

ニムとその周辺の話題，および削除ニムについて

篠田 正人（奈良女子大学）

（安福智明氏，坂井公氏，末續鴻輝氏との共同研究）

名古屋組合せ論セミナー

November 14, 2023

- ① はじめに：石取りゲーム「ニム」とは
- ② Moore のニム，Wythoff のニム
- ③ 円形ニム
- ④ 共同研究結果：削除ニム
- ⑤ 共同研究結果：分割削除ニム

今日の講演概要

よく知られた石取りゲーム「ニム」にはいくつもの変形版のルールが提案され、勝敗判定条件などが調べられている。

本講演では前半にこれらの石取りゲームのいくつかを紹介し、後半には「削除ニム」と呼ぶ「手番のプレイヤーが石の山の削除と分割の両方を行う」ゲームについて 講演者らの共同研究の結果を述べる。

- 篠田正人, Delete Nim の一般化と勝敗判定, 情報処理学会研究報告 Vol.2022-GI-47, No.4 (2022).
- 安福智明, 坂井公, 篠田正人, 末續鴻輝, 拡張削除ニム, 情報処理学会研究報告 Vol.2022-GI-48, No.14 (2022).
- 安福智明, 坂井公, 篠田正人, 末續鴻輝, 分割削除ニムの勝敗判定, ゲームプログラミングワークショップ 2022 論文集 (2022), 17-24.
- Abuku, T., Sakai, K., Shinoda, M. and Suetsugu, K. Some extensions of Delete Nim, arXiv:2301.12964 [math.CO]

ニム

ニム (Nim) は、古くからよく知られた、2 人のプレイヤーで行われる石取りゲームである。

いくつかの石で構成される山が 3 つあり、プレイヤーは自分の手番で 1 つの山を選び、その山から石を (1 個以上の) 好きな個数だけ取り除く。



ゲームの途中の局面を 3 つの山の石の数を列挙することで $\langle a, b, c \rangle$ の形で表す (a, b, c はすべて非負整数) とき、たとえば $\langle 3, 5, 7 \rangle$ の局面において手番側のプレイヤーは $\langle 3, 2, 7 \rangle$ や $\langle 0, 5, 7 \rangle$ の局面にすることができる。

この手番での操作を交互に行い、手番で石を取れないプレイヤーの負け (最後の石を取ったプレイヤーが勝ち) である。

このゲームは山の数 が 3 つでないときも同様のルールで定義することができる。

$\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面

ニムは二人零和完全情報確定有限ゲームであり引き分けがないため、すべての局面を

- 手番側必勝（その局面で次の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{N}$ 局面と
- 手番側必敗（その局面で前の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{P}$ 局面

に分類できる。

ニムにおける $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面の判定は Bouton(1902) で示され（後述），このゲームの勝敗判定条件には数学的にも興味深い構造¹が含まれることが知られるようになった。

¹組合せゲームでは各局面の勝敗判定だけでなく，Sprague-Grundy 数を求めることで解析がより深くなることが知られているが，本講演では時間の都合上省略する。

2山ニム：物真似戦略

特に石の山の数が2つのときは簡単なゲームになり、たとえば



の局面であれば、手番側のプレイヤーは右の石の山から2個を取り



とし、その後は「相手の行動を真似する」、すなわち相手が一方の山から取った石と同数をもう一方の山から取り続けていけば勝てる。

従って、 $\langle a_1, a_2 \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は $a_1 = a_2$ 。

ニムの勝敗判定条件

ニムの局面 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0,$$

すなわち $a_1, a_2, \dots, a_n$ をそれぞれ 2 進数表記したとき、各桁ごとに現れる 1 の個数がすべて偶数である（各桁の排他的論理和² が 0）ことである。

例) $\langle 821, 404, 897, 288 \rangle$ という局面を考える．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{rcl} a_1 & 1100110101 \\ a_2 & 0110010100 \\ a_3 & 1110000001 \\ a_4 & 0100100000 \end{array}$$

