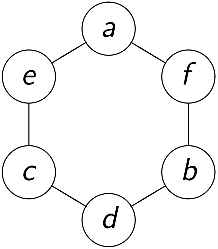
円形ニムの未解決問題：CN(6,2)

篠田 正人（奈良女子大学）

January 14, 2025

本スライドの概略と意義

円形ニム (Circular Nim) で長年未解決である CN(6,2) について，多くの人が取り組んで既にたどり着いているであろう基本的な性質と難しさをまとめ，解決のための情報を提供する．



円形ニムについて基本的の基本的な文献は

- Dufour M. and Heubach S., Circular Nim games, Electron. J. Combin. **20**(2), #22(2013)

である．

ニム

ニム（Nim）は，古くからよく知られた，2 人のプレイヤーで行われる石取りゲームである．

いくつかの石で構成される山が 3 つあり，プレイヤーは自分の手番で 1 つの山を選び，その山から石を（1 個以上の）好きな個数だけ取り除く．

●●●　●●●●●　●●●●●●●

ゲームの途中の局面を 3 つの山の石の数を列挙することで $\langle a, b, c\rangle$ の形で表す（a, b, c はすべて非負整数）とき，たとえば $\langle 3, 5, 7\rangle$ の局面において手番側のプレイヤーは $\langle 3, 2, 7\rangle$ や $\langle 0, 5, 7\rangle$ の局面にすることができる．

この手番での操作を交互に行い，手番で石を取れないプレイヤーの負け（最後の石を取ったプレイヤーが勝ち）である．

このゲームは山の数が 3 つでないときも同様のルールで定義することができる．

$\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面

ニムは二人零和完全情報確定有限ゲームであり引き分けがないため，すべての局面を

- 手番側必勝（その局面で次の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{N}$ 局面と
- 手番側必敗（その局面で前の手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{P}$ 局面

に分類できる．

ニムにおける $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面の判定は Bouton(1901) で示され（後述），このゲームの勝敗条件には数学的にも興味深い構造が含まれることが知られるようになった．

2山ニム：物真似戦略

特に石の山の数が2つのときは簡単なゲームになり，たとえば

●●●●●　　●●●●●●●

の局面であれば，手番側のプレイヤーは右の石の山から2個を取り

●●●●●　　●●●●●

とし，その後は「相手の行動を真似する」，すなわち相手が一方の山から取った石と同数をもう一方の山から取り続けていけば勝てる．

従って，$\langle a_1, a_2 \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は $a_1 = a_2$．

ニムの勝敗判定条件

ニムの局面 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n = 0,$$

すなわち $a_1, a_2 \ldots, a_n$ のニム和（それぞれを 2 進数表記して各桁ごとに排他的論理和を取る）が 0，つまり 2 進数表記で各桁ごとに現れる 1 の個数がすべて偶数であることである．

例）$\langle 821, 404, 897, 288 \rangle$ という局面を考える．石数を 2 進数で表記すると

$$\begin{array}{ll} a_1 & 1100110101 \\ a_2 & 0110010100 \\ a_3 & 1110000001 \\ a_4 & 0100100000 \end{array}$$

であり，すべての桁で 1 が偶数個現れているためこれは $\mathcal{P}$ 局面である．

Mooreのニム

ニムにおいて，一回の手番で石を取る操作を

> n 個の石の山のうちの k 個以内の山を選んで，それぞれの山から好きな個数の石を取る

ことにするゲームを Moore のニムという．たとえば $n=3, k=2$ では

●●● ●●●●● ●●●●●●●

の局面から，手番側のプレイヤーは $\langle 3,2,4\rangle$ や $\langle 0,5,2\rangle$ や $\langle 3,5,0\rangle$ の局面にすることができる．

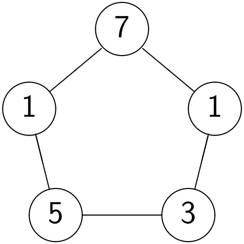
Moore のニムの局面 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は，

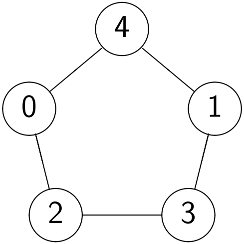
> $a_1, a_2. \ldots, a_n$ をそれぞれ 2 進数表記したとき，各桁ごとに現れる 1 の個数がすべて $k+1$ の倍数である

ことである．(Moore(1910))

円形ニム

円形ニム (Circular Nim) とは，n 個の石の山が円形に並んでおり，プレイヤーは自分の手番で k 個以内の隣接した山を選び、それぞれの山から好きな個数の石（合計 1 個以上）を取るゲームである．ここまでに記述したニムと同様，自分の手番で取る石がなくなっていたら負けとする．



