Amalgamation Nim (S.C.Locke and B.Handley, Integers 21(2021)) の紹介と未解決問題の検討

篠田 正人（奈良女子大学）

Japan Virtual CGT, May 31, 2024

Amalgamation Nim のルール

石の山が n 山あり、通常の Nim（2 人で行う、正規形）での

- ある山を選んで、正の整数個の石を取る

という着手の代わりに

- （それぞれ 1 個以上の石を含む）2 つの山を合併させる

という操作も 1 回の着手として許す。

ゲームの進行例

$$(5,3,2) \to (3,3,2) \to (3,1,2) \to (3,3,0)$$

$$\to (3,1,0) \to (1,1,0) \to (2,0,0) \to (0,0,0)$$

このゲームは山の数が 3 つでないときも同様のルールで定義することができる．

Remark 1.1

各着手で局面の石の総数が減るとは限らないが、

（石の総数）+（石を *1* つ以上含む山数）

は（狭義）単調減少である。

2山での Amalgamation Nim

Proposition 2.1

$n=2$（2山）での *Amalgamation Nim* において、$\mathcal{P}$ 局面の集合は

$$\{(a,a) \mid a \geq 0\}$$

である．これは *Nim* のときと一致する。

この事実は、$(a,a) \to (2a,0)$ という着手を行ってもすぐ $\to (0,0)$ とされてしまうことによる．

Remark 2.2

もし石の山の合併させる着手を、単に合併させるのでなく

- 石の山を合併させて、その山から1個の石を取る

とすると、一般の n 山での $\mathcal{P}$ 局面集合も Nim と一致する。

対称性を持つ局面

Proposition 2.3

$n = 4$（4 山）での *Amalgamation Nim* において、局面 (a, a, b, b) は $\mathcal{P}$ 局面である。

証明 先手の着手に対する後手の着手を以下に示す.

$$(a, a, b, b) \to (a, a, b, b') \to (a, a, b', b'),$$
$$(a, a, b, b) \to (a, a+b, 0, b) \to (a+b, a+b, 0, 0),$$
$$(a, a, b, b) \to (a, a, 2b, 0) \to (a, a, 0, 0).$$

この命題は石数が等しい山が偶数個ずつある状況で同様に成り立つことがわかる。

論文 (2021) で示されている結果

$n = 3$（3 山）であっても $\mathcal{P}$ 局面を完全に決定することはできていない。

定理として、(a_1, a_2, a_3) （$a_1 \leq a_2 \leq a_3$）かつ $a_1 \leq 7$ の場合の $\mathcal{P}$ 局面が決定され, $8 \leq a_1 \leq 11$ の場合の $\mathcal{P}$ 局面が推定されている。

たとえば $a_1 = 1$ において $(1, a_2, a_3)$ が $\mathcal{P}$ 局面となるのは

$(1, 4k + 2, 4k + 4)$ または $(1, 4k + 3, 4k + 5)$（いずれも $k \geq 0$）、

$a_1 = 2$ において $(2, a_2, a_3)$ が $\mathcal{P}$ 局面となるのは

$(2, 2k + 1, 2k + 4)$（$k \geq 0$）

である。

解決の手掛かり

Proposition 3.1 (論文の定理 1)

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ に対し

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) \text{ が } \mathcal{P} \text{ 局面}$$

となる x がただ一つ存在する。

この x を（このスライド内では）$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ と書くことにする。

例 $f(a, a) = 0,\ f(a, 0) = a,\ f(a, a, b) = b,\ f(1, 2) = 4,\ f(3, 4) = 8$

※ できれば $1@2 = 4,\ 3@4 = 8, a@a@b = b$ のように書きたい

（ただし $(a@b)@c = a@(b@c)$ とは限らない）

$f(a,b)$ の表

以降は $n = 3$（3 山）に限定する。a, b に対する $f(a,b)$ の値を以下に示す。（$(a, b, f(a,b))$ は $\mathcal{P}$ 局面）

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	4	5	2	3	8	9	6
2	2	4	0	6	1	8	3	10	5
3	3	5	6	0	8	1	2	11	4
4	4	2	1	8	0	6	5	12	3
5	5	3	8	1	6	0	4	13	2
6	6	8	3	2	5	4	0	14	1
7	7	9	10	11	12	13	14	0	16
8	8	6	5	4	3	2	1	16	0

