

令和5年度

理 学 部

数物科学科 物理学コース

第3年次編入学者選抜学力試験問題

数 学

令和4年6月11日(土)

10:00～11:30

注 意 事 項

1. 解答用紙表紙の指定された箇所に、受験番号、氏名を記入すること。
受験番号は、受験票の受験番号欄に記入してあるとおりに書くこと。
指定された箇所以外には、受験番号・氏名を絶対に書かないこと。
2. B1～B4の全問を解答すること。
3. 解答は、別冊子の解答用紙に記入すること。
解答用紙左上の問題番号を確認し、問題に対応する解答用紙に記入すること。
4. 各問題の解答用紙(両面)はそれぞれ1枚ある。
5. 問題冊子の総ページ数————— 3ページ
問題ページ————— 第2～3ページ
(第1ページは白紙)
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

B1 以下の関数についての問いに答えよ。

$$g(x) = \frac{e^{-x/a} - e^{-ax}}{a - 1/a}$$

ただし、 a は 1 より大きい実数の定数とする。

- (1) 微分 $g'(x)$ を計算し、 $x = 0$ での傾きを求めよ。
- (2) $g(x)$ が極値をとる点の座標を求め、 $x \geq 0$ での $g(x)$ のグラフの概形を示せ。
- (3) a が 1 より十分に大きいとき、 $g(x)$ の最大値は $\frac{1}{a}$ と近似できることを示せ。
- (4) $\lim_{a \rightarrow 1} g(x)$ を求めよ。

B2 以下の積分で定義された x の関数を考える。

$$I(x) = \frac{\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta e^{x \cos \theta}}{\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{x \cos \theta}}$$

- (1) 分母の積分を

$$F(x) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{x \cos \theta}$$

とする。積分を計算して関数 $F(x)$ を求めよ。

- (2) $I(x) = \frac{d}{dx} \log F(x)$ が成り立つことを示し、 $I(x)$ を求めよ。
- (3) $|x|$ が 1 より十分に小さい場合、 $I(x) = \frac{1}{3}x$ と近似できることを示せ。

次ページに続く

B3 微分方程式 $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ に対し、その一般解と特異解を考える。ただし、 y は x の関数で $p = \frac{dy}{dx}$ である。なお、微分方程式が一般解の任意定数にどのような値を代入しても得られない付加的な解をもつ場合、それを特異解という。 xy 平面上で任意定数が異なる一般解の全ての曲線は、特異解の曲線に接している。これらの曲線には直線が含まれる場合もある。

(1) この微分方程式が $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2}\right) \left(p - x \frac{dp}{dx}\right) = 0$ と変形できることを示せ。

(2) 一般解は $p - x \frac{dp}{dx} = 0$ から、また、特異解は $\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2} = 0$ から求められる。一般解と特異解を $y = f(x)$ の形で求めよ。

(3) 横軸を x 、縦軸を y とするグラフに、一般解が $(0, 1)$ と $(0, -1)$ を通る場合の曲線と、特異解の曲線を図示せよ。

B4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。