

## 4 山削除分割二ムの勝敗条件とその証明

篠田 正人

奈良女子大学研究院自然科学系数学領域

August 20, 2022

- ① 削除分割二木の紹介
- ② 山数を増やした削除分割二木
- ③ 4 山削除分割二木の勝敗判定

# Nim とは

Nim は、古くからよく知られた、2 人のプレイヤーで行われる石取りゲームである。

いくつかの石で構成される山が 3 つあり、プレイヤーは自分の手番で 1 つの山を選び、その山から任意の正の整数個の石を取り除く。

ゲームの途中の局面を 3 つの山の石の数を列挙することで  $\langle x, y, z \rangle$  の形で表す ( $x, y, z$  はすべて非負整数) とき、たとえば  $\langle 3, 5, 7 \rangle$  の局面において手番側のプレイヤーは  $\langle 3, 2, 7 \rangle$  や  $\langle 0, 5, 7 \rangle$  の局面にすることができる。

この手番での操作を交互に行い、最後の石を取ったほうのプレイヤーが勝ちである。

このゲームは山の数を 3 つより増やした場合も同様のルールで定義することができる。

# $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面

Nim は二人零和完全情報確定有限ゲームであり引き分けがないため、すべての局面を

- 手番側必勝（その局面で次の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である  $\mathcal{N}$  局面と
- 手番側必敗（その局面で前の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である  $\mathcal{P}$  局面

に分類できる．

Nim における  $\mathcal{N}$  局面と  $\mathcal{P}$  局面の判定は Bouton(1902) で示され、このゲームの勝敗条件には数学的にも興味深い構造が含まれることが知られるようになった．

またゲームのより詳しい解析として各局面の Grundy 数を得る研究もなされている．

# 削除分割ニムとは

Delete Nim は, Abuku-Suetsugu(2021) らによって導入された, 石を取りつつ山を分割するゲームである.

Delete Nim ではいくつかの石で構成する山が 2 つあり, 2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の 2 つの操作を続けて行い (この 2 つの操作を合わせて「一手」と呼ぶことにする), 手番を相手に交代する.

- 片方の山を選び, その山の石をすべて取り去ることで山を除去する.
- 残っているもう 1 つの山の石を 2 つの山に分ける. このとき, どちらの山も 1 個以上の石を含むようにしなければならない.

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる.

ここでは上記の 2 つの操作の前後を強調するため, 削除分割ニム (Delete-and-split Nim) と呼ぶ.

# 削除分割ニムの勝敗条件

削除分割ニムの局面を2つの山の石の数  $y, z$  を用いて  $\langle y, z \rangle$  と表す.

ゲームに現れる局面全体の集合は  $G_2 = \{ \langle y, z \rangle \mid y, z \in \mathbb{N} \}$  であり,  $\langle 1, 1 \rangle$  では手番側のプレイヤーが上記の操作を行うことができないため負けとなる.

$G_2$  に含まれる各局面は手番側が必ず勝てる  $\mathcal{N}$  局面と, 手番側が必敗である  $\mathcal{P}$  局面に分類できる. この判定条件は以下のように知られている.

## Theorem 1

削除分割ニムにおいて  $y, z$  がともに奇数であるとき  $\langle y, z \rangle$  は  $\mathcal{P}$  局面であり, それ以外は  $\mathcal{N}$  局面である.

Abuku-Suetsugu(2021) では各局面の Grundy 数も得られている.

# 削除分割ニムの一般化

「いくつかの山を除去し、残した山を分割して山数は一定数を保つ」という削除分割ニムの特徴を持ちながら山の数  $n$  を一般化する様々な拡張ルールが考えられる．例えば以下の2つの拡張例がある．

All-but one delete Nim 1つの山以外をすべて除去する  
(残った1つの山を  $n$  分割する)

Single-delete Nim 1つの山だけを除去する  
(残った山の1つを選んで2分割する)

いずれの拡張も、2人のプレイヤーが交互に手番での操作を行う点は同じである．また、山の数  $n$  が2であればいずれも元の削除分割ニムに一致する．今回の発表内容は4山 Single-delete Nimがメインである．

いくつかの石で構成される  $n$  個の山がある. 2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の 2 つの操作を続けて行い, 手番を相手に交代する.