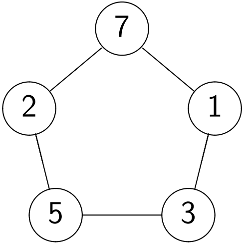


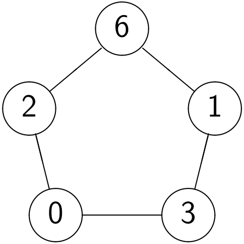
以下ではこのゲームを CN(n, k) で表す．たとえば CN$(5, 3)$ の上記の局面で 3 つの隣接した山を選び，右の局面にできる．

円形ニムのルールの注意

（CN(5, 3) を例として説明するが，他の CN(n, k) でも同様とする）

下左の局面において 3 つの山を選んだときに，全部で 1 個以上の石を取れば,「石を取らない」山があってもよい（下右の局面に移すことは可能である）





また，右の局面で石の山がひとつ消えているが，その場所は詰めない
(次の手番で石数 6,2,3 の山から同時に石を取ることはできない)

ニムと円形ニム

この円形ニムでの $\mathcal{P}$ 局面をすべて決定したい．

$n \leq k$ であれば一回の手番ですべての山の石を同時にすべて取ることができるため自明なゲームとなり，また n, k の値によってはこれまでに知られているニムと同値なゲームとなるものもある．

- $\mathrm{CN}(n, 1)$ は n 山のニム．
- $\mathrm{CN}(n, n-1)$ は Moore のニムと同値．

また，これまでに

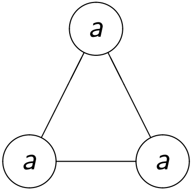
$\mathrm{CN}(4, 2)$,$\mathrm{CN}(5, 2)$,$\mathrm{CN}(5, 3)$,$\mathrm{CN}(6, 3)$,$\mathrm{CN}(6, 4)$,$\mathrm{CN}(7, 4)$,$\mathrm{CN}(8, 6)$

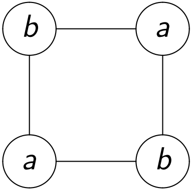
が解決されている．

CN(n, 2) の $\mathcal{P}$ 局面 (1)

特に $k = 2$ の円形ニムについて $\mathcal{P}$ 局面を述べていく．

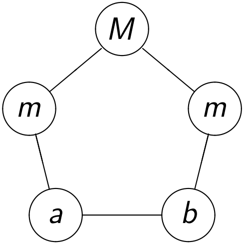
- CN(3, 2) は前述の通り Moore のニムと同値であり，$\mathcal{P}$ 局面は下左の形である．
- CN(4, 2) の $\mathcal{P}$ 局面は下右の形である．この局面が $\mathcal{P}$ 局面であることは，物真似戦略を用いて簡単に示せる．





CN$(n,2)$ の $\mathcal{P}$ 局面 (2)

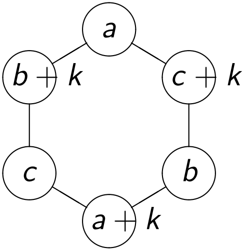
- CN$(5,2)$ の $\mathcal{P}$ 局面は下の形で，$M=\max\{M,a,b,m\}$ かつ $M+m=a+b$ であることが必要十分条件である．



- <u>CN$(6,2)$ の $\mathcal{P}$ 局面については未解決である．</u>

CN(6, 3) の $\mathcal{P}$ 局面

- CN(6, 3) の $\mathcal{P}$ 局面は下の形（$a, b, c, k \geq 0$）に表されることが必要十分条件である．



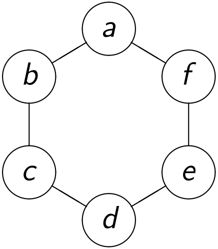
6 山の円形ニムは，対面の山の石数との関係（この場合は対面する山の石数差がすべて等しい）がおそらく重要な意味を持つ．
対面の山との石数比較により大小を定めると，円に沿って「大，小，大，小，大，小」と交互に並んでいることにも注意したい．

問題

CN(6, 2) の局面が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件を求めよ．

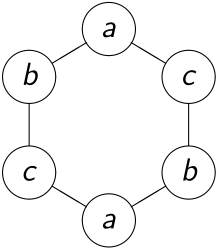
ここから，本題である CN(6, 2)，すなわち 6 個の石の山が円形に並び，一回の着手で隣接する 2 山から同時に石を取ることのできるニムについての考察を述べます．

問題を 1 から考えたい人は，いったんここでスライドを閉じるとよいでしょう．



CN$(6, 2)$ の解決に向けて

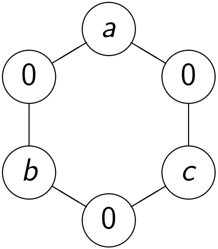
以下の局面は $\mathcal{P}$ 局面である（物真似戦略の存在により明らかである）．



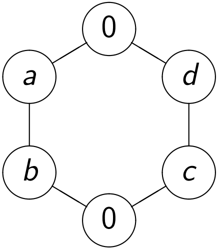
この問題の難しさは，これ以外にも様々な $\mathcal{P}$ 局面が存在することである．