であり、すべての桁で 1 が偶数個現れているためこれは $\mathcal{P}$ 局面である．

² $0 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 = 0$

Moore のニム

ニムにおいて，一回の手番で石を取る操作を

k 個以内の山を選んで，それぞれの山から好きな個数の石を取る

ことにするゲームを Moore のニムという．たとえば $k = 2$ のとき，



の局面から，手番側のプレイヤーは $\langle 3, 2, 4 \rangle$ や $\langle 0, 5, 2 \rangle$ や $\langle 3, 5, 0 \rangle$ の局面にすることができる．

Moore のニムの局面 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は，

$a_1, a_2, \dots, a_n$ をそれぞれ 2進数表記したとき，各桁ごとに現れる
1 の個数がすべて $k + 1$ の倍数である

ことである．(Moore(1910))

Moore の二木の戦略

「2 個以内の山を選んで、それぞれの山から好きな個数の石を取る」というルールでの $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は、石の個数の 2 進数表記で各桁ごとに現れる 1 の個数がすべて 3 の倍数であることである。

(例) $\langle 309, 148, 897, 288 \rangle$ という局面を考える．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} a_1 & 0100110101 \\ a_2 & 0010010100 \\ a_3 & 1110000001 \\ a_4 & 0100100000 \end{array}$$

であり、 $\mathcal{P}$ 局面の条件をみたさない．ここで手番側は上位の桁から数字を順に見て、次の着手を下記の通りに定める．

$$\begin{array}{ccccccc} 0100110101 & & 0100110101 & & 0100110101 & & 0100110101 \\ 0010010100 & \rightarrow & 00\underline{1}0010100 & \rightarrow & 000\underline{1}111111 & \rightarrow \cdots \rightarrow & 0000110101 \\ \underline{1}110000001 & \rightarrow & 01\underline{1}1111111 & \rightarrow & 010\underline{1}111111 & \rightarrow \cdots \rightarrow & 0100010101 \\ 0100100000 & & 0100100000 & & 0100100000 & & 0100100000 \end{array}$$

Wythoff のニム

2 山ニムにおいて，一回の手番で石を取る操作を

- 一方の山から好きな個数の石を取る
- 両方の山から同数の石を取る

のいずれかとするゲームを Wythoff のニムという．



の局面から，手番側のプレイヤーは $\langle 5, 3 \rangle$ や $\langle 2, 7 \rangle$ や $\langle 2, 4 \rangle$ の局面にすることができる．

Wythoff のニムと「Corner the Queen」

Wythoff のニムでの局面 $\langle 7, 5 \rangle$ (◎のマス) からは、一手の着手によって○のマスの局面に移すことができる。

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	×	×	×	×	×	○	×	×	×
1	×	×	×	×	×	○	×	×	×
2	○	×	×	×	×	○	×	×	×
3	×	○	×	×	×	○	×	×	×
4	×	×	○	×	×	○	×	×	×
5	×	×	×	○	×	○	×	×	×
6	×	×	×	×	○	○	×	×	×
7	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
8	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Wythoff のニムは、平面上にクイーンを置き、上、左、左上のいずれかに動かすことで $\langle 0, 0 \rangle$ に到達させたら勝ち、というゲームとみなせる。

Wythoff の二ムの $\mathcal{P}$ 局面

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$
1	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$
2	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$
3	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$
4	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
5	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$
6	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$
7	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$
8	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$

$\mathcal{P}$ 局面は $\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 6, 10 \rangle, \langle 8, 13 \rangle, \langle 9, 15 \rangle, \langle 11, 18 \rangle, \dots$

Wythoff の二ムの勝敗判定条件

Wythoff の二ムの $\mathcal{P}$ 局面は, $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ として

$$\{\langle \lfloor k\varphi \rfloor, \lfloor k\varphi \rfloor + k \rangle, \langle \lfloor k\varphi \rfloor + k, \lfloor k\varphi \rfloor \rangle \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$$