- 1 つの山を選んで除去する.
- 残っている  $n - 1$  個の山のうちの 1 つを選んで 2 つの山に分ける. このとき, どちらの山も 1 個以上の石を含まなければならない.

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる.

このゲームの終了局面は

$$\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$$

のみである.



# 3山 Single-delete Nim の勝敗判定

山の数 が 3 つであるときの Single-delete Nim については勝敗判定条件が坂井 (2021) により示された.

正の整数  $z$  に対し,  $z$  が  $2^k$  で割り切れて  $2^{k+1}$  で割り切れないとき  $v_2(z) = k$  と表す.

## Theorem 2

3山 Single-delete Nim の局面  $\langle x, y, z \rangle$  が  $\mathcal{P}$  局面である必要十分条件は

$$v_2(x) = v_2(y) = v_2(z)$$

である.

# 山の分割に関する基本的な性質

正の整数の分割について簡単な性質をいくつか確認しておく。

- 奇数は偶数と奇数にしか分割できない．4以上の偶数は2つの偶数，あるいは2つの奇数に分割できる．  
（この事実から Theorem 1 が導ける）
- $v_2(x) > v_2(y)$  であれば， $x$  を  $x'$  と  $x''$  に分割して

$$v_2(x') = v_2(x'') = v_2(y)$$

とすることが可能である．

（この事実から Theorem 2 が導ける）

## 4 山 Single-delete Nim : 基本的な考察

4 山 Single-delete Nim の勝敗判定について, 4 つの山の石数がすべて奇数であると  $\mathcal{P}$  局面であることが簡単な考察によりわかる.

$$\langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{奇} \rangle \quad \forall \rightarrow \quad \langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{偶} \rangle \quad \exists \rightarrow \quad \langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{奇} \rangle$$

により, 自分の手番で  $\langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{奇} \rangle$  になると, その状態からずっと抜け出せず最終的に終了局面  $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$  に到達してしまうことによる.

よって  $\langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{偶} \rangle$  や  $\langle \text{奇}, \text{奇}, \text{偶}, \text{偶} \rangle$  は  $\mathcal{N}$  局面である.

$\langle 11133, 12716, 7136, 13312 \rangle$  や  $\langle 45053, 62932, 32576, 64512 \rangle$  では?

## 4 山 Single-delete Nim : 2 進法表記

$z$  を 2 進法で表したときの下から  $k$  桁目の数字を  $l_k(z)$  で表す.

つまり  $z$  を  $2^{k-1}$  で割ったときの商が偶数なら  $l_k(z) = 0$ , 奇数なら  $l_k(z) = 1$  であり,  $v_2(z) = \min\{k \mid l_k(z) = 1\} - 1$  と表される.

例)  $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 669, 468, 800, 288 \rangle$  という局面を考える. 石数を 2 進表記すると

|     |            |
|-----|------------|
| $w$ | 1010011101 |
| $x$ | 0111010100 |
| $y$ | 1100100000 |
| $z$ | 0100100000 |

である. このとき  $v_2(w) = 0, v_2(x) = 2, v_2(y) = v_2(z) = 5$  であり,  $l_6(z) = 1, l_5(z) = 0, l_3(w) = l_3(x) = 1$  などと表される.

## 4 山 Single-delete Nim の勝敗判定

篠田: Delete Nim の一般化と勝敗判定, 情報処理学会研究報告, Vol. 2022-GI-47, No.5, 1-8 (2022)

で, 4 山 Single-delete Nim の勝敗判定条件を完全に得た.