0 個の石の山を含む $\mathcal{P}$ 局面 (1)

以下の局面も明らかに $\mathcal{P}$ 局面である（3 つまたは 2 つの山のニムと考えればよい）．



$a \oplus b \oplus c = 0$

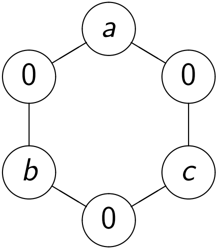


$a + b = c + d$

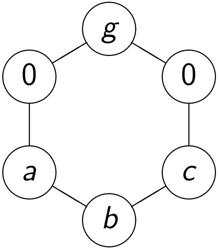
上のどちらの局面も「大，小，大，小，大，小」のパターンを崩していないことに注意する．

0 個の石の山を含む $\mathcal{P}$ 局面 (2)

左の $\mathcal{P}$ 局面は，さらに右の局面のように一般化できる．



$a \oplus b \oplus c = 0$

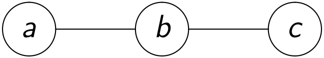


$g = g(a, b, c)$

ここで，g は a, b, c の値によって定まる，ある Grundy 数である．
（次ページ参照）

特別な 3 山ニム

石の山が下記のように 3 つあり，辺で隣接する 2 山からそれぞれ好きな個数の石を取ることができるとする．



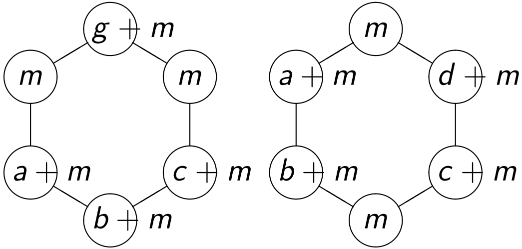
このゲームでの Grundy 数（定義はここでは省略する）$g(a, b, c)$ を、閉じた形で求めたい．

- $g(a, b, 0) = a + b$，$g(a, 0, c) = a \oplus c$ である．
- $g(a, b, c) \leq a + b + c$ である．
- $a \leq b$ であれば $g(a, b, c) = a + b + c$ であることがわかる．

よって，残りは $a > b$ かつ $b < c$ の場合である．

$\mathcal{P}$ 局面の一般化

0 個の山を含む $\mathcal{P}$ 局面は，すべての山に m 個の石を加えても $\mathcal{P}$ 局面となることが多い．

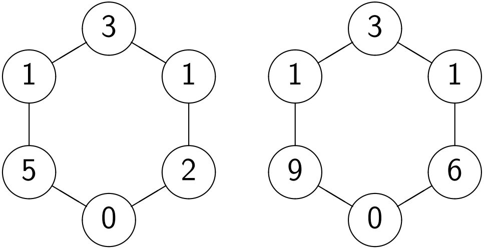


$g = g(a, b, c)$ $\qquad$ $a + b = c + d$

計算機によって $\mathcal{P}$ 局面のリストを求め，上記がどのような場合に成り立つかを確かめ，証明をしたい．

特殊な $\mathcal{P}$ 局面

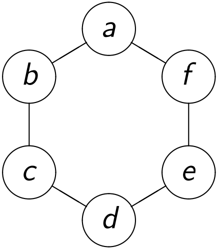
しかしこの問題の難しさは，以下のように 0 個の石の山を1 つだけ含む例外的な $\mathcal{P}$ 局面が少数ながら存在し，
ここまでに述べたわかりやすい $\mathcal{P}$ 局面の性質のどれにも当てはまらないことにある．

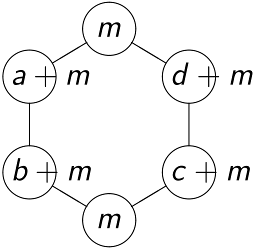


これらの局面では次の着手で 1 個の石の山を取り去っても，残りの山をうまく $g = g(a, b, c)$ の形に持ち込めない．

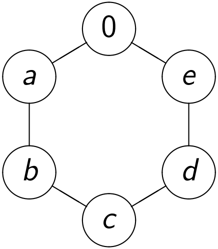
当面の課題

- （左図）$\mathcal{P}$ 局面では必ず「大，小，大，小，大，小」パターンになっていると言えるか．すなわち，「$a \geq d$ かつ $b \leq e$ かつ $c \geq f$」または「$a \leq d$ かつ $b \geq e$ かつ $c \leq f$」と言えるか．
- （中図）この局面が一般に $\mathcal{P}$ 局面になると言えるか．言えないのであれば，例外はどのようなときか．
- （右図）この局面が $\mathcal{P}$ 局面となるための a, b, c, d, e の条件を求めよ．





$a + b = c + d$



$a, b, c, d, e > 0$