

円形二ムのある変種：収縮円形二ム

篠田 正人（奈良女子大学）

August 20, 2023 (Revised November 25, 2023)

① 導入：ニム, Moore のニム

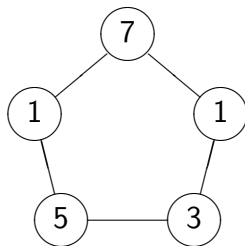
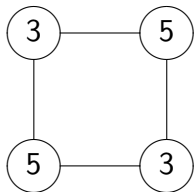
② 円形ニムとは

③ 収縮円形ニムとは

④ まとめと今後の課題

今日の講演内容

円形ニム (Circular Nim) の亜種として収縮円形ニム (Shrinking Circular Nim) を定義し, その勝敗判定条件を円形ニムと比較し考察する.



- Dufour M. and Heubach S., Circular Nim games, Electron. J. Combin. **20**(2), #22(2013)
- 末續 鴻輝, 拡張円形ニムについて, 情報処理学会研究報告ゲーム情報学 (GI) , 2023-GI-49(8), 1-8.

ニム

ニム (Nim) は、古くからよく知られた、2 人のプレイヤーで行われる石取りゲームである。

いくつかの石で構成される山が 3 つあり、プレイヤーは自分の手番で 1 つの山を選び、その山から石を (1 個以上の) 好きな個数だけ取り除く。



ゲームの途中の局面を 3 つの山の石の数を列挙することで $\langle a, b, c \rangle$ の形で表す (a, b, c はすべて非負整数) とき、たとえば $\langle 3, 5, 7 \rangle$ の局面において手番側のプレイヤーは $\langle 3, 2, 7 \rangle$ や $\langle 0, 5, 7 \rangle$ の局面にすることができる。

この手番での操作を交互に行い、手番で石を取れないプレイヤーの負け (最後の石を取ったプレイヤーが勝ち) である。

このゲームは山の数 が 3 つでないときも同様のルールで定義することができる。

$\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面

ニムは二人零和完全情報確定有限ゲームであり引き分けがないため、すべての局面を

- 手番側必勝（その局面で次の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{N}$ 局面と
- 手番側必敗（その局面で前の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{P}$ 局面

に分類できる．

ニムにおける $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面の判定は Bouton(1901) で示され（後述），このゲームの勝敗条件には数学的にも興味深い構造が含まれることが知られるようになった．

2山ニム：物真似戦略

特に石の山の数が2つのときは簡単なゲームになり、たとえば



の局面であれば、手番側のプレイヤーは右の石の山から2個を取り



とし、その後は「相手の行動を真似する」、すなわち相手が一方の山から取った石と同数をもう一方の山から取り続けていけば勝てる。

従って、 $\langle a_1, a_2 \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は $a_1 = a_2$ 。

ニムの勝敗判定条件

ニムの局面 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0,$$

すなわち $a_1, a_2, \dots, a_n$ をそれぞれ 2 進数表記したとき、各桁ごとに現れる 1 の個数がすべて偶数である（各桁の排他的論理和が 0）ことである。

例) $\langle 821, 404, 897, 288 \rangle$ という局面を考える。石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} a_1 & 1100110101 \\ a_2 & 0110010100 \\ a_3 & 1110000001 \\ a_4 & 0100100000 \end{array}$$

であり、すべての桁で 1 が偶数個現れているためこれは $\mathcal{P}$ 局面である。

Moore のニム

ニムにおいて、一回の手番で石を取る操作を

k 個以内の山を選んで、それぞれの山から好きな個数の石を取る

ことにするゲームを Moore のニムという。



の局面から、手番側のプレイヤーは $\langle 3, 2, 4 \rangle$ や $\langle 0, 5, 2 \rangle$ や $\langle 3, 5, 0 \rangle$ の局面にすることができる。

