の各局面について，$\mathcal{P}$ 局面であるか $\mathcal{N}$ 局面であるかの判定条件を示す．すべての n に対し，以下の結果を得た．

Theorem 2

ABO-delete Nim の局面 $\langle z_1, z_2, \ldots, z_n \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は

すべての i に対し，z_i を $n(n-1)$ で割った余りが 1 以上 $n-1$ 以下

である．

証明は容易．$n = 4$ の場合で考えてみると，12 で割った余りが 1 以上 3 以下である数を，すべて余りが 1 以上 3 以下であるような 4 つの数に分割できないことからわかる．

3山 Single-delete Nim の勝敗判定

山の数が 3 つであるときの Single-delete Nim についてはすでに勝敗判定条件が坂井 (2021) により知られている．

正の整数 z に対し，z が 2^k で割り切れて 2^{k+1} で割り切れないとき $v_2(z) = k$ と表す．

Theorem 3

3山 Single-delete Nim の局面 $\langle x, y, z \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は

$$v_2(x) = v_2(y) = v_2(z)$$

である．

4 山 Single-delete Nim：基本的な考察

4 山 Single-delete Nim の勝敗判定について，4 つの山の石数がすべて奇数であると $\mathcal{P}$ 局面であることが簡単な考察によりわかる．

$$\langle\ 奇, 奇, 奇, 奇\ \rangle \quad \overset{\forall}{\rightarrow} \quad \langle\ 奇, 奇, 奇, 偶\ \rangle \quad \overset{\exists}{\rightarrow} \quad \langle\ 奇, 奇, 奇, 奇\ \rangle$$

により，自分の手番で $\langle$ 奇, 奇, 奇, 奇 $\rangle$ になると，その状態からずっと抜け出せず最終的に終了局面 $\langle 1, 1, 1, 1\rangle$ に到達してしまうことによる．

よって $\langle$ 奇, 奇, 奇, 偶 $\rangle$ や $\langle$ 奇, 奇, 偶, 偶 $\rangle$ は $\mathcal{N}$ 局面である．

$\langle 11133, 12716, 7136, 13312\rangle$ や $\langle 45053, 62932, 32576, 64512\rangle$ では？

4 山 Single-delete Nim：2 進法表記

z を 2 進法で表したときの下から k 桁目の数字を $l_k(z)$ で表す．

つまり z を 2^{k-1} で割ったときの商が偶数なら $l_k(z) = 0$，奇数なら $l_k(z) = 1$ であり，$v_2(z) = \min\{\, k \mid l_k(z) = 1\} - 1$ と表される．

例）$\langle w, x, y, z\rangle = \langle 669, 468, 800, 288\rangle$ という局面を考える．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 1010011101 \\ x & 0111010100 \\ y & 1100100000 \\ z & 0100100000 \end{array}$$

である．このとき $v_2(w) = 0, v_2(x) = 2, v_2(y) = v_2(z) = 5$ であり，

$l_6(z) = 1, l_5(z) = 0, l_3(w) = l_3(x) = 1$ などと表される．

4 山 Single-delete Nim の勝敗判定

今回の研究で，4 山 Single-delete Nim の勝敗判定条件を完全に得た．
具体的に，$\mathcal{P}$ 局面は 5 種類に分類される．

Theorem 4

山数が *4* の *Single-delete Nim* の局面 $\langle w, x, y, z\rangle$ において
$a = v_2(w)$, $b = v_2(x)$, $c = v_2(y)$, $d = v_2(z)$ とする． $a \leq b \leq c \leq d$ であるとき，この $\langle w, x, y, z\rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は，以下の *(1),(2),(3),(4),(5)* のいずれかの条件をみたすことである．

以下，$\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件 (1),(2),(3),(4),(5) を述べる．

$\mathcal{P}$ 局面 (1)

(1) $a = b = c = d$.

この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 1440, 864, 672, 1120 \rangle$ がある．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 10110100000 \\ x & 01101100000 \\ y & 01010100000 \\ z & 10001100000 \end{array}$$

であり，最も下の桁に現れる 1 の位置が同一である．

$\mathcal{P}$ 局面 (2)

(2) $a < b = c = d$ かつ $l_{d+1}(w) = 0$.

