

分割削除二ムの勝敗判定

安福 智明¹ 坂井 公² 篠田 正人³ 末續 鴻輝¹

¹ 国立情報学研究所

² 神奈川大学

³ 奈良女子大学

November 11, 2022

- ① 分割削除ニムについて
- ② 2山ニムでの比較
- ③ 山数を増やす分割削除ニム

ニムとは

ニム (Nim) は、古くからよく知られた、2 人のプレイヤーで行われる石取りゲームである。

いくつかの石で構成される山が 3 つあり、プレイヤーは自分の手番で 1 つの山を選び、その山から任意の正の整数個の石を取り除く。



ゲームの途中の局面を 3 つの山の石の数を列挙することで $\langle a, b, c \rangle$ の形で表す (a, b, c はすべて非負整数) とき、たとえば $\langle 3, 5, 7 \rangle$ の局面において手番側のプレイヤーは $\langle 3, 2, 7 \rangle$ や $\langle 0, 5, 7 \rangle$ の局面にすることができる。

この手番での操作を交互に行い、最後の石を取ったほうのプレイヤーが勝ちである。

このゲームは山の数 を 3 つより増やした場合も同様のルールで定義することができる。

$\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面

ニムは二人零和完全情報確定有限ゲームであり引き分けがないため、すべての局面を

- 手番側必勝（その局面で次の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{N}$ 局面と
- 手番側必敗（その局面で前の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{P}$ 局面

に分類できる．

ニムにおける $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面の判定は Bouton(1902) で示され、このゲームの勝敗条件には数学的にも興味深い構造が含まれることが知られるようになった．

またゲームのより詳しい解析として各局面の Grundy 数（後述）を得る研究もなされている．

削除分割ニムとは

削除ニム (Delete Nim) は, Abuku-Suetsugu(2021) らによって導入された, 「山の削除」と「山の分割」を行うゲームである.

削除ニムではいくつかの石で構成される山が2つあり, 2人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の2つの操作を続けて行い (この2つの操作を合わせて「一手」と呼ぶことにする), 手番を相手に交代する.

- 片方の山を選び, その山の石をすべて取り去ることで山を削除する.
- 残っているもう1つの山の石を2つの山に分ける. このとき, どちらの山も1個以上の石を含むようにしなければならない.

自分の手番でこれらの操作が完了できないプレイヤーは負けとなる.

ここでは上記の2つの操作の前後を強調するため, 削除分割ニム (Delete-and-split Nim) と呼ぶ.

分割削除ニムとは

削除分割ニムにおける「山の削除」と「山の分割」の操作順を入れ替えた新たなゲーム、分割削除ニム (Split-and-delete Nim) を考える。

分割削除ニムではいくつかの石で構成される山が2つあり、2人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の2つの操作を続けて行い、手番を相手に交代する。

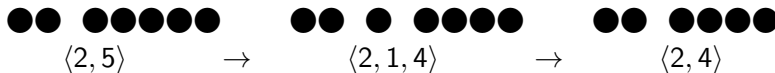
- 片方の山を選び、2つの山に分ける。このとき、どちらの山も1個以上の石を含むようにしなければならない。
- 3つの山のうちの1つを選び、その山の石をすべて取り去ることで山を削除する。

自分の手番でこれらの操作が完了できないプレイヤーは負けとなる。

削除分割ニムと分割削除ニムの比較

「山の削除」と「山の分割」の操作順が異なることで、可能な着手の集合にも違いが生じる。

たとえば場の2つの山の石の数がそれぞれ2個と5個であるとき、一手で2個と4個の山にすることが削除分割ニムでは不可能であるが、分割削除ニムでは可能である。



すなわち

削除分割ニムで可能な着手の集合 $\subseteq$ 分割削除ニムで可能な着手の集合

削除分割ニムの勝敗条件

削除分割ニム，分割削除ニムに現れる局面全体の集合は

$G_2 = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbb{N} \}$ であり，どちらのゲームでも $\langle 1, 1 \rangle$ では手番側のプレイヤーが操作を完了できないため負けとなる．

G_2 に含まれる各局面は手番側が必勝である $\mathcal{N}$ 局面と，手番側が必敗である $\mathcal{P}$ 局面に分類できる．削除分割ニムにおいては，この判定条件は以下のように知られている．

Theorem 1

削除分割ニムにおいて $\langle a, b \rangle \in G_2$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は， a, b がともに奇数であることである．

Abuku-Suetsugu(2021) では各局面の Grundy 数も得られている．

分割削除ニムの勝敗条件

今回の研究では、分割削除ニムにおける勝敗判定条件を得た。

Theorem 2 (本研究での主結果 1)

分割削除ニムにおいて $\langle a, b \rangle \in G_2$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は、 $a = b$ かつ a が 2 で割れる回数が偶数であることである。