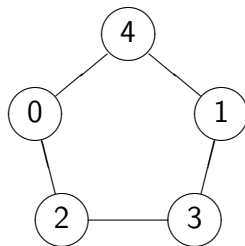
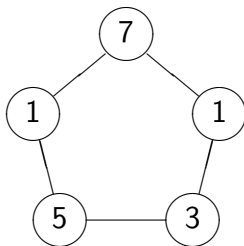
Moore のニムの局面 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は、

$a_1, a_2, \dots, a_n$ をそれぞれ 2 進数表記したとき、各桁ごとに現れる 1 の個数がすべて $k+1$ の倍数である

ことである。(Moore(1910))

円形ニム

円形ニム (Circular Nim) とは, m 個の石の山が円形に並んでおり, プレイヤーは自分の手番で k 個以内の隣接した山を選び, それぞれの山から好きな個数の石 (合計 1 個以上) を取るゲームである. ここまでに記述したニムと同様, 自分の手番で取る石がなくなったら負けとする.

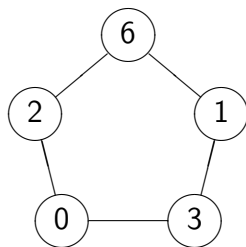
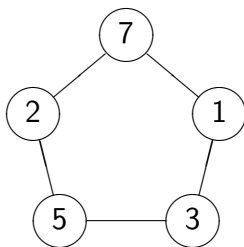


以下ではこのゲームを $CN(m, k)$ で表す. たとえば $CN(5, 3)$ の上記の局面で 3 つの隣接した山を選び, 右の局面にできる.

円形ニムのルールの注意

($CN(5, 3)$ を例として説明するが、他の $CN(m, k)$ でも同様とする)

下左の局面において3つの山を選んだときに、全部で1個以上の石を取れば、「石を取らない」山があってもよい（下右の局面に移すことは可能である）



また、右の局面で石の山がひとつ消えているが、その場所は詰めない
(次の手番で石数 6, 2, 3 の山から同時に石を取ることはできない)

ニムと円形ニム

$m \leq k$ であれば一回の手番ですべての山の石を同時にすべて取ることができるため自明なゲームとなり，また m, k の値によってはこれまでに知られているニムと同値なゲームとなるものもある．

- $CN(m, 1)$ は m 山のニム．
- $CN(m, m - 1)$ は Moore のニムと同値．

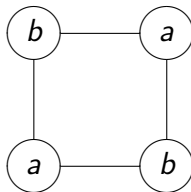
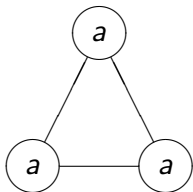
また，これまでに

$CN(4, 2)$, $CN(5, 2)$, $CN(5, 3)$, $CN(6, 3)$, $CN(6, 4)$, $CN(7, 4)$, $CN(8, 6)$
などが解決されている．

$CN(m, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面 (1)

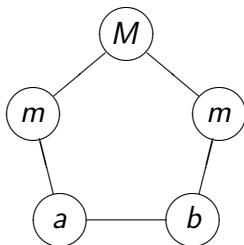
特に $k = 2$ の円形ニムについて $\mathcal{P}$ 局面を述べていく．

- $CN(3, 2)$ は前述の通り Moore のニムと同値であり， $\mathcal{P}$ 局面は下左の形である．
- $CN(4, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面は下右の形である．この局面が $\mathcal{P}$ 局面であることは，物真似戦略を用いて簡単に示せる．



$CN(m, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面 (2)

- $CN(5, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面は下の形で, $M = \max\{M, a, b, m\}$ かつ $M + m = a + b$ であることが必要十分条件である.

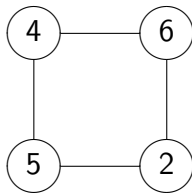
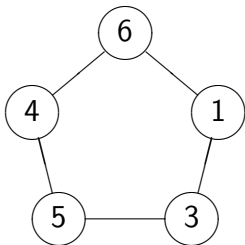


- $CN(6, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面については未解決である.

