

ニムのいくつかの拡張ルールと最適戦略： 制限ニムの解析的拡張

篠田 正人（奈良女子大学研究院自然科学系）

第 10 回広島岡山代数+ゲームシンポジウム

March 15, 2025

- ① 得点付き制限ニム
- ② ランダム性を加えたニム
- ③ 3人ゲームへの拡張

解析学の観点からの組合せゲーム理論研究を進めたい

その一環として、ニムのゲーム性を高める拡張を提案し、簡単な制限ニムでどのような結果が得られるかを紹介する。

拡張の元となる制限ニムの基本ルールは以下のものとする。

- 2人のプレイヤーA、Bが、交互の手番で石を取る。ゲーム開始時の石の個数を m とする。
- 1回の着手では、取れる石の個数は1個または2個とする。場の石がなくなればゲームは終了する。

制限ニムの正規形と逆形

制限ニムで、一般には以下のいずれかの勝敗決定条件が用いられる。

- （正規形）最後の石を取ったほうが勝ちとする。
このとき $m = 3k$ であると後手必勝、それ以外では先手必勝、すなわち、 $m = 3k$ が P 局面である。
- （逆形）最後の石を取ったほうが負けとする。
このとき $m = 3k + 1$ であると後手必勝、それ以外では先手必勝、すなわち、 $m = 3k + 1$ が P 局面である。

この2つのルールをつなぐ拡張を考える。

（注）上記のルールで、P 局面は石数 m に関して3周期で現れることを注意しておく。

得点の導入

この制限付きニムに得点を導入し、プレイヤーはそれぞれゲーム終了時の自分の合計得点が多くなるようにプレイする。

- 石を取ると1個につき1点を得る。
- 最後の石を取ると、さらにボーナス点 N 点を得る。

このボーナス点 N はゲーム開始前に定められた値であり、

$N = +\infty$ とすると正規形（最後の石を取ることを目標とするゲーム）

$N = -\infty$ とすると逆形（最後の石を取らせることを目標とするゲーム）

$N = 0$ とすると、単に石をたくさん取るゲーム

となる。

（注） $N = 0$ のとき、先手と後手の取る石の個数の差は m に関して $0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots$ と4周期で変わる。

着手の選択と利得関数

$m = 1$ のとき 先手が $1 + N$ 点、後手が 0 点獲得

$m = 2$ のとき 先手に着手の選択肢があり、

最初に 2 個の石を取ると、先手 $2 + N$ 点、後手 0 点

最初に 1 個だけ石を取ると、先手 1 点、後手 $1 + N$ 点

従って、先手は N が -1 より大きければ 2 個、小さければ 1 個取る

このゲームは定和ゲーム（2 人のプレイヤーの得点合計が $m + N$ ）であるので、改めてゼロ和ゲームとみなして利得関数を

$$f_N(m) = \text{ゲーム終了時の（先手の得点）} - \text{（後手の得点）}$$

として定式化する。

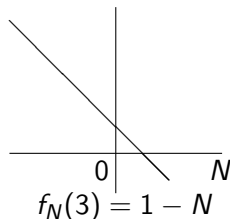
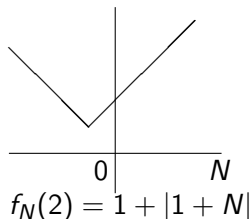
利得関数と再帰式

前述のように定めた利得関数は、以下のような再帰式を持つ。

$$f_N(1) = 1 + N, \quad f_N(2) = \max\{2 + N, -N\} = 1 + |1 + N|,$$
$$f_N(m+2) = \max\{2 - f_N(m), 1 - f_N(m+1)\}.$$

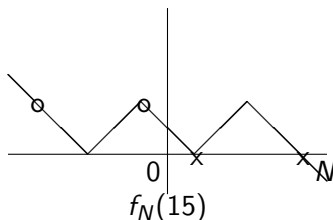
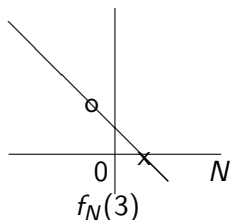
なお、便宜上 $f_N(0) = -N$ と設定すると扱いやすくなる
(0 個の局面 = 「相手が最後の石を取った直後」と解釈する)。