具体的に,  $\mathcal{P}$  局面は 5 種類に分類される.

### Theorem 3

山数が 4 の Single-delete Nim の局面  $\langle w, x, y, z \rangle$  において

$a = v_2(w)$ ,  $b = v_2(x)$ ,  $c = v_2(y)$ ,  $d = v_2(z)$  とする.  $a \leq b \leq c \leq d$  であるとき, この  $\langle w, x, y, z \rangle$  が  $\mathcal{P}$  局面である必要十分条件は, 以下の (1), (2), (3), (4), (5) のいずれかの条件をみたすことである.

以下,  $\mathcal{P}$  局面である必要十分条件 (1), (2), (3), (4), (5) を述べる.

# $\mathcal{P}$ 局面 (1)

(1)  $a = b = c = d$ . すなわち  $v_2(w) = v_2(x) = v_2(y) = v_2(z)$ .

この場合の局面の具体的な例として  $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 1440, 864, 672, 1120 \rangle$  がある. 石数を 2 進表記すると

|     |             |
|-----|-------------|
| $w$ | 10110100000 |
| $x$ | 01101100000 |
| $y$ | 01010100000 |
| $z$ | 10001100000 |

であり, 最も下の桁に現れる 1 の位置が同一である.

## $\mathcal{P}$ 局面 (2)

(2)  $a < b = c = d$  かつ  $l_{d+1}(w) = 0$ .

この場合の局面の具体的な例として  $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 294, 208, 304, 432 \rangle$  がある．石数を2進表記すると

|     |           |
|-----|-----------|
| $w$ | 100100110 |
| $x$ | 011010000 |
| $y$ | 100110000 |
| $z$ | 110110000 |

である．

## (2A) の条件がみたされない類似局面

|     |                    |
|-----|--------------------|
| $w$ | 1001 <u>1</u> 0110 |
| $x$ | 011010000          |
| $y$ | 100110000          |
| $z$ | 110110000          |

においては,  $x$  を消去して  $w$  を  $w', w''$  に分割し

|       |           |
|-------|-----------|
| $w'$  | 100100110 |
| $w''$ | 000010000 |
| $y$   | 100110000 |
| $z$   | 110110000 |

として一手で (2) の条件をみたすことができてしまう.



## $\mathcal{P}$ 局面 (3)

(3)  $a < b < c = d$  かつ  $l_{d+1}(w) = l_{d+1}(x) = 0$  かつ

$b + 2 \leq k \leq d$  に対し  $l_k(w) + l_k(x) \geq 1$  かつ  $l_{b+1}(w) = 1$ .

この場合の局面の具体的な例として  $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 669, 468, 800, 288 \rangle$  がある. 石数を2進表記すると

|     |            |
|-----|------------|
| $w$ | 1010011101 |
| $x$ | 0111010100 |
| $y$ | 1100100000 |
| $z$ | 0100100000 |

である. (条件から  $l_{d+1}(w + x) = 1$  であることも証明で効いてくる)

### (3B) の条件がみたされない類似局面

|     |                     |
|-----|---------------------|
| $w$ | 10100 <u>0</u> 1101 |
| $x$ | 01110 <u>0</u> 0100 |
| $y$ | 1100100000          |
| $z$ | 0100100000          |

においては,  $z$  を消去し  $y$  を  $y', y''$  に分割し

|       |            |
|-------|------------|
| $w$   | 1010001101 |
| $x$   | 0111000100 |
| $y'$  | 1100010000 |
| $y''$ | 0000010000 |

として一手で (3) の条件をみたすことができてしまう.

## $\mathcal{P}$ 局面 (4)

(4)  $a < b < c < d$  かつ (4A)-(4E) がすべて成り立つ.