この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z\rangle = \langle 294, 208, 304, 432\rangle$ がある．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 100100110 \\ x & 011010000 \\ y & 100110000 \\ z & 110110000 \end{array}$$

である．

$\mathcal{P}$ 局面 (3)

(3) $a < b < c = d$ かつ $I_{d+1}(w) = I_{d+1}(x) = 0$ かつ $b + 2 \leq k \leq d$ に対し $I_k(w) + I_k(x) \geq 1$ かつ $I_{b+1}(w) = 1$.

この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 669, 468, 800, 288 \rangle$ がある．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 1010011101 \\ x & 0111010100 \\ y & 1100100000 \\ z & 0100100000 \end{array}$$

である．

$\mathcal{P}$ 局面 (4)

(4) $a < b < c < d$ かつ (4A)-(4E) がすべて成り立つ．

(4A) $I_{d+1}(w) = I_{d+1}(x) = I_{d+1}(y) = 0,$

(4B) $c + 2 \leq j \leq d$ に対し $I_j(w) + I_j(x) + I_j(y) \geq 2,$

(4C) $I_{c+1}(w) = I_{c+1}(x) = 1,$

(4D) $b + 2 \leq k \leq c$ に対し $I_k(w) + I_k(x) \geq 1,$

(4E) $I_{b+1}(w) = 1.$

この場合の局面の具体的な例として
$\langle w, x, y, z \rangle = \langle 11133, 12716, 7136, 13312 \rangle$ がある．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 10101101111101 \\ x & 11000110101100 \\ y & 01101111100000 \\ z & 11010000000000 \end{array}$$

である．

$\mathcal{P}$ 局面 (5)

(5) $a < b < c < d$ かつ (5A)-(5F) がすべて成り立つ．

(5A) $i \geq d+2$ に対し $l_i(w) + l_i(x) + l_i(y) + l_i(z) \in \{0, 3, 4\}$,

(5B) $l_{d+1}(w) = l_{d+1}(x) = l_{d+1}(y) = 1$,

(5C) $c+2 \leq j \leq d$ に対し $l_j(w) + l_j(x) + l_j(y) \geq 2$,

(5D) $l_{c+1}(w) = l_{c+1}(x) = 1$,

(5E) $b+2 \leq k \leq c$ に対し $l_k(w) + l_k(x) \geq 1$,

(5F) $l_{b+1}(w) = 1$.

具体的な例は $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 45053, 62932, 32576, 64512 \rangle$ で，2 進表記は

$$
\begin{array}{ll}
w & 1010111111111101 \\
x & 1111010111010100 \\
y & 0111111101000000 \\
z & 1111110000000000
\end{array}
$$

$\mathcal{P}$ 局面条件の必然性

たとえば (4) において，(4B) の条件がみたされない類似局面

$$\begin{array}{ll} w & 10101101111101 \\ x & 11000110101100 \\ y & 011011\underline{0}1100000 \\ z & 11010000000000 \end{array}$$

においては，x を消去し z を z', z'' に分割し

$$\begin{array}{ll} w & 10101101111101 \\ y & 01101101100000 \\ z' & 11001110000000 \\ z'' & 00000010000000 \end{array}$$

として一手で (3) の条件をみたすことができてしまう．

5 山以上の Single-delete Nim

4 山の Single-delete Nim の勝敗条件は 3 山以下の場合と比べて複雑になっており，さらに山の数を増やす場合の条件は予想することもできていない。

Theorem 5

山数 n が 2 以上の *Single-delete Nim* において，n を 3 で割った余りが 2 であれば $\langle 2, 2, 2, \ldots, 2 \rangle$ は $\mathcal{N}$ 局面であり，それ以外の n に対しては $\langle 2, 2, 2, \ldots, 2 \rangle$ は $\mathcal{P}$ 局面である．

この命題は，定理 3 や定理 4(1) の条件のように各山の石の個数が 2 で割れる回数がすべて等しくても，山の数によっては $\mathcal{P}$ 局面となるとは限らず勝敗条件がより複雑になることを示唆している．

まとめ

本報告では，Delete Nim の山数を一般化した All-but one delete Nim，Single-delete Nim という 2 つのゲームを導入しその勝敗条件について考察した．

その結果，All-but one delete Nim についてはすべての山数の場合の勝敗条件を得た．

Single-delete Nim については $n = 4$ の場合の勝敗条件を得た．

今後 $n \geq 5$ の場合の一般的な勝敗判定を行うことが目標である．

acknowledgment 本研究内容に関し，末續鴻輝，安福智明，坂井公の各氏に大変貴重なコメントを頂いたことに感謝します．