N を変数としてグラフを描くことで、利得や戦略の変化が見て取れる。



利得関数の準周期性

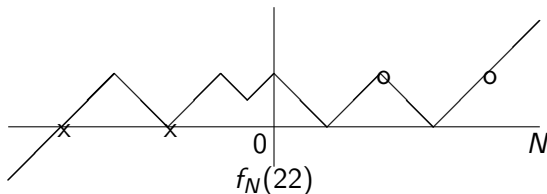
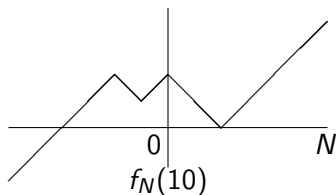
この $f_N(m)$ は、 m に関して 12 ($=3 \times 4$) 周期での規則性 を持つ。



$f_N(m)$ が 2 を超える（上の例では $N = -1$ ）、あるいは 0 を下回る（ $N = 1$ ）点の外側にそれぞれ谷（o から o まで）と山（x から x まで）が加わって $f_N(m+12)$ のグラフができる（次のスライドでも例示する）。

この性質により、 $f_N(1)$ から $f_N(12)$ までを求めておけば山と谷の挿入を繰り返してすべての $f_N(m)$ のグラフが描ける。

利得関数の準周期性



$f_N(m)$ が 2 を超える、または 0 を下回る点の外側にそれぞれ谷 (o から o まで) と山 (x から x まで) が加わって $f_N(m+12)$ のグラフができる。

この得点制を 3 山ニムに導入した (Oginuma-S., Scoring Nim, arXiv)

ランダム性を加えたニム

制限ニムにランダム性を加えて、ゲームの勝敗が運にも左右されるようにする。各プレイヤーは、勝つ確率の高い着手を選択するものとする。表が出る確率が p 、裏が出る確率が q ($= 1 - p$) であるコインを用意する。

- ルールⅠ： 任意のプレイヤーがコインを投げ、表が出たら A が着手（1 個または 2 個の石を取る）を行い、裏が出たら B が着手を行う。
- ルールⅡ： 手番のプレイヤーがコインを投げ、表が出たら着手を行ってまたコインを投げる。裏が出たら手番が相手に移る。
- ルールⅢ： 手番のプレイヤーがコインを投げ、表が出たら着手を行う。コイン投げの結果に関わらず、手番は相手に移る。

これらのルールの下で、各プレイヤーの最適戦略（着手において石を 1 個取るか 2 個取るかの選択）を定め、それぞれのプレイヤーの勝つ確率を m と p （または q ）の式で表す。

ルール設定の理由

ルール I では途中の過程に関わらず、最後の局面（石が 1 個または 2 個だけが残っている）で着手を行ったほうが勝ちであり、A の勝つ確率は p 、B の勝つ確率が $1 - p$ であるため戦略性の考察の意味で面白くない。

また、コインを投げて「表が出たら 1 個取る、裏が出たら 2 個取る」というように着手の選択をコイン任せにするのもプレイヤーの考える要素がなく、単なる運任せのゲームとなって面白くない。

このように

石を 2 個取るか 1 個取るかを考えさせるルールにしたい

という点を重要視してルール設定を行いたい。

準備：ゲームの d 値、 R 値

ゲームの局面 G に対し、 $d(G)$ および $R(G)$ を以下のように定める。

$$d(G) = \begin{cases} 0 & G \text{ が終了局面} \\ 1 + \min\{d(G') \mid G \rightarrow G'\} & \text{それ以外のとき,} \end{cases}$$

$$R(G) = \begin{cases} 0 & G \text{ が終了局面} \\ 1 + \min\{R(G') \mid G \rightarrow G', R(G') \text{ は奇数}\} & (*) \\ 1 + \max\{R(G') \mid G \rightarrow G'\} & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

ここで、 $G \rightarrow G'$ は G から G' へ 1 回の着手で移せることを意味し、 $(*)$ は $G \rightarrow G'$ かつ $R(G')$ が奇数である G' が存在することを条件とする。