(4A)  $l_{d+1}(w) = l_{d+1}(x) = l_{d+1}(y) = 0$ ,

(4B)  $c + 2 \leq j \leq d$  に対し  $l_j(w) + l_j(x) + l_j(y) \geq 2$ ,

(4C)  $l_{c+1}(w) = l_{c+1}(x) = 1$ ,

(4D)  $b + 2 \leq k \leq c$  に対し  $l_k(w) + l_k(x) \geq 1$ ,

(4E)  $l_{b+1}(w) = 1$ .

この場合の局面の具体的な例として

$\langle w, x, y, z \rangle = \langle 111133, 12716, 7136, 13312 \rangle$  がある. 石数を 2 進表記すると

|     |                |
|-----|----------------|
| $w$ | 10101101111101 |
| $x$ | 11000110101100 |
| $y$ | 01101111100000 |
| $z$ | 11010000000000 |

である. (条件から  $l_{d+1}(w + x) = 1$  であることも証明で効いてくる)

## (4B) の条件がみたされない類似局面

|     |                         |
|-----|-------------------------|
| $w$ | 10101101111101          |
| $x$ | 11000110101100          |
| $y$ | 0110110 <u>1</u> 100000 |
| $z$ | 11010000000000          |

においては,  $x$  を消去し  $z$  を  $z', z''$  に分割し

|       |                |
|-------|----------------|
| $w$   | 10101101111101 |
| $y$   | 01101101100000 |
| $z'$  | 11001110000000 |
| $z''$ | 00000010000000 |

として一手で (3) の条件をみたすことができる.

## $\mathcal{P}$ 局面 (5)

(5)  $a < b < c < d$  かつ (5A)-(5F) がすべて成り立つ.

(5A)  $i \geq d + 2$  に対し  $l_i(w) + l_i(x) + l_i(y) + l_i(z) \in \{0, 3, 4\}$ ,

(5B)  $l_{d+1}(w) = l_{d+1}(x) = l_{d+1}(y) = 1$ ,

(5C)  $c + 2 \leq j \leq d$  に対し  $l_j(w) + l_j(x) + l_j(y) \geq 2$ ,

(5D)  $l_{c+1}(w) = l_{c+1}(x) = 1$ ,

(5E)  $b + 2 \leq k \leq c$  に対し  $l_k(w) + l_k(x) \geq 1$ ,

(5F)  $l_{b+1}(w) = 1$ .

具体的な例は  $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 45053, 62932, 32576, 64512 \rangle$  で, 2進表記は

|     |                  |
|-----|------------------|
| $w$ | 1010111111111101 |
| $x$ | 1111010111010100 |
| $y$ | 0111111101000000 |
| $z$ | 1111110000000000 |

## (5A) の条件がみたされない類似局面

|     |                           |
|-----|---------------------------|
| $w$ | 1010111111111101          |
| $x$ | 1111010111010100          |
| $y$ | 011 <u>0</u> 111101000000 |
| $z$ | 1111110000000000          |

においては,  $x$  を消去し  $z$  を  $z', z''$  に分割し

|       |                  |
|-------|------------------|
| $w$   | 1010111111111101 |
| $y$   | 0110111101000000 |
| $z'$  | 1110110000000000 |
| $z''$ | 0001000000000000 |

として一手で (4) の条件をみたすことができてしまう.

## 5 山以上の Single-delete Nim

4 山の Single-delete Nim の勝敗条件は 3 山以下の場合と比べて複雑になっており、さらに山の数を増やす場合の条件は予想することもできていない。

### Theorem 4

山数  $n$  が 2 以上の *Single-delete Nim* において、 $n$  を 3 で割った余りが 2 であれば  $\langle 2, 2, 2, \dots, 2 \rangle$  は  $\mathcal{N}$  局面であり、それ以外の  $n$  に対しては  $\langle 2, 2, 2, \dots, 2 \rangle$  は  $\mathcal{P}$  局面である。

この命題は、各山の石の個数が 2 で割れる回数がすべて等しくても、山の数によっては  $\mathcal{P}$  局面となるとは限らず勝敗条件がより複雑になることを示唆している。