(証明の一部) 局面 $\langle a, b \rangle$ において a が 2 で割れる回数が奇数であれば、石の数が a である山を等分割し、石の数が b である山を削除することで局面 $\langle a/2, a/2 \rangle$ に移すことが可能である。

後述するとおり、各局面の Grundy 数はまだ得られていない。

2山ニムの可能着手と勝敗条件の関係

山数が2のときの4種類のニム（ニム，Wythoffのニム，削除分割ニム，分割削除ニム）の勝敗条件を比較して考察を行う．

ニム 1つの山を選び，その山から正の整数個の石を取る．

Wythoffのニム 1つの山から正の整数個の石を取るか，2つの山から同数の正の整数個の石を取る．

削除分割ニム 2つの山の片方を削除し，もう片方の山を2つに分割する．

分割削除ニム 2つの山の片方を2つに分割し，3つの山のうち1つを削除する．

ただし，本発表内ではこれらのニムで石を取るあるいは分割するとき「各山に少なくとも1個の石を残す」こととする．
（石の山の数をつねに2山に保つ）

Table: ニムでの $\langle 6, 8 \rangle$ の後続局面

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	×	○	×	×	×
2	×	×	×	×	×	○	×	×	×
3	×	×	×	×	×	○	×	×	×
4	×	×	×	×	×	○	×	×	×
5	×	×	×	×	×	○	×	×	×
6	×	×	×	×	×	○	×	×	×
7	×	×	×	×	×	○	×	×	×
8	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Table: Wythoff のニムでの $\langle 6, 8 \rangle$ の後続局面

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	×	○	×	×	×
2	×	×	×	×	×	○	×	×	×
3	○	×	×	×	×	○	×	×	×
4	×	○	×	×	×	○	×	×	×
5	×	×	○	×	×	○	×	×	×
6	×	×	×	○	×	○	×	×	×
7	×	×	×	×	○	○	×	×	×
8	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Table: 削除分割ニムでの $\langle 6, 8 \rangle$ の後続局面

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	○	×	○	×	×
2	×	×	×	○	×	○	×	×	×
3	×	×	○	×	○	×	×	×	×
4	×	○	×	○	×	×	×	×	×
5	○	×	○	×	×	×	×	×	×
6	×	○	×	×	×	×	×	×	×
7	○	×	×	×	×	×	×	×	×
8	×	×	×	×	×	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Table: 分割削除ニムでの $\langle 6, 8 \rangle$ の後続局面

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	○	○	○	×	×
2	×	×	×	○	×	○	×	×	×
3	×	×	○	×	○	○	×	×	×
4	×	○	×	○	×	○	×	×	×
5	○	×	○	×	×	○	×	×	×
6	×	○	×	×	×	○	×	×	×
7	○	×	×	×	×	○	×	×	×
8	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

勝敗条件と Grundy 数

これらのニムにおける勝敗条件の比較を行う．ここでは各局面の Grundy 数も考察する．

$\mathbb{N}_0$ の真部分集合 T に対し， $\text{mex}(T) = \min\{s \in \mathbb{N}_0 \mid s \notin T\}$ とする．
ゲームの局面 g に対し， g の Grundy 数 $G(g)$ を終了局面から以下のように再帰的に

$$G(g) = \begin{cases} 0 & g \text{ は終了局面} \\ \text{mex}\{G(g') \mid g' \text{ は } g \text{ の後続局面}\} & \text{終了局面以外} \end{cases}$$

と定める．

$G(g) = 0$ であることと g が $\mathcal{P}$ 局面であることは同値である．

Table: ニム の Grundy 数

$a \setminus b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0

Table: Wythoff の二木の Grundy 数

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	0	4	5	3	7	8	6
3	2	0	1	5	3	4	8	6	7
4	3	4	5	6	2	0	1	9	10
5	4	5	3	2	7	6	9	0	1
6	5	3	4	0	6	8	10	1	2
7	6	7	8	1	9	10	3	4	5
8	7	8	6	9	0	1	4	5	3
9	8	6	7	10	1	2	5	3	4

Table: 削除分割二つの Grundy 数

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	2	0	1	0	3	0
2	1	1	2	2	1	1	3	3	1
3	0	2	0	2	0	3	0	3	0
4	2	2	2	2	3	3	3	3	2
5	0	1	0	3	0	1	0	3	0
6	1	1	3	3	1	1	3	3	1
7	0	3	0	3	0	3	0	3	0
8	3	3	3	3	3	3	3	3	4
9	0	1	0	2	0	1	0	4	0

Table: 分割削除二つの Grundy 数

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	3	0	5	6	7	4	9	10
4	3	4	5	0	1	8	9	10	6
5	4	5	6	1	0	2	8	11	12
6	5	6	7	8	2	1	3	12	11
7	6	7	4	9	8	3	0	1	2
8	7	8	9	10	11	12	1	2	3
9	8	9	10	6	12	11	2	3	0

