

一般化 tic-tac-toe のいくつかの問題について

篠田 正人（奈良女子大学研究院自然科学系）

第 10 回日本組合せゲーム理論研究集会

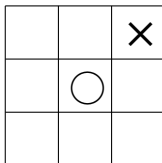
August 31, 2026

はじめに：tic-tac-toe

tic-tac-toe（3目並べ）は、結論として引き分けであることがよく知られている。このゲームは多くの教科書で「二人零和有限確定完全情報ゲームの例」として導入に用いられ、

- 二人零和有限確定完全情報ゲームは「先手必勝」「後手必勝」「引き分け」のいずれかに分類される
- 着手の価値が負にならないゲームは「後手必勝」とはならない
- ゲーム木を書き、終了局面から遡ることで後退解析が（理屈の上では）可能である

ことがこのゲームで説明される。（以下、先手が○、後手が×を打つ）



tic-tac-toe をゲームとして面白くする

この tic-tac-toe の発展形とみなせるゲームの例

- 連珠 15×15 の盤面で行い、先に縦・横・斜めのいずれかに自分の色の石を5つ並べたら勝ち

そのままだと先手必勝なので¹、先手に禁じ手を設定し、さらに開局規定を設ける

- Connect6 先手が1手打った後は、後手、先手、後手、… がそれぞれ2手ずつ続けて打つ

先に縦・横・斜めのいずれかに自分の色の石を6つ並べたら勝ち

- 立体四目ならべ 4×4 の盤面に棒が立っており、そこに黒または白の珠を挿していく

縦・横・斜め・対角線のいずれかに自分の色の石を4つ並べたら勝ち

¹無限サイズの盤では証明されていない??

tic-tac-toe を研究対象とする

この tic-tac-toe を、研究対象になるようにルールを変更、拡張していく

- 逆形ゲーム（一列に並べてしまったら負け）にすると？
やはり結論は「引き分け」
- 一手ごとに、じゃんけんで勝ったほうが次の着手ができるランダムゲームにすると？

一方のプレイヤーが勝つ確率、負ける確率はそれぞれ $\frac{123}{256}$ 、
引き分けになる確率は $\frac{5}{128}$ Develin and Payne (2010)

- プレイヤーがお金を持ち、次の着手権を入札するゲームを行う
これは Bidding Game という
Kant, Larsson, Rai, and Upasany (2024) などを参照

盤面サイズの変更

盤の大きさを 3×3 から変更するとどうなるか？

- 4×4 の盤面で縦・横・斜めのいずれかに 4 つ並べれば勝ちとする

このゲームは引き分けになる

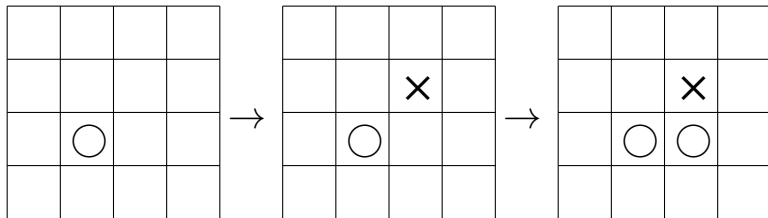
ある証明のアイデア：

後手が必ず引き分けに持ち込めることを示せば十分である。

そこで各局面ごとに、各マスに○または×が書かれる確率をそれぞれ $1/2$ とし、できる○の列の個数の期待値を求める。この期待値は、すでに○の列が完成していたら 1 以上、最終局面で列が 1 つも完成していなかったら 0 である。