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	1	0	4	5	2	3	8	9	6	7	12	13	10	11	16	17	14	15	20	21	18	19	24	25	22	23	28	29	26	27	32	33	30	31	36
2	2	4	0	6	1	8	3	10	5	12	7	14	9	16	11	18	13	20	15	22	17	24	19	26	21	28	23	30	25	32	27	34	29	36	31
3	3	5	6	0	8	1	2	11	4	10	9	7	13	12	15	14	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30	33	32	35
4	4	2	1	8	0	6	5	12	3	11	13	9	7	10	17	16	15	14	21	20	19	18	25	24	23	22	29	28	27	26	33	32	31	30	37
5	5	3	8	1	6	0	4	13	2	15	11	10	14	7	12	9	18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29	34	35	32
6	6	8	3	2	5	4	0	14	1	13	15	12	11	9	7	10	19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28	35	34	33
7	7	9	10	11	12	13	14	0	16	1	2	3	4	5	6	19	8	21	22	15	24	17	18	27	20	29	30	23	32	25	26	35	28	37	38
8	8	6	5	4	3	2	1	16	0	14	17	15	18	19	9	11	7	10	12	13	25	26	27	28	29	20	21	22	23	24	34	36	37	38	30
9	9	7	12	10	11	15	13	1	14	0	3	4	2	6	8	5	20	22	23	24	16	25	17	18	19	21	31	32	33	34	35	26	27	28	29
10	10	12	7	9	13	11	15	2	17	3	0	5	1	4	18	6	21	8	14	23	26	16	28	19	30	31	20	33	22	35	24	25	36	27	39
11	11	13	14	7	9	10	12	3	15	4	5	0	6	1	2	8	22	23	24	25	27	28	16	17	18	19	32	20	21	33	36	37	26	29	40
12	12	10	9	13	7	14	11	4	18	2	1	6	0	3	5	20	23	24	8	26	15	27	29	16	17	30	19	21	34	22	25	38	39	40	28
13	13	11	16	12	10	7	9	5	19	6	4	1	3	0	20	21	2	25	26	8	14	15	30	29	28	17	18	31	24	23	22	27	38	39	41
14	14	16	11	15	17	12	7	6	9	8	18	2	5	20	0	3	1	4	10	27	13	29	26	30	31	32	22	19	35	21	23	24	25	41	42
15	15	17	18	14	16	9	10	19	11	5	6	8	20	21	3	0	4	1	2	7	12	13	31	32	33	34	35	36	37	38	39	22	23	24	25
16	16	14	13	17	15	18	19	8	7	20	21	22	23	2	1	4	0	3	5	6	9	10	11	12	32	33	34	35	36	37	38	39	24	25	26
17	17	15	20	16	14	19	18	21	10	22	8	23	24	25	4	1	3	0	6	5	2	7	9	11	12	13	33	34	38	36	37	40	41	26	27
18	18	20	15	19	21	16	17	22	12	23	14	24	8	26	10	2	5	6	0	3	1	4	7	9	11	35	13	37	39	40	41	42	43	44	45
19	19	21	22	18	20	17	16	15	13	24	23	25	26	8	27	7	6	5	3	0	4	1	2	10	9	11	12	14	40	39	42	41	44	43	46
20	20	18	17	21	19	22	23	24	25	16	26	27	15	14	13	12	9	2	1	4	0	3	5	6	7	8	10	11	41	42	40	43	45	46	44
21	21	19	24	20	18	23	22	17	26	25	16	28	27	15	29	13	10	7	4	1	3	0	6	5	2	9	8	12	11	14	43	44	40	42	47
22	22	24	19	23	25	20	21	18	27	17	28	16	29	30	26	31	11	9	7	2	5	6	0	3	1	4	14	8	10	12	13	15	42	45	43
23	23	25	26	22	24	21	20	27	28	18	19	17	16	29	30	32	12	11	9	10	6	5	3	0	4	1	2	7	8	13	14	45	15	47	48
24	24	22	21	25	23	26	27	20	29	19	30	18	17	28	31	33	32	12	11	9	7	2	1	4	0	3	5	6	13	8	10	14	16	15	49
25	25	23	28	24	22	27	26	29	20	21	31	19	30	17	32	34	33	13	35	11	8	9	4	1	3	0	6	5	2	7	12	10	14	16	15
26	26	28	23	27	29	24	25	30	21	31	20	32	19	18	22	35	34	33	13	12	10	8	14	2	5	6	0	3	1	4	7	9	11	17	16
27	27	29	30	26	28	25	24	23	22	32	33	20	21	31	19	36	35	34	37	14	11	12	8	7	6	5	3	0	4	1	2	13	9	10	17