である. (Wythoff(1907))

$\varphi = 1.618\dots$ なので, たとえば $k = 3$ とすると

$$\langle \lfloor k\varphi \rfloor, \lfloor k\varphi \rfloor + k \rangle = \langle \lfloor 4.85\dots \rfloor, \lfloor 4.85\dots \rfloor + 3 \rangle = \langle 4, 7 \rangle.$$

Wythoff の二ムの拡張

2 山二ムにおいて、一回の手番で石を取る操作を

- 一方の山から好きな個数の石を取る
- 両方の山から差が r 個未満の石を取る

とするものを r -Wythoff 二ムという. (Wythoff の二ムは $r = 1$ の場合)

このときの $\mathcal{P}$ 局面は, $x^2 + (r - 2)x - r = 0$ の正の解を ξ_r として³

$$\{\langle \lfloor k\xi_r \rfloor, \lfloor k\xi_r \rfloor + kr \rangle, \langle \lfloor k\xi_r \rfloor + kr, \lfloor k\xi_r \rfloor \rangle \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$$

である. (Fraenkel(1982))

³この ξ_r の値は貴金属比と呼ばれる. $r = 1$ のときは黄金比である.

山の数を増やす Wythoff の二ムの拡張

Wythoff の二目を n 山 ($n \geq 3$) に拡張するとき、石を取るルールをどのように定めるべきか．たとえば

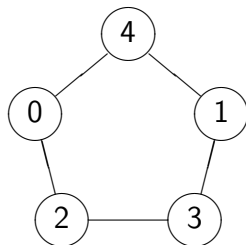
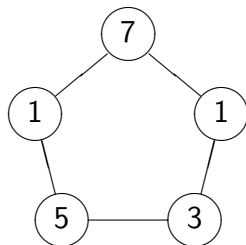
- 1 つの山から任意個を取る，あるいは 2 つの山から同数個を取る
- 1 つの山から任意個を取る，あるいは n 個の山から同数個を取る
- 1 つの山から任意個を取る，あるいは少なくとも 1 つの石が残っている全部の山から同数個を取る
- k 個の山 ($1 \leq k \leq n$) から同数個の石を取る
- $(n - 1)$ 個の山，あるいは n 個の山から同数個を取る

などが考えられる．しかし上記のいずれも勝敗判定条件がわからない．

Wythoff の二目研究の現状については，たとえば下記の文献を参照のこと
Duchêne, E. et.al. Wythoff visions, In Games of No Chance 5, 35-87(2019)

円形ニム

円形ニム (Circular Nim) とは, m 個の石の山が円形に並んでおり, プレイヤーは自分の手番で k 個以内の隣接した山を選び, それぞれの山から好きな個数の石 (合計 1 個以上) を取るゲームである. ここまでに記述したニムと同様, 自分の手番で取る石がなくなったら負けとする.

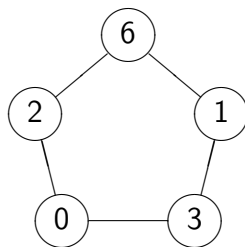
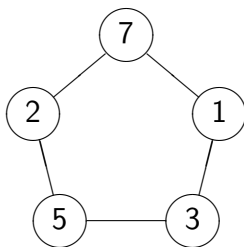


以下ではこのゲームを $CN(m, k)$ で表す. たとえば $CN(5, 3)$ の上記の局面で 3 つの隣接した山を選び, 右の局面にできる.