収縮円形ニム

収縮円形ニム (Shrinking Circular Nim) とは、円形に並ぶ m 個の石の山のうち隣接する k 個の山を選んで石を取る点は円形ニムと同じであるが、円形ニムにおける「石の山が消えてもその場所は詰めない」というルールを変更し、「消えた石の山の場所を詰め、円形が小さくなる」ゲームである。このゲームを $SCN(m, k)$ で表す。

たとえば下左図で石が 3 個の山と石が 1 個の山からそれぞれ 1 個ずつの石を取ると、石の山は 1 つ減って下右図のようになる。

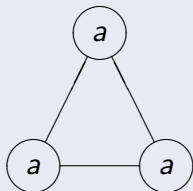


$SCN(3, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面

本講演では、特に $k = 2$ の場合の収縮円形ニムの $\mathcal{P}$ 局面に関する結果を $3 \leq m \leq 5$ に関して報告し、円形ニムの場合と比較する．なお以下で、自明な $\mathcal{P}$ 局面（終了局面）を $\emptyset$ で表す．

Theorem 1

収縮円形ニム $SCN(3, 2)$ における $\mathcal{P}$ 局面は、 $\emptyset$ および下記の局面 ($a \geq 1$)



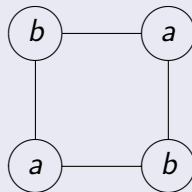
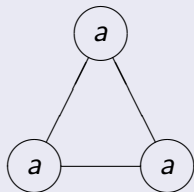
である．

これは $CN(3, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面の条件と等しい．

$SCN(4, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面

Theorem 2

収縮円形ニム $SCN(4, 2)$ における $\mathcal{P}$ 局面は, $\emptyset$ および下記の局面



$(a, b \geq 1, a \neq b)$ である.

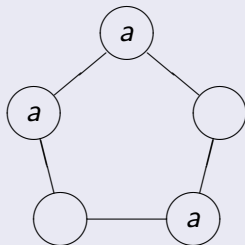
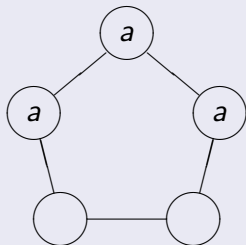
$CN(4, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面と比べると, 4つの石の山が残っているときに $a \neq b$ の条件が加わっている.

SCN(5, 2) の補助的な考察

SCN(5, 2) の $\mathcal{P}$ 局面の条件を得るために、以下の（自明な）補題を用いる。

Lemma 3

収縮円形ニム SCN(5, 2) における以下の局面は $\mathcal{N}$ 局面である。ただし空欄の山の石数は任意の正の整数とする。



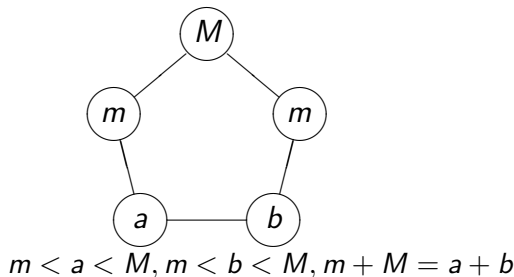
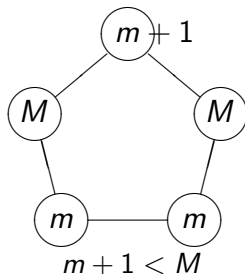
このことから、 $\mathcal{P}$ 局面であるためには石の個数が同数である山は2つ以下でなければならない。

