

ニムの後手必勝局面のバランス条件

篠田 正人（奈良女子大学研究院自然科学系）

第9回日本組合せゲーム理論研究集会

August 25, 2025

① 複数山から石を取るニム

② 具体的なグラフでの例

③ P 局面集合の考察

はじめに

一回の着手で複数の石の山から同時に石を取ることができるニムを考え、後手必勝局面となる条件について考察する。

プレイヤーは2人、手番で石を取れなければ負け（正規形）とする。

石の山は全部で n 山、着手では k 山以内から合計1個以上の石を取る（どの k 山から取れるかをルールで指定する）。

参考文献：Ehrenborg, R. and Steingrímsson, E. Playing Nim on a simplicial complex, *The Electronic Journal of Combinatorics* **3**(1) (1996).

Moore のニム $MN(n, k)$

石の山は全部で n 山、石は k 山以内から同時に取ることができる。
 k 山の選び方に指定はなく、どの山から取ることもできる。

この Moore のニム $MN(n, k)$ の局面 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ が P 局面である必要十分条件は、

$a_1, a_2, \dots, a_n$ をそれぞれ 2 進数表記したとき、各桁ごとに現れる
1 の個数がすべて $k + 1$ の倍数である

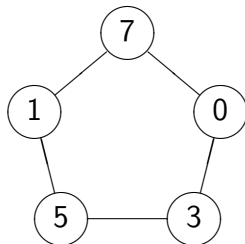
ことである。(Moore(1910))

この条件を $a_1 \oplus_{k+1} a_2 \oplus_{k+1} a_3 \oplus_{k+1} \cdots \oplus_{k+1} a_n = 0$ と書くことにする。

元々のニムの P 局面条件は $a_1 \oplus_2 a_2 \oplus_2 a_3 \oplus_2 \cdots \oplus_2 a_n = 0$ である。

円形ニム $CN(n, k)$

円形ニムでは、 n 個の石の山を円状に並べ、手番のプレイヤーは「連続して隣接する k 山から合計 1 個以上の石を取る」着手を行う。

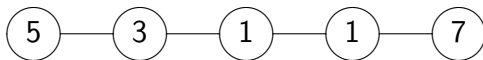


円環状に n 個の頂点があり、そのうちの頂点 k 個以内の連結成分から同時に石を取ることができると解釈できる。

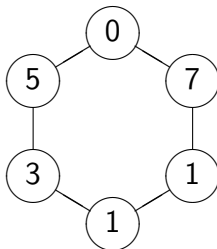
参考文献：Dufour, M. and Heubach, S. Circular Nim games, *The Electronic Journal of Combinatorics* **20**(2) (2013).

パスニム $PN(n, k)$

パスニムでは、 n 頂点が一列に並んだグラフを考え、隣接する k 個以内の頂点から合計 1 個以上の石を取る着手を行う。



パスニムは円形ニムの部分ゲームとしても現れる。たとえば上図が $PN(5, 2)$ の局面であるとする、下図の $CN(6, 2)$ の局面と等価である。



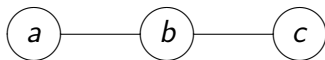
円形ニムとパスニムでわかること

- $CN(n, 1)$ および $PN(n, 1)$ は元来の n 山ニム。
- $CN(n, n-1)$ は Moore のニム $MN(n, n-1)$ であり、また $PN(n, n-1)$ の P 局面も容易にわかる（両端の山の石数が同数で残りの石数が 0 の場合）。
- $CN(n, k)$ は $n \leq 5$ においてはすべて解決済み（P 局面がわかる）であり、他に $CN(6, 3)$ 、 $CN(6, 4)$ 、 $CN(7, 4)$ 、 $CN(8, 6)$ が解決されている (Dufour and Heubach (2013)、Dufour, Heubach and Vo(2022))。
- $PN(n, k)$ は $n \leq 4$ の解決は容易であり、 $n \leq 2k$ であれば P 局面集合はわかる。

CN(6, 2)