円形ニムのルールの注意

($CN(5, 3)$ を例として説明するが、他の $CN(m, k)$ でも同様とする)

下左の局面において3つの山を選んだときに、全部で1個以上の石を取れば、「石を取らない」山があってもよい（下右の局面に移すことは可能である）



また、右の局面で石の山がひとつ消えているが、その場所は詰めない（次の手番で石数 6, 2, 3 の山から同時に石を取ることはできない）

ニムと円形ニム

$m \leq k$ であれば一回の手番ですべての山の石を同時にすべて取ることができるため自明なゲームとなり, また m, k の値によってはここまでに述べたニムと同値なゲームとなるものもある.

- $CN(m, 1)$ は m 山のニムと同値.
- $CN(m, m - 1)$ は Moore のニムと同値.

また, これまでに

$CN(4, 2), CN(5, 2), CN(5, 3), CN(6, 3), CN(6, 4), CN(7, 4), CN(8, 6)$

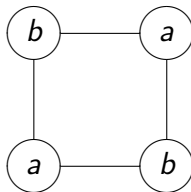
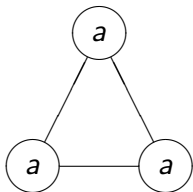
などが解決されている.

Dufour, M. and Heubach, S. Circular Nim Games, The Electronic Journal of Combinatorics (2013)

$CN(m, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面 (1)

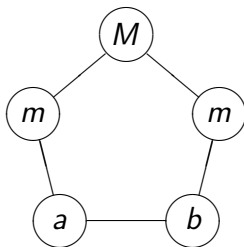
特に $k = 2$ の円形ニムについて $\mathcal{P}$ 局面を述べていく．

- $CN(3, 2)$ は前述の通り Moore のニムと同値であり， $\mathcal{P}$ 局面は下左の形である．
- $CN(4, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面は下右の形である．この局面が $\mathcal{P}$ 局面であることは，物真似戦略を用いて簡単に示せる．



$CN(m, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面 (2)

- $CN(5, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面は下の形で, $M = \max\{M, a, b, m\}$ かつ $M + m = a + b$ であることが必要十分条件である.



- $CN(6, 2)$ の $\mathcal{P}$ 局面については未解決である.

削除ニム (Delete Nim) とは

削除ニム (Delete Nim) は, Abuku-Suetsugu(2021) らによって導入された, 石を取りつつ山を分割するゲーム⁴である.

削除ニムではいくつかの石で構成する山が2つあり, 2人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の2つの操作を続けて行い (この2つの操作を合わせて「一手」と呼ぶことにする), 手番を相手に交代する.

- 片方の山を選び, その山の石をすべて取り去ることで山を除去する.
- 残っているもう1つの山の石を2つの山に分ける. このとき, どちらの山も1個以上の石を含むようにしなければならない.

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる.

⁴A-S での定義はここで紹介する形とは少し異なる. 本来は A-S の定義によるものを Delete Nim, このスライドのものを Variant of Delete Nim という.

削除ニムの勝敗判定条件

削除ニムの局面を2つの山の石の数 y, z を用いて $\langle y, z \rangle$ と表す.

削除ニムに現れる局面全体の集合は $\{ \langle y, z \rangle \mid y, z \in \mathbb{N} \}$ であり, $\langle 1, 1 \rangle$ では手番側のプレイヤーが上記の操作を行うことができないため負けとなる.

2山削除ニムの各局面の勝敗判定条件は以下のように知られている.

Theorem 1

削除ニムにおいて y, z がともに奇数であるとき $\langle y, z \rangle$ は $\mathcal{P}$ 局面であり, それ以外は $\mathcal{N}$ 局面である.

削除ニムの一般化とは

ここでは、「いくつかの山を除去し，残した山を分割して山数は一定数を保つ」という削除ニムの特徴を持ちながら山の数 n を一般化する 2 種類の拡張ルールを考える⁵.

