

新たなゲーム LinkStones の提案と基本的性質： 一般グラフ上の LinkStones

篠田 正人（奈良女子大学研究院自然科学系）

広島大学代数学セミナー

October 9, 2024

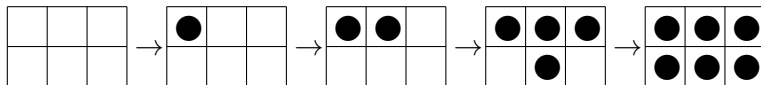
- ① LinkStones の導入
- ② グラフ上の LinkStones
- ③ 具体的なグラフでの例
- ④ 今後の課題

LinkStones のルール

LinkStones は 2 人で行う不偏ゲームであり、 $M \times N$ マスの盤上の各マスに、プレイヤーが交互の手番で石を置いていき、最後の石を置いたプレイヤーが勝ち（手番で石を置く場所のないプレイヤーの負け）とするゲーム

プレイヤーの各手番での操作は

- 先手は最初に、盤面の好きなマス 1 つに石を置く
- 以降の手番のプレイヤーは、すでに石の置いてあるマスに隣接する空きマスに石を置ける
- 一度の手番で石を置くマスは（1 箇所以上であれば）何マスでもよい



LinkStones のプレイ

この LinkStones を実際に行うにあたっては

- マス目のある盤を用意する（紙に線を引く、碁盤を用いる、など）
- 石を盤面に置いていってゲームを進行する

これまでわかっていることとして

Theorem 1 (荻沼、2024)

Link Stones において

- $1 \times N$ の盤面では、先手必勝 $\iff N$ が奇数
- $2 \times N$ の盤面では、先手必勝 $\iff N$ を 3 で割った余りが 0 または 2
- $3 \times N$ の盤面では、すべての N に対して先手必勝

本来は 8×8 や 9×9 の盤面でのプレイと、その（弱）解決を行いたい

この LinkStones を、「盤上に石を置いてプレイする」という実用から離れて一般化する

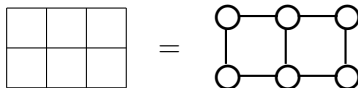
特に（個人的に）知りたいことは

- 盤面の一般化、高次元化
- 「盤面が広いほど先手有利」と言えるか
- 数学的な定理が何か得られないか
- （後述するように）ゲームの選択和のよい例とならないか

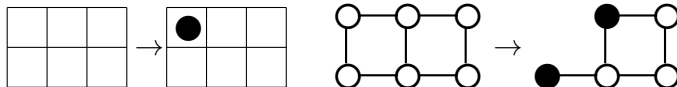
そのために、有限グラフ上のゲームとして定式化し直す

グラフ上の LinkStones

初期盤面を連結な有限グラフ $G = (V, E)$ として表す
盤面の各マス目を頂点とし、隣接するマス目を辺で結ぶ



石を打ったら、その頂点は除去する
打った場所に隣接する頂点は黒く塗る



ゲームとグラフとの対応

LinkStones において、すでに石が置かれた場所に隣接するマスはその後（空いてさえいれば）いつでも打てる

よって、グラフ上の黒頂点どうしの隣接関係は不要



結果として、ゲーム途中で対応するグラフが連結でなくなるときがある
このとき手番側は黒頂点のどこに打つこともできる、すなわち
それぞれのグラフで表せる局面の選択和を考えることになる

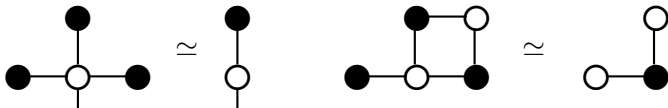
右端の局面は $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面の選択和であるため $\mathcal{P}$ 局面であるとわかる

ゲームの選択和からわかること

ゲームの局面の選択和 $H_1 \vee H_2 \vee H_3 \vee \cdots \vee H_k$ が $\mathcal{P}$ 局面となるための必要十分条件は $H_1, H_2, H_3, \dots, H_k$ がすべて $\mathcal{P}$ 局面となることである（安福-坂井-末續 (2024) 定理 2.7.3）から、局面をグラフで表したときに黒頂点だけの孤立した連結成分があれば $\mathcal{N}$ 局面であることがわかる（ので、孤立点を作った先ほどの着手は悪手であった）