CN(6, 2)、PN(5, 2) は未解決であり、PN(5, 2) は CN(6, 2) の部分問題である。これらの解決は、同様に複数山から石を取るニムをグラフ上で考えるとき多くの場面で現れるため重要な課題である。

PN(5, 2) の解決には、PN(3, 2) の Grundy 数を求める問題が含まれる。



このゲームでの Grundy 数 $g(a, b, c)$ を、閉じた形で求めたい。

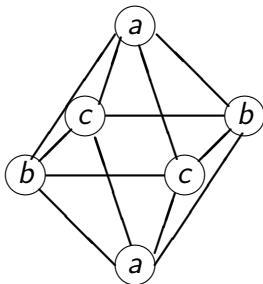
- $g(a, b, 0) = a + b$, $g(a, 0, c) = a \oplus c$ である。
- $g(a, b, c) \leq a + b + c$ である。
- $a \leq b$ または $c \leq b$ であれば $g(a, b, c) = a + b + c$ である。

多面体ニム

多面体ニム として、頂点上に石の山があり、同一の面を共有する山から同時に石を取るニムを考える。

正四面体ニムは $MN(4, 3)$ (4 山のうち 3 つの山から同時に石を取る) である。

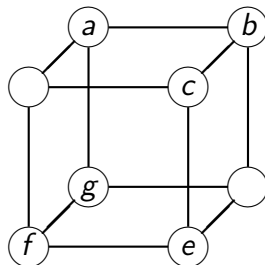
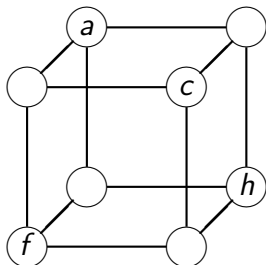
正八面体ニムは拡張円形ニム (末續 (2023)) $ECN(6_{1,2}, 3)$ となり、P 局面は対蹠点の石数がそれぞれ等しい場合となる。



立方体ニム

立方体ニムでは、立方体の各面の4つの頂点から同時に石を取ることができる。

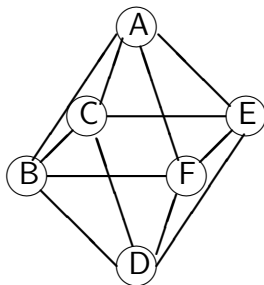
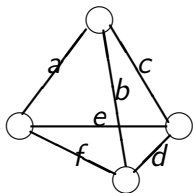
この問題は部分ゲームとして $MN(4, 2)$ や $CN(6, 3)$ を含む拡張となっている。P局面集合の決定は未解決である。



他の「グラフ上のニム」

なおグラフ上のニムとして、辺に石の山を置き同一の頂点を共有する辺から同時に石を取るルールも提案されている (Brown and Williams(2019))。

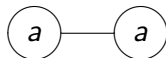
このニムを正四面体 (6 辺のうち 3 辺を選んで石を取る) で行うときの P 局面の決定も面白い未解決問題である。これは正八面体の各頂点に石の山があり、下図で $\triangle ABC$, $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, $\triangle CDE$ から石を取ることでできるニムと等価である。



P局面集合の考察：左右のバランス

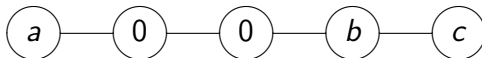
各ルールの下で、P局面である条件を考察する。

2山のニムのP局面は $(PN(2, 1))$ の形で書けば



であり、「バランスがとれている状態」である。

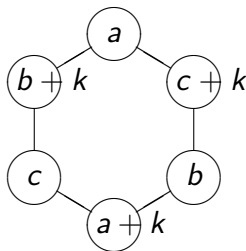
同様に $PN(5, 3)$ のP局面は下記の $a = b + c$ の場合であって「左右のバランスが取れている」。