All-but one delete Nim 1 つの山以外をすべて除去する
(残った 1 つの山を n 分割する)

Single-delete Nim 1 つの山だけを除去する
(残った山の 1 つを選んで 2 分割する)

いずれの拡張も，2 人のプレイヤーが交互に手番での操作を行う点は同じである．また，山の数 n が 2 であればいずれも削除ニムに一致する．

⁵安福-坂井-末續-篠田 (2022) で考察した他のルールについては後述する．

ABO-削除ニム (All-but one delete Nim)

いくつかの石で構成される n 個の山がある. 2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の 2 つの操作を続けて行い, 手番を相手に交代する.

- $n - 1$ 個の山を選び, それらの山を除去する.
- 残っている 1 つの山の石を n 個の山に分ける.
このとき, どの山も 1 個以上の石を含まなければならない.

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる.

このゲームの終了局面の集合は

$$\{ \langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle \mid 1 \leq z_1, z_2, \dots, z_n \leq n - 1 \}$$

である.

単削除ニム (Single-delete Nim)

いくつかの石で構成される n 個の山がある. 2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の 2 つの操作を続けて行い, 手番を相手に交代する.

- 1 つの山を選んで除去する.
- 残っている $n - 1$ 個の山のうちの 1 つを選んで 2 つの山に分ける. このとき, どちらの山も 1 個以上の石を含まなければならない.

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる.

このゲームの終了局面は

$$\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$$

のみである.

ABO 削除二ムの勝敗判定条件

ABO 削除二ムの各局面について、 $\mathcal{P}$ 局面であるか $\mathcal{N}$ 局面であるかの判定条件を示す．すべての n に対し，以下の結果を得た．

Theorem 2 (安福-坂井-篠田-末續 (2022))

ABO 削除二ムの局面 $\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は

すべての i に対し， z_i を $n(n-1)$ で割った余りが 1 以上 $n-1$ 以下である．

証明は容易． $n=4$ の場合で考えてみると，12 で割った余りが 1 以上 3 以下である数を，すべて余りが 1 以上 3 以下であるような 4 つの数に分割できないことからわかる．

3山単削除ニムの勝敗判定

山の数が3つであるときの単削除ニムについてはすでに勝敗判定条件が坂井 (2021) により知られている。

正の整数 z に対し, z が 2^k で割り切れて 2^{k+1} で割り切れないとき $v_2(z) = k$ と表す。

Theorem 3

3山単削除ニムの局面 $\langle x, y, z \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は

$$v_2(x) = v_2(y) = v_2(z)$$

である。

4 山単削除ニム：基本的な考察

4 山単削除ニムの勝敗判定について、4 つの山の石数がすべて奇数であると $\mathcal{P}$ 局面であることが簡単な考察によりわかる。

$$\langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{奇} \rangle \quad \forall \rightarrow \quad \langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{偶} \rangle \quad \exists \rightarrow \quad \langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{奇} \rangle$$

により、自分の手番で $\langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{奇} \rangle$ になると、その状態からずっと抜け出せず最終的に終了局面 $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$ に到達してしまうことによる。

よって $\langle \text{奇}, \text{奇}, \text{奇}, \text{偶} \rangle$ や $\langle \text{奇}, \text{奇}, \text{偶}, \text{偶} \rangle$ は $\mathcal{N}$ 局面である。

$\langle 11133, 12716, 7136, 13312 \rangle$ や $\langle 45053, 62932, 32576, 64512 \rangle$ では？

4 山単削除ニム：2進法表記

z を2進法で表したときの下から k 桁目の数字を $l_k(z)$ で表す.

つまり z を 2^{k-1} で割ったときの商が偶数なら $l_k(z) = 0$, 奇数なら $l_k(z) = 1$ であり, $v_2(z) = \min\{k \mid l_k(z) = 1\} - 1$ と表される.

例) $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 669, 468, 800, 288 \rangle$ という局面を考える. 石数を2進表記すると

w	1010011101
x	0111010100
y	1100100000
z	0100100000

である. このとき $v_2(w) = 0, v_2(x) = 2, v_2(y) = v_2(z) = 5$ であり, $l_6(z) = 1, l_5(z) = 0, l_3(w) = l_3(x) = 1$ などと表される.