2 山二ムの比較のまとめと課題

- 分割削除二ムの $\mathcal{P}$ 局面の集合は二ムの $\mathcal{P}$ 局面の集合に含まれる。
- しかし、可能な着手の包含関係から $\mathcal{P}$ 局面の集合の一般的な包含関係や Grundy 数の大小関係は成立しない。(例: 分割削除二ムと削除分割二ム)
- 局面の Grundy 数はその局面の後続局面の個数以下であることが定義から言えるため、可能な着手の多い Wythoff の二ムや分割削除二ムでは大きな Grundy 数が現れやすい傾向がある。

なお、Wythoff の二ム、分割削除二ムの Grundy 数についてはまだ簡単な表式は得られていない (Grundy 数が 0, 1, 2 といった小さい場合については得ることができている)

山数を増やす一般化

山の数 n を一般化する様々な拡張ルールが考えられる．削除分割ニムにおいては以下のような拡張例を考えた．

- ABO ニム (篠田 2022) n 個の山のうちから $n - 1$ 個の山を選び削除し，残っている 1 つの山を n 個の山に分ける．
- 1 山削除ニム (坂井 2021, 篠田 2022) n 個の山のうちから 1 つの山を選んで削除し，残っている $n - 1$ 個の山のうちの 1 つを選んで 2 つの山に分ける．
- 半数削除ニム (n は偶数, 安福-坂井-篠田-末續 2022) n 個の山のうちから半数の山を選んで削除し，残っている半数の山を 2 つずつの山に分ける．
- 半数以下削除ニム (安福-坂井-篠田-末續 2022) n 個の山のうちから半数以下の山を選んで削除し，削除したのと同数の山を 2 つずつの山に分ける．

拡張分割削除二ム

分割削除二ムについても，山数の一般化を試みた．

- ABO 分割削除二ム n 個の山のうちから $n - 1$ 個の山を選んで分割し，分割したのと同数の山を削除する． $\rightarrow n \geq 3$ では 1 手で終了する $\times$
- 1 山分割削除二ム n 個の山のうちから 1 つの山を選んで分割し， $n + 1$ 個の山のうちの 1 つを選んで削除する． $\rightarrow n = 3$ でも難物 $\triangle$
- 半数分割削除二ム (n は偶数) n 個の山のうちから半数の山を選んで分割し，分割したのと同数の山を削除する． $\rightarrow n = 4$ について解決 $\bigcirc$
- 半数以下削除二ム n 個の山のうちから半数以下の山を選んで分割し，分割したのと同数の山を削除する． $\rightarrow n = 3$ のときは，1 山分割削除二ムと同じ $\triangle$

4 山半数分割削除ニム

4つの山のうちから2つの山を選んで分割し、6つの山から2つの山を削除する。

ゲームに現れる局面（どちらの手番かという情報を含まない）全体の集合は $G_4 = \{ \langle a, b, c, d \rangle \mid a, b, c, d \in \mathbb{N} \}$ であり、 $\langle 1, 1, 1, d \rangle$ (d は任意の正の整数) では手番のプレイヤーが上記の操作を行うことができないため負けとなる。

2でちょうど偶数回割れる正の整数の集合を S とする。すなわち $S = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, \dots\}$ である。この記号を用いれば、2山分割削除ニムの $\mathcal{P}$ 局面の集合は $\{ \langle a, a \rangle \mid a \in S \}$ と書ける。

4 山半数分割削除二ムの勝敗判定条件

a 以上の正の整数の集合 $D(a)$ を, $D(1) = \mathbb{N}$, $a \in S$ かつ $a \neq 1$ に対しては $D(a)$ は以下の条件をみたすように定める.

- $m < a$ に対しては $m \notin D(a)$.
- $a \leq m \leq 2a - 1$ に対しては $m \in D(a) \iff m \in S$.
- $m \geq 2a$ に対しては $m \in D(a) \iff m - a \notin D(a)$ と, S に含まれるかどうかを小さい m から順次定める.

たとえば $D(4) = \{4, 5, 7, 10, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 23, \dots\}$ となる.

Theorem 3 (本論文の主結果 2)

4 山半数分割削除二ムにおける局面 $\langle a, b, c, d \rangle \in G_4$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は, $\langle a, b, c, d \rangle$ の昇順表記 $\langle a', b', c', d' \rangle$ において $a' = b' = c'$ かつ $a' \in S, d' \in D(a')$ であることである.

近い将来の課題

- 3山での, 1山分割削除ニムの勝敗判定条件を得る.
- 2山での, 分割削除ニムの Grundy 数の簡潔な表式を得る.
- (Wythoff ニムの Grundy 数の簡潔な表式を得る.)

数年単位で考えたい課題

- 分割削除ニムおよび削除分割ニムの包括的な勝敗判定条件を得る.