$d(G)$ は局面 G から最短何手で終了局面に到達するかを表す。

$R(G)$ は remoteness と呼ばれる値であり、 $R(G)$ が奇数であれば「最短何手で勝てるか」、偶数であれば「最長何手で負けるか」を表す。

制限ニムにおいて、石が m 個の局面の d 値、 R 値をそれぞれ $d(m)$ 、 $R(m)$ と書くことにする。

ルールIIのゲームの解析

プレイヤー A を先手、B を後手とし、 k 回目の着手（実際に石を取る操作）を A、B が行う確率をそれぞれ a_k, b_k とする。ルール設定により、

$$a_1 = \frac{1}{1+q}, b_1 = \frac{q}{1+q} \text{ であって}$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{1+q} a_k + \frac{q}{1+q} b_k, \quad b_{k+1} = \frac{1}{1+q} b_k + \frac{q}{1+q} a_k$$

である。具体的に一般項を求めれば

$$a_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^k \right\}, \quad b_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^k \right\}$$

であり、 $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > \frac{1}{2}$ である。

着手の具体的な選択

各局面で、手番のプレイヤーが石を 2 個取るか 1 個取るかの選択は以下のように行う。

- $m = 1, 2$: 石を全部取って勝つ。
- $m = 3$: 2 個取っても 1 個取っても、次の着手を行ったプレイヤーが残り石を全部取るので、結果的にどちらでも同じになる。
- $m = 4$: 石を 2 個取ると、あと 1 回の着手でゲームは終了する。石を 1 個取ると、あと 2 回の着手でゲームは終了する。従って、このルールの下では、これらの着手後の勝率 a_1 と a_2 の大小を比較して着手を選択することになり、 $a_1 > a_2$ により石を 2 個取って「次の着手を行うプレイヤーが勝ち」の状態を選んで確率 a_1 で勝つことができる。

ルールIIのゲームの結論

同様に、着手を行う際に石を取る個数によって「石を2個取るとあと k 回の着手でゲームが終了し、1個取るとあと $k+1$ 回の着手で終了する」と終了までの手数が変わることが見込まれる場合、 $a_k > a_{k+1}$ により「石を2個取る」選択が優位の着手となる。

したがってプレイヤーはそれぞれの着手で2個ずつの石を取り続けることになり、ゲームは $d(m) = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ 回の着手で終了することから、先手が勝つ確率は

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{d(m)} \right\}$$

となる。

ルールⅢのゲームの解析

プレイヤー A を先手、B を後手とし、 k 回目の着手（実際に石を取る操作）を A、B が行う確率をそれぞれ a_k, b_k とする。ルール設定により、

$$a_1 = \frac{1}{1+q}, b_1 = \frac{q}{1+q} \text{ であって}$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{1+q} b_k + \frac{q}{1+q} a_k, \quad b_{k+1} = \frac{1}{1+q} a_k + \frac{q}{1+q} b_k$$

である（ルールⅡとの違いは、着手後の手番交代ルールの設定によるものである）。

$$a_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{-1+q}{1+q} \right)^k \right\}, \quad b_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{-1+q}{1+q} \right)^k \right\}$$

であり、 $a_1 > a_3 > a_5 > \cdots > \frac{1}{2} > \cdots > a_6 > a_4 > a_2$,

$b_1 < b_3 < b_5 < \cdots < \frac{1}{2} < \cdots < b_6 < b_4 < b_2$ である。

着手の具体的な選択

各局面で、手番のプレイヤーが石を 2 個取るか 1 個取るかの選択は以下のように行う。

- $m = 1, 2$: 石を全部取って勝つ。
- $m = 3$: 2 個取っても 1 個取っても、次の着手を行ったプレイヤーが残り全部取るので、結果的にどちらでも同じになる。
- $m = 4$: 石を 2 個取ると、あと 1 回の着手でゲームは終了する。石を 1 個取ると、あと 2 回の着手でゲームは終了する。これらの着手後（プレイヤー A と B の手番が入れ替わる）の勝率 b_1 と b_2 の大きさを比較して着手を選択することになり、 $b_1 < b_2$ によりプレイヤーは石を 1 個だけ取って「次の次の着手を行うプレイヤーが勝ち」の状態を選択し、確率 b_2 で勝つことができる。