4 山単削除二木の勝敗判定

篠田 (2022) で, 4 山単削除二木の勝敗判定条件を完全に得た.
具体的に, $\mathcal{P}$ 局面は 5 種類に分類される.

Theorem 4 (篠田 (2022))

山数が 4 の単削除二木の局面 $\langle w, x, y, z \rangle$ において

$a = v_2(w)$, $b = v_2(x)$, $c = v_2(y)$, $d = v_2(z)$ とする. $a \leq b \leq c \leq d$ であるとき, この $\langle w, x, y, z \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は, 以下の (1), (2), (3), (4), (5) のいずれかの条件をみたすことである.

以下, $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件 (1), (2), (3), (4), (5) を述べる.

4 山単削除二木の $\mathcal{P}$ 局面 (1)

(1) $a = b = c = d$.

この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 1440, 864, 672, 1120 \rangle$ がある. 石数を 2 進表記すると

w	10110100000
x	01101100000
y	01010100000
z	10001100000

であり, 最も下の桁に現れる 1 の位置が同一である.

4 山単削除ニムの $\mathcal{P}$ 局面 (2)

(2) $a < b = c = d$ かつ $l_{d+1}(w) = 0$.

この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 294, 208, 304, 432 \rangle$ がある. 石数を 2 進表記すると

w	100100110
x	011010000
y	100110000
z	110110000

である.

4 山単削除ニムの $\mathcal{P}$ 局面 (3)

(3) $a < b < c = d$ かつ $l_{d+1}(w) = l_{d+1}(x) = 0$ かつ

$b + 2 \leq k \leq d$ に対し $l_k(w) + l_k(x) \geq 1$ かつ $l_{b+1}(w) = 1$.

この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 669, 468, 800, 288 \rangle$ がある．石数を2進表記すると

w	1010011101
x	0111010100
y	1100100000
z	0100100000

である．

4 山単削除二ムの $\mathcal{P}$ 局面 (4)

(4) $a < b < c < d$ かつ (4A)-(4E) がすべて成り立つ.

(4A) $l_{d+1}(w) = l_{d+1}(x) = l_{d+1}(y) = 0$,

(4B) $c + 2 \leq j \leq d$ に対し $l_j(w) + l_j(x) + l_j(y) \geq 2$,

(4C) $l_{c+1}(w) = l_{c+1}(x) = 1$,

(4D) $b + 2 \leq k \leq c$ に対し $l_k(w) + l_k(x) \geq 1$,

(4E) $l_{b+1}(w) = 1$.

この場合の局面の具体的な例として

$\langle w, x, y, z \rangle = \langle 11133, 12716, 7136, 13312 \rangle$ がある. 石数を 2 進表記すると

w	10101101111101
x	11000110101100
y	01101111100000
z	11010000000000

である.

4 山単削除二ムの $\mathcal{P}$ 局面 (5)

(5) $a < b < c < d$ かつ (5A)-(5F) がすべて成り立つ.

(5A) $i \geq d + 2$ に対し $l_i(w) + l_i(x) + l_i(y) + l_i(z) \in \{0, 3, 4\}$,

(5B) $l_{d+1}(w) = l_{d+1}(x) = l_{d+1}(y) = 1$,

(5C) $c + 2 \leq j \leq d$ に対し $l_j(w) + l_j(x) + l_j(y) \geq 2$,

(5D) $l_{c+1}(w) = l_{c+1}(x) = 1$,

(5E) $b + 2 \leq k \leq c$ に対し $l_k(w) + l_k(x) \geq 1$,

(5F) $l_{b+1}(w) = 1$.