完成列の個数の期待値

各局面ごとに、各マスに○または×が書かれる確率をそれぞれ $1/2$ とし、できる○の列の個数の期待値を求める。



$$\frac{13}{16} \left(= \frac{10}{16} + \frac{3}{16} \right)$$

$$\frac{9}{16} \left(= \frac{13}{16} - \frac{4}{16} \right)$$

$$\frac{12}{16} \left(= \frac{9}{16} + \frac{3}{16} \right)$$

後手はその局面での減少量を最大にする手を打てば、後手と先手が打った2手で、この期待値が増えることはない

先手が勝てないことの証明

従って、先手が初手を打った時点で完成列の個数の期待値が 1 未満であれば、先手必勝にはならない

同様に $k \times k$ ($k > 4$) サイズの盤面で縦・横・斜めのいずれかに k 個並べれば勝ちとするゲームでも

$$\frac{1}{2^k} \times \frac{(k+2)^2 - k^2}{2} + \frac{3}{2^k} < 1$$

(左辺 = 1 列が完成する確率 $\times$ 可能な完成列の個数 + 初手での期待値増加分)

が成り立つので先手必勝にはならない

Pairing Draw

5×5 盤面での引き分けは、以下のように示すこともできる。

11	1	8	1	12
6	2	2	9	10
3	7	*	9	3
6	7	4	4	10
12	5	8	5	11

後手は、先手が打った場所と同じ数字のところに打てばよい（先手が*に打ったとき、あるいは同じ数字のマスのすでに×があるときはどこに打ってもよい）

盤面の次元の変更

盤のサイズを $k \times k \times k$ に変更するとどうなるか？

縦・横・斜め・対角線のいずれかに k 個並べれば勝ちとする

- $3 \times 3 \times 3$ サイズ 初手を真ん中に打てば先手必勝
- $4 \times 4 \times 4$ サイズ 先手必勝 Patashnik (1980)
- $5 \times 5 \times 5$ サイズ 未解決
- $6 \times 6 \times 6$ サイズ 未解決
- $7 \times 7 \times 7$ サイズ 未解決→引き分け？

Cain-Raymond-Källersjö (2025, arXiv)

- $8 \times 8 \times 8$ サイズ 引き分け

前述の「期待値 < 1 」の手法で証明できる

同様に、4次元以上のゲームも考えることができる

Winner と Weak Winner

先手が「有利」なゲームにおいて、2種類の「先手必勝」を定義する

- 先手、後手とも先に列を作ることを目指す
ゲームが「後手勝ち」の結論になることはないが、先手は後手の脅しをかわしながら勝つ必要がある
- Maker-Breaker Game
先手は列を作ることを目指し、後手はひたすら「先手に列を作られるのを防ぐ」ゲームとする

前者の意味での「先手必勝」のとき先手が Winner であると言い、後者の意味での「先手必勝」のとき先手が Weak Winner であると言う

(3×3 tic-tac-toe では先手が Weak Winner)

先手が Winner であれば先手は Weak Winner でもある。ただし先手が Weak Winner であっても先手は Winner であるとは限らない

$\mathbb{R}^2$ のゲーム

盤面を平面全体とし、先手はこの平面上に赤い点を打ち、後手は青い点を打つ（相手の点に重ねて打ってはいけない）。

自分の色の k 個の点を間隔 1 ずつに 1 列に（先に）並べたら勝ちとする列の線上に相手の点が挟まってもかまわない

- $k = 2$ 3 手で先手 Winner
- $k = 3$ 5 手で先手 Winner
- $k = 4$ 9 手で先手 Winner
- $k = 5$ 21 手以内で先手 Weak Winner

先手が Winner であるかどうかの結論は知られていない（?）

では先手が Weak Winner となるのは k がいくつまでか？

Theorem 1

任意の k に対し、先手が *Weak Winner* となる。

証明は

József Beck, Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory, Cambridge University Press (2008) (748 ページある本)

による。ただしかなり一般化された証明で、実現までの手数の上界評価は（そのままの証明では）かなり緩い

($k = 5$ ですら $2 \times 309^{44} - 1$ 手以内、しか示していない)

証明のアイデアとして、定められた k に対し十分高い次元では先手が *Weak Winner* となることを示し、その戦略を平面に射影して実行すればよいことを示す