主結果：SCN(5, 2) の $\mathcal{P}$ 局面

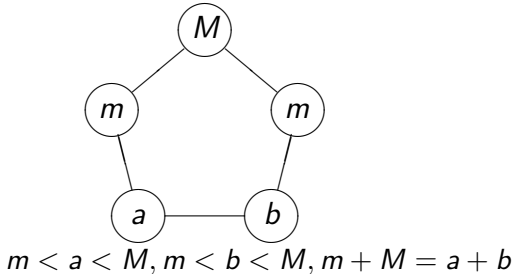
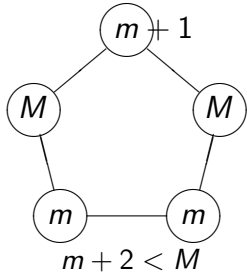
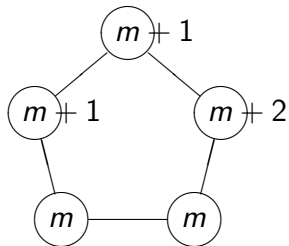
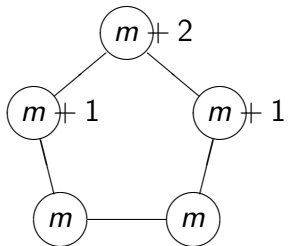
Theorem 4

収縮円形ニム SCN(5, 2) における $\mathcal{P}$ 局面は，SCN(4, 2) の $\mathcal{P}$ 局面および以下の (A)(B) で示すものである。

(A) m (最小石数) は偶数であり，

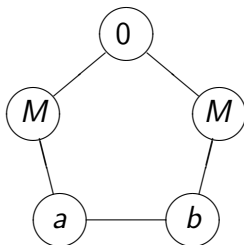


(B) m (最小石数) は奇数であり,



$CN(5, 3)$ の $\mathcal{P}$ 局面

- $CN(5, 3)$ の $\mathcal{P}$ 局面は下の形で、 $M = a + b$ であることが必要十分条件である.

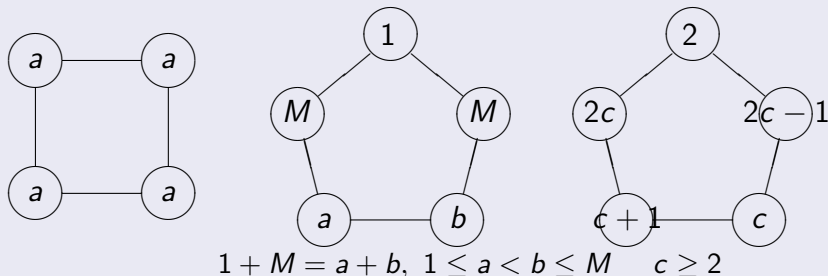


- $CN(6, 3)$ の $\mathcal{P}$ 局面についても知られているがここでは省略する.

SCN(5, 3) の $\mathcal{P}$ 局面

Theorem 5

収縮円形ニム SCN(5, 3) における $\mathcal{P}$ 局面は, $\emptyset$ および下記の局面 (および対称移動したもの) である.



CN(5, 3) の $\mathcal{P}$ 局面と比べると, 石数が 0 の山が 1 の山に置き換わり, 収縮を避けるために $a \neq b$ の条件が加わることで最後の特殊なパターンが生じる. (November 25, 2023 修正)

まとめと今後の課題

まとめ

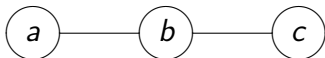
- 円形ニムの亜種として収縮円形ニム $SCN(m, k)$ を導入し, $m \leq 5$, 特に $SCN(5, 2)$ の勝敗判定条件を得た. その結果円形ニムと似た, やや複雑な条件が得られた.

今後の課題

- 他の m, k の値についても $SCN(m, k)$ を考察する.
- 特に $CN(6, 2), SCN(6, 2)$ を解決したい.
- 複数の山から石を取るときは同数個取ることにする, というルールではどうか.

CN(6, 2) の解決に向けて

石の山が下記のグラフのように3つあり、隣接する2山からそれぞれ好きな個数の石を取ることができるとする。



このゲームでの Grundy 数を、閉じた形で求められれば解決は近い（はず）

- $g(a, b, 0) = a + b$, $g(a, 0, c) = a \oplus c$ である。
- $g(a, b, c) \leq a + b + c$ である。
- $a \leq b$ であれば $g(a, b, c) = a + b + c$ であることがわかるので、 $a > b$ かつ $b < c$ である場合を知りたい。