具体的な例は $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 45053, 62932, 32576, 64512 \rangle$ で, 2 進表記は

w	1010111111111101
x	1111010111010100
y	0111111101000000
z	1111110000000000

$\mathcal{P}$ 局面条件の必然性

たとえば (4) において, (4B) の条件がみたされない類似局面

w	10101101111101
x	11000110101100
y	0110110 <u>1</u> 100000
z	11010000000000

においては, x を消去し z を z', z'' に分割し

w	10101101111101
y	01101101100000
z'	11001110000000
z''	00000010000000

として一手で (3) の条件をみたすことができてしまう.

5 山以上の単削除ニム

4 山の単削除の勝敗条件は 3 山以下の場合と比べて複雑になっており、さらに山の数を増やす場合の条件は予想することもできていない。

Theorem 5

山数 n が 2 以上の単削除ニムにおいて、 n を 3 で割った余りが 2 であれば $\langle 2, 2, 2, \dots, 2 \rangle$ は $\mathcal{N}$ 局面であり、それ以外の n に対しては $\langle 2, 2, 2, \dots, 2 \rangle$ は $\mathcal{P}$ 局面である。

この命題は、定理 3 や定理 4(1) の条件のように各山の石の個数が 2 で割れる回数がすべて等しくても、山の数によっては $\mathcal{P}$ 局面となるとは限らず勝敗条件がより複雑になることを示唆している。

分割削除ニム (Split-and-delete Nim) とは

削除ニムにおける「山の削除」と「山の分割」の操作順を入れ替えた新たなゲーム、分割削除ニム (Split-and-delete Nim) を考える⁶。

分割削除ニムではいくつかの石で構成される山が2つあり、2人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の2つの操作を続けて行い、手番を相手に交代する。

- 片方の山を選び、2つの山に分ける。このとき、どちらの山も1個以上の石を含むようにしなければならない。
- 3つの山のうちの1つを選び、その山の石をすべて取り去ることで山を削除する。

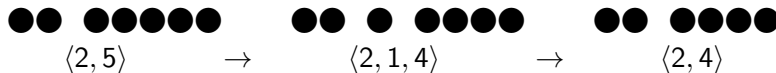
自分の手番でこれらの操作が完了できないプレイヤーは負けとなる。

⁶この順序の違いを強調する意味で、削除ニムを「削除分割ニム」ということもある。

削除ニムと分割削除ニムの比較

「山の削除」と「山の分割」の操作順が異なることで、可能な着手の集合にも違いが生じる。

たとえば場の2つの山の石の数がそれぞれ2個と5個であるとき、一手で2個と4個の山にすることが削除ニムでは不可能であるが、分割削除ニムでは可能である。



すなわち

削除ニムで可能な着手の集合 $\subseteq$ 分割削除ニムで可能な着手の集合

分割削除ニムの勝敗条件

安福-坂井-篠田-末續（2022）では，分割削除ニムにおける勝敗判定条件を得た．

Theorem 6 (安福-坂井-篠田-末續（2022）)

2山分割削除ニムにおいて $\langle a, b \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は， $a = b$ かつ a が 2 で割れる回数が偶数であることである．

（証明の一部）局面 $\langle a, b \rangle$ において a が 2 で割れる回数が奇数であれば，石の数が a である山を等分割し，石の数が b である山を削除することで局面 $\langle a/2, a/2 \rangle$ に移すことが可能である．

山数を増やす一般化

山の数 n を一般化する様々な拡張ルールが考えられる．削除ニムにおいては以下のような拡張例を考えた．

- ABO ニム 篠田 (2022) n 個の山のうちから $n - 1$ 個の山を選び削除し，残っている 1 つの山を n 個の山に分ける．
- 単削除ニム 坂井 (2021)，篠田 (2022) n 個の山のうちから 1 つの山を選んで削除し，残っている $n - 1$ 個の山のうちの 1 つを選んで 2 つの山に分ける．
- 半数削除ニム (n は偶数) 安福-坂井-篠田-末續 (2022) n 個の山のうちから半数の山を選んで削除し，残っている半数の山を 2 つずつの山に分ける．
- 半数以下削除ニム 安福-坂井-篠田-末續 (2022) n 個の山のうちから半数以下の山を選んで削除し，削除したのと同数の山を 2 つずつの山に分ける．