$f(a,b)$ の求値

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= \operatorname{mex}\left\{f(a,b'), f(a',b), f(a+b,0), f(|a-b|,0)\right\} \\
&= \operatorname{mex}\left\{f(a,b'), f(a',b), a+b, |a-b|\right\}
\end{aligned}
$$

（ただし $0 \le a' < a, 0 \le b' < b$）により、たとえば下表の $f(5,2)$ の値は下線の数字に表れない最小数として定まる。

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	$\underline{2}$	3	4	5	6	7	8
1	1	0	$\underline{4}$	5	2	3	8	9	6
2	2	4	$\underline{0}$	6	1	8	3	10	5
3	$\underline{3}$	5	$\underline{6}$	0	8	1	2	11	4
4	4	2	$\underline{1}$	8	0	6	5	12	3
5	$\underline{5}$	$\underline{3}$	**8**	1	6	0	4	13	2
6	6	8	3	2	5	4	0	14	1
7	$\underline{7}$	9	10	11	12	13	14	0	16
8	8	6	5	4	3	2	1	16	0

$f(a, b)$ の上下評価

Proposition 3.2

$$|a - b| - 1 \leq f(a, b) \leq a + b + 1.$$

証明 右辺の不等式は

- $f(0, 0) = 0 \leq 1$,
- $a + b \leq k$ で $f(a, b) \leq a + b + 1$ が成り立つとすると、
  $a + b = k + 1$ のときは
  $f(a', b) \leq a' + b + 1 < k + 2, f(a, b') \leq a + b' + 1 < k + 2$

であることから $f(a, b) \leq k + 2 = a + b + 1$ がわかる。

左辺の不等式は、$(a, f(a, b), b)$ が $\mathcal{P}$ 局面であることから

$$a \leq b + f(a, b) + 1, \quad b \leq a + f(a, b) + 1$$

によって得られる。 □

f の加法周期性

$f(a,b)$ で a の値を固定したとき、その数列は加法周期性（すなわち、$\{f(a,b)-b\}$ の周期性）を持ちそうなことが見て取れる。具体的に $f(a,b)-b$ を表にすると

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	-1	2	2	-2	-2	2	2	-2	-2	2	2	-2
2	2	3	-2	3	-3	3	-3	3	-3	3	-3	3	-3
3	3	4	4	-3	4	-4	-4	4	-4	1	-1	-4	1
4	4	1	-1	5	-4	1	-1	5	-5	2	3	-2	-5
5	5	2	6	-2	2	-5	-2	6	-6	6	1	-1	2

最初のほうの項だけではわかりづらい。論文では $0 \leq a \leq 7$ についてこの加法周期性を個別に証明し、$8 \leq a \leq 11$ について推測を示している。

今回新たに示せたこと

Proposition 3.3

すべての a に対し、$f(a, b)$ は b に関する加法周期性を持つ。

証明は Prop.3.2 を用いる（ここでは省略する）。また、この証明中で加法周期性を持つことを示す簡明な十分条件を与えることができた。

この結果、Locke-Handley の論文での $1 \leq a \leq 7$ での（簡潔な）別証明、および Empirical Observation となっている $8 \leq a \leq 11$ の証明を与えることができる。

まとめと今後の課題

まとめ

- Amalgamation Nim のルールを紹介し、3 山でもまだ $\mathcal{P}$ 局面集合を決定できていない、という現状を述べた。また解決のための糸口として 2 つの山の石数が a, b であるとき、$\mathcal{P}$ 局面となるための 3 つめの山の石数を与える関数 $f(a, b)$ について考察した。

今後の課題

- 3 山の場合の $\mathcal{P}$ 局面集合を完全に決定するための様々なアプローチを与える。具体的には、まず $f(a, b)$ について成り立つ性質を探す。
- Amalgamation Nim と同様に、山を統合するという着手を可能とする様々な拡張ルールのゲームについて検討する。