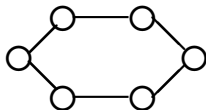


この考察から、孤立点を作らないようにするためには必ず同時に打たないといけない複数の黒頂点をひとまとめに等価変形できることがある

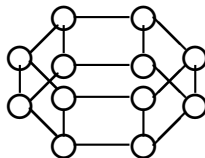


具体的なグラフでの例 (1)

N 頂点サイクルグラフ



2 段 N 頂点サイクルグラフ



Theorem 2

- N 頂点サイクルグラフでは、
先手必勝 $\iff N$ を 3 で割った余りが 1
- 2 段 N 頂点サイクルグラフでは、
先手必勝 $\iff N$ を 10 で割った余りが 2, 5, 8

結果の比較

両端のあるグラフ

- 1 段 N 頂点グラフでは、先手必勝 $\iff N$ が奇数
- 2 段 N 頂点グラフでは、先手必勝 $\iff N$ を 3 で割った余りが 0, 2
- 3 段 N 頂点グラフでは、すべての N に対して先手必勝

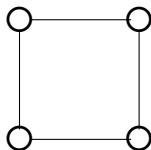
サイクルグラフ

- 1 段 N 頂点サイクルグラフでは、
先手必勝 $\iff N$ を 3 で割った余りが 1
- 2 段 N 頂点サイクルグラフでは、
先手必勝 $\iff N$ を 10 で割った余りが 2, 5, 8

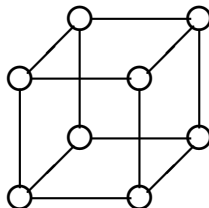
具体的なグラフでの例 (2)

d 次元超立方体グラフ

$d = 2$



$d = 3$



Theorem 3

- 1次元超立方体グラフでは、後手必勝
- 2次元超立方体グラフでは、先手必勝
- 3次元超立方体グラフでは、後手必勝
- 4次元超立方体グラフでは、後手必勝
- 5次元超立方体グラフでは、先手必勝

- 1次元超立方体グラフでは、後手必勝

- 2次元超立方体グラフでは、先手必勝

- 3次元超立方体グラフでは、後手必勝

初手 $(0, 0, 0)$ に対し、後手は $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ に打つ

- 4次元超立方体グラフでは、後手必勝

初手 $(0, 0, 0, 0)$ に対し、後手は $(1, 0, 0, 0)$ だけに打つ

- 5次元超立方体グラフでは、先手必勝

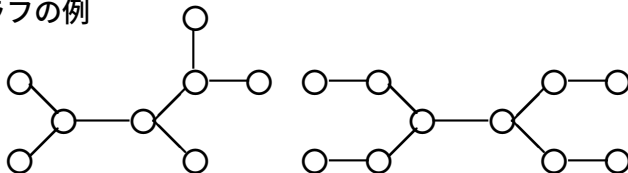
初手 $(0, 0, 0, 0, 0)$ に対し、後手が $(1, 0, 0, 0, 0)$ などを打ったとき

先手は $(0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$
(後手にすでに打たれた点を除く)

および $(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)$ に打つ

具体的なグラフでの例 (3)

2つの木グラフの例



左は先手必勝、右は後手必勝

Theorem 4

木グラフにおいては

後手必勝 $\iff$ グラフの完全マッチングが存在する

- (個人的な感想として) 対称性の高いグラフに限定しても、必勝判定は難しい
- もう少し具体例を増やし、先手必勝または後手必勝の判定を行う
- ルールの妥当性について考える (先手または後手が有利すぎるゲームとならないか)
- 単にゲームとして扱うだけでなく、何らかの数学的な結果を得る
 - たとえばグラフを `tree` に限定すれば一般的な解決ができるのではないか → 解決
 - では一般の二部グラフで何らかの結論を得られないか？