拡張分割削除ニム

分割削除ニムについても，山数の一般化を試みた．

- ABO 分割削除ニム n 個の山のうちから $n - 1$ 個の山を選んで分割し，分割したのと同数の山を削除する． $\rightarrow n \geq 3$ では1手で終了する×
- 単分割削除ニム n 個の山のうちから1つの山を選んで分割し， $n + 1$ 個の山のうちの1つを選んで削除する． $\rightarrow n = 3$ でも難物△
- 半数分割削除ニム (n は偶数) n 個の山のうちから半数の山を選んで分割し，分割したのと同数の山を削除する． $\rightarrow n = 4$ について解決○
- 半数以下削除ニム n 個の山のうちから半数以下の山を選んで分割し，分割したのと同数の山を削除する． $\rightarrow n = 3$ のときは，単分割削除ニムと同じ△

4 山半数分割削除ニム

4つの山のうちから2つの山を選んで分割し、6つの山から2つの山を削除する。

ゲームに現れる局面全体の集合は $\{\langle a, b, c, d \rangle \mid a, b, c, d \in \mathbb{N}\}$ であり、 $\langle 1, 1, 1, d \rangle$ (d は任意の正の整数) では手番のプレイヤーが上記の操作を行うことができないため負けとなる。

2でちょうど偶数回割れる正の整数の集合を S とする。すなわち $S = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, \dots\}$ である。この記号を用いれば、2山分割削除ニムの $\mathcal{P}$ 局面の集合は $\{\langle a, a \rangle \mid a \in S\}$ と書ける。

4 山半数分割削除二ムの勝敗判定条件

a 以上の正の整数の集合 $D(a)$ を, $D(1) = \mathbb{N}$, $a \in S$ かつ $a \neq 1$ に対しては $D(a)$ は以下の条件をみたすように定める.

- $m < a$ に対しては $m \notin D(a)$.
- $a \leq m \leq 2a - 1$ に対しては $m \in D(a) \iff m \in S$.
- $m \geq 2a$ に対しては $m \in D(a) \iff m - a \notin D(a)$ と, S に含まれるかどうかを小さい m から順次定める.

たとえば $D(4) = \{4, 5, 7, 10, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 23, \dots\}$ となる.

Theorem 7 (安福-坂井-篠田-末續 (2022))

4 山半数分割削除二ムにおける局面 $\langle a, b, c, d \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は, $\langle a, b, c, d \rangle$ の昇順表記 $\langle a', b', c', d' \rangle$ において $a' = b' = c'$ かつ $a' \in S, d' \in D(a')$ であることである.

まとめと今後の課題 (1)

- 古くから知られている石取りゲーム「ニム」には様々な変形ルールも導入され，それぞれの勝敗判定条件にはきれいな数学的構造が隠れていることもあり興味深い．
- 講演者らは一回の着手で石の山の削除と分割を行う「削除ニム」の一般化について考察し，いくつかの勝敗判定条件を得た．
- ルールによっては，勝敗判定条件が複雑になり完全に求めることが難しいものもある．特に石の山数を一般化した問題には，未解決問題が多く残されている．

まとめと今後の課題 (2)

- 講演者は、石の山数を一般化する際、「なるべく自然な拡張ルール」によるものを考察したい．山の数分割によって増えたとき，ゲームをそれぞれの山ごとに切り分けられないルールでは解析が特に難しくなるが3山から順にチャレンジしたい．
- 多くの場合，コンピュータを用いて $\mathcal{P}$ 局面集合を推測し，それを証明するという手法が採られている．今後コンピュータどうしの自己対戦や強化学習などを用いてより精密が得られることが予想され，多くのゲームの解決ができることを期待したい．