ルールⅢのゲームの結論

同様に、着手を行う際に石を取る個数によって「石を2個取るとあと k 回の着手でゲームが終了し、1個取るとあと $k+1$ 回の着手で終了する」と終了までの手数が変わることが見込まれる場合、 k が偶数であれば $b_k > b_{k+1}$ により「石を2個取る」選択が優位の着手となり、 k が奇数であれば $b_k < b_{k+1}$ により「石を1個取る」選択が優位の着手となる。これは、「残り偶数回の着手で終わる局面を相手に押し付ける」戦略を表している。

この残りの着手回数は正規形のニムでの R 値 $R(3k) = 2k$ 、 $R(3k+1) = R(3k+2) = 2k+1$ と一致し、プレイヤーは3の倍数個の石を残すような着手を行う。従って、先手が勝つ確率は

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{-1+q}{1+q} \right)^{R(m)} \right\}$$

となる。

2人ゲームでの戦略の妥当性

この戦略の選択は、互いに「相手のプレイヤーも賢い（必ず正しい戦略選択を行う）」ことを仮定している。結果として得られる勝率は「相手がどれだけ賢いプレイをしても保証される」値を示しているが、もし相手が賢くない場合は別の戦略選択でもっと勝率を上げられる可能性がある。

たとえば石が6個残っていて着手を行う場合、相手が賢ければ石を2個取っても1個取っても結果は同じ（どちらでも、その次の着手では石を3個残す）であるが、もし相手が賢くなければ、自分に残り6個の局面では石を1個だけ取ったほうが、次の着手で相手が誤って石を1個だけ取って4個残す可能性があるため得になる。

3人ゲームへの拡張

ランダム性を加えた制限ニム（ルール II、ルール III）をさらに3人で行うゲームに拡張する。一般に3人以上のゲームへの拡張では、各プレイヤーの着手選択基準を適切に定める必要がある。たとえば、Aはどうやっても勝てないが自分の着手で勝者がBとCのどちらになるかが変わるときにどうするかを（選好順序などによって）定めなければならない。この講演で扱うゲームでは、各プレイヤーは自分が勝つ確率が大きくなる着手を選ぶという設定でこの点を解決している。ただし、注意を要する点があることを最後のスライドで述べる。

以下、A、B、Cの3人のプレイヤーがルール II およびルール III で定められた手番交代ルール（ $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \dots$ の順で移る）の下で制限ニムを行う。

3人ゲーム：ルールIIの下での解析

k 回目の着手（実際に石を取る操作）を A、B、C が行う確率をそれぞれ a_k, b_k, c_k とする。ルール設定により、

$$a_1 = \frac{1}{1+q+q^2}, b_1 = \frac{q}{1+q+q^2}, c_1 = \frac{q^2}{1+q+q^2} \text{ であって}$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{1+q+q^2} a_k + \frac{q}{1+q+q^2} c_k + \frac{q^2}{1+q+q^2} b_k$$

である（ b_{k+1}, c_{k+1} についても同様に定まる）。具体的に一般項を求めれば

$$a_k = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} r^k \cos k\theta, \quad r = \frac{1-q}{\sqrt{1+q+q^2}},$$

$$\cos \theta = \frac{2+q}{2\sqrt{1+q+q^2}}, \quad \sin \theta = \frac{-\sqrt{3}q}{2\sqrt{1+q+q^2}}$$

である。なお $q \rightarrow 0$ で $\theta \rightarrow 0$ 、 $q \rightarrow 1$ で $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}$ である。