つまり、P局面での着手は「石を取ることでバランスを崩してしまう」、N局面では「バランスを直す着手が存在する」。

P局面集合の考察：各方向のバランスと大小性

CN(6, 3) の P 局面は下の形 ($a, b, c, k \geq 0$) に表されることが必要十分条件である。この形は、向かい合う辺の両端の石数合計がそれぞれ等しい、とみなすこともできる。

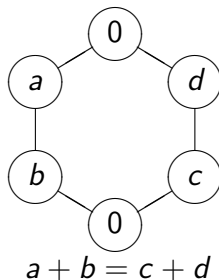
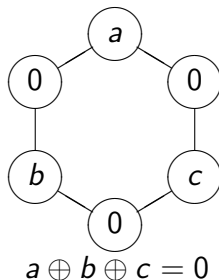
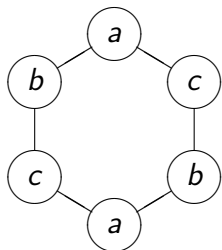


6山の円形ニムは、対面の山の石数との関係（この場合は対面する山の石数差がすべて等しい）がおそらく重要な意味を持つ。

対面の山との石数比較により大小を定めると、円に沿って「大、小、大、小、大、小」と交互に並んでいることにも注意したい。

P局面集合の考察：未解決問題の大小性(1)

未解決である、CN(6, 2) において以下のような自明な P 局面があり

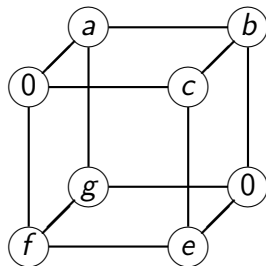
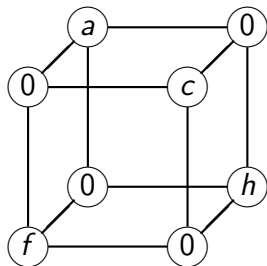


上のどの局面も「大、小、大、小、大、小」のパターンを崩していないことに注意する。

そして今のところ、すべての P 局面は「大、小、大、小、大、小」のパターンをみたすように見える。

P局面集合の考察：未解決問題の大小性 (2)

同じく未解決である、立方体ニムにおける自明な P 局面



$$a \oplus_3 c \oplus_3 f \oplus_3 h = 0$$

$$a - e = f - b = c - g$$

対蹠の関係にある山の石数の大小関係が交互に現れるように見える。

今のところ、すべての P 局面は上記の条件をみたすように見える。

P局面集合の考察：P局面の「加法性」

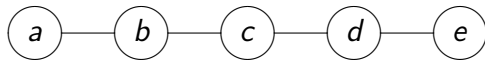
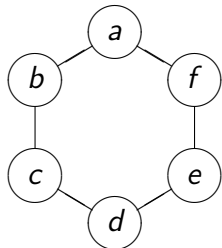
P局面についての「加法性」が成り立つ、すなわち

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ と $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ がともに P 局面のとき
 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n)$ も P 局面となる

のはどのようなときか？

たとえば 3 山ニムでの $a_1 \oplus_2 a_2 \oplus_2 a_3 = 0$ かつ $b_1 \oplus_2 b_2 \oplus_2 b_3 = 0$ であっても $(a_1 + b_1) \oplus_2 (a_2 + b_2) \oplus_2 (a_3 + b_3) = 0$ とは限らない。

一方、CN(6, 3) では P 局面の条件が $a - d = e - b = c - f$ であるため加法性が成り立つ。パスニム $PN(n, k)$ の $n \leq 2k$ の場合でも成り立つ。



$b = c = 0$ かつ $a = d + e$
または $c = d = 0$ かつ $a + b = e$

- 単にゲームとして扱うだけでなく、何らかの数学的な結果を得る
- ある程度対称性の高いグラフに絞って P 局面条件の特定を行う、特に $PN(5, 2)$ と $CN(6, 2)$
- P 局面の大小条件や加法性の条件がみたされる一般的な法則を得る
- ランダムグラフ上でのニム、初期配置をランダムにしたときの先手後手の勝率など確率的な要素を入れる