着手の具体的な選択

着手を行う際に石を取る個数によって「石を2個取るとあと k 回の着手でゲームが終了し、1個取るとあと $k+1$ 回の着手で終了する」と終了までの手数が変わることが見込まれる場合、 $a_k > a_{k+1}$ であれば「石を2個取る」選択が優位の着手となり、 $a_k < a_{k+1}$ であれば「石を1個取る」選択が優位の着手となる。具体的に

$$a_k > a_{k+1} \iff \sqrt{3}(1+q) \cos k\theta > \sin k\theta$$

であり、取るべき石数が k によって周期的に変わることを示している。

なお、着手を一意に決定するためには、 $a_k = a_{k+1}$ となる k が存在しないように q を選んでおくとよい。

3人ゲーム：ルールⅢの下での解析

k 回目の着手（実際に石を取る操作）を A、B、C が行う確率をそれぞれ a_k, b_k, c_k とする。ルール設定により、

$$a_1 = \frac{1}{1+q+q^2}, b_1 = \frac{q}{1+q+q^2}, c_1 = \frac{q^2}{1+q+q^2} \text{ であって}$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{1+q+q^2}c_k + \frac{q}{1+q+q^2}b_k + \frac{q^2}{1+q+q^2}a_k$$

である（ b_{k+1}, c_{k+1} についても同様に定まる）。具体的に一般項を求めれば

$$c_k = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r^k \cos k\theta, \quad r = \frac{1-q}{\sqrt{1+q+q^2}},$$

$$\cos \theta = \frac{-(1+2q)}{2\sqrt{1+q+q^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+q+q^2}}$$

である。なお $q \rightarrow 0$ で $\theta \rightarrow \frac{2}{3}\pi$ 、 $q \rightarrow 1$ で $\theta \rightarrow \frac{5}{6}\pi$ である。

着手の具体的な選択

着手を行う際に石を取る個数によって「石を2個取るとあと k 回の着手でゲームが終了し、1個取るとあと $k+1$ 回の着手で終了する」と終了までの手数が変わることが見込まれる場合、(Aは着手後の手番交代によりCの立場に替わることから) $c_k > c_{k+1}$ であれば「石を2個取る」選択が優位の着手となり、 $c_k < c_{k+1}$ であれば「石を1個取る」選択が優位の着手となる。具体的に

$$c_k > c_{k+1} \iff (1-q)\sin k\theta > (1+q)\cos k\theta$$

であり、取るべき石数が k によって周期的に変わることを示している。

なお、ルールII ($-\frac{\pi}{6} < \theta < 0$) よりルールIII ($\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi$) のほうが回転角 θ が大きいので、ルールIIIのほうが石を2個取るか1個取るかの選択が頻繁に入れ替わることを示している。

具体的な勝率比較

ルール III の下での 3 人ゲームで、 $p = 5/6, q = 1/6$ とする。石を 2 個取るか 1 個取るかで勝率が変わるのは $m = 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, \dots$ のときであり、着手を行うプレイヤーの勝率は

- $m = 4$ 石を 2 個取ると勝率 2.3 %、1 個取ると勝率 23.4 %
- $m = 5$ 石を 2 個取ると勝率 23.4 %、1 個取ると勝率 60.6 %
- $m = 6$ 石を 2 個取ると勝率 60.6 %、1 個取ると勝率 13.7 %
- $m = 8$ 石を 2 個取ると勝率 13.7 %、1 個取ると勝率 35.7 %
- $m = 10$ 石を 2 個取ると勝率 42.5 %、1 個取ると勝率 23.4 %

などとなる。

3人ゲームでの戦略の妥当性

(再掲) ルール III の下での 3 人ゲームで、 $p = 5/6, q = 1/6$ とする。

- $m = 4$ 石を 2 個取ると勝率 2.3 %、1 個取ると勝率 23.4 %
- $m = 6$ 石を 2 個取ると勝率 60.6 %、1 個取ると勝率 13.7 %

ここで、2 人ゲームと 3 人以上のゲームでの本質的な違いが現れる。上の例で $m = 6$ のとき石を 2 個取るのは「 $m = 4$ で着手をするプレイヤーは必ず石を 1 個だけ取る」ことを前提にしているため、他のプレイヤーが賢くないと損をする（別のプレイヤーがその恩恵を受ける）ことがある。

2 人ゲームでは相手が賢くなくても自分が損をすることはない（得ができる可能性はある）が、このように 3 人以上のゲームでは他のプレイヤーの能力によって自分が損をしてしまうことがあり、このゲームの解析では「各プレイヤーが賢く、自分の勝率を最大化できる」ことを仮定する必要がある。