令和8年度4月入学者選抜試験問題

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科（博士前期課程）

数物科学専攻

【 一 般 選 抜 】

試験科目名 ： 筆記試験（物 理）

令和７年７月５日（土）

試験時間：１０：００～１２：００

注意事項

（１）問題［Ⅰ］から［Ⅲ］の全問を解答すること。

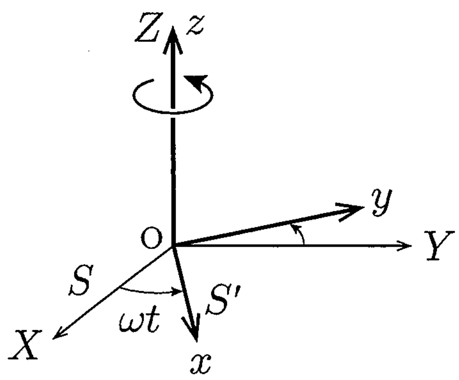
（２）問題ごとに別々の解答用紙を使って解答すること。
解答用紙（両面）は３枚ある。それぞれの問題番号欄に記入する問題番号以外の問題を解答した場合は採点の対象としない。

（３）解答用紙は必要に応じて追加できるので，手を挙げて知らせること。

問題冊子の総ページ数 ―――――――――――― ７ページ

[I]

3 次元空間を自由に運動する質量 m の質点が 1 つある。この質点の運動について，図のように，慣性系 S および回転座標系 S' の下で考察する。S' 系は S 系に対して z 軸のまわりを一定の角速度 ω (>0) で回転している。慣性系 S における質点の位置座標を (X, Y, Z)，回転系 S' における位置座標を (x, y, z) とする。ここで，S 系と S' 系は原点および z 軸を共有し，時刻 $t=0$ において両座標系の軸は一致している。以下の問いに答えよ。



問 1　時刻 t における慣性系 S の座標 (X, Y, Z) を，回転系 S' の座標 (x, y, z) を用いて表せ。

問 2　質点の運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)$$

を，S' 系の座標 (x, y, z) を用いて表せ。

問 3　この質点は自由に運動するため，ラグランジアン L は $L = T$ である。

(a) 一般化座標 x，y，z に共役な一般化運動量 p_x，p_y，p_z を求めよ。

(b) 一般化座標 x，y，z に関するラグランジュの運動方程式をそれぞれ求めよ。

(c) (b) で求めた運動方程式に現れるみかけの力のうち，遠心力 $\vec{F}_{\rm cent}$ およびコリオリの力 $\vec{F}_{\rm cori}$ に対応する項をそれぞれ特定し，それらの表式を記せ。

次ページに続く

[I] の続き

問4　質点が慣性系 S において X 軸上の点 $(X, Y, Z) = (\ell, 0, 0)$ $(\ell > 0)$ に静止していたとする。

(a) 時刻 t における S' 系から見た質点の位置ベクトル $\vec{r}$ は,

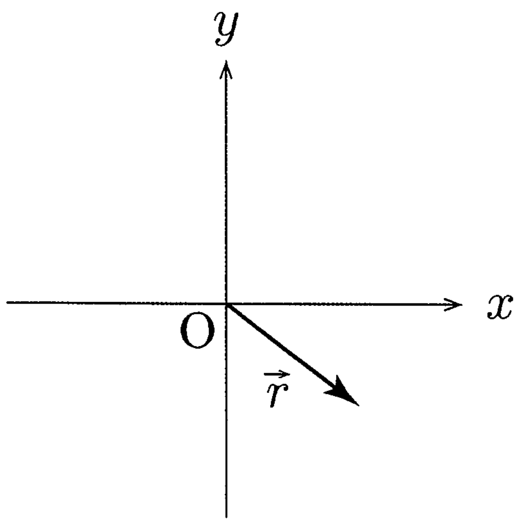
$$\vec{r} = (\ell \cos(\omega t), -\ell \sin(\omega t), 0)$$

で与えられる。速度ベクトル $\dot{\vec{r}}$ を求め，S' 系から見た質点の運動はどのような運動か説明せよ。

(b) 上の運動に対して，S' 系から見た質点にはたらく遠心力を求めよ。

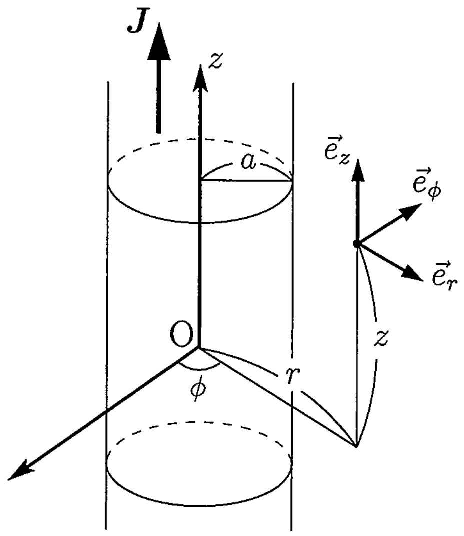
(c) 同様に，S' 系から見た質点にはたらくコリオリの力を求めよ。

(d) 上で求めた遠心力とコリオリの力の合力を求めよ。また，ベクトル $\vec{r}$ が下図のようであるとき，合力のベクトルはどの向きであるか，下図を解答用紙に書き，これに合力のベクトルを図示せよ。



[II]

図のように，半径 a の無限に長い直線導線が z 軸に沿って存在し，その内部 ($r < a$) には一様な電流密度 $\vec{J} = J_0 \vec{e}_z$ が流れている (ここで，$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ は円筒座標系 (r, ϕ, z) における半径方向，方位角方向，軸方向の単位ベクトルである)。一方，導線の外部 ($r > a$) には電流は存在しない。時間的に定常な系を考え，以下の問いに答えよ。



問 1　導線の内部 ($r < a$) および外部 ($r > a$) における磁場の強さ $\vec{H}(r)$ を求めよ。

問 2　導線内部には，一定の電場 $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$ が生じているとする (E_0 は定数)。導線外部の電場は無視できるものとする。ポインティングベクトルは，$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ で与えられる。この式を用いて，導線表面 ($r = a$) におけるポインティングベクトル $\vec{S}$ を求めよ。

次ページに続く

[II] の続き

問３　ポインティングベクトル $\vec{S}$ は，単位時間あたり単位面積を通過する電磁場のエネルギー流束 (すなわち，エネルギーの流れの密度) を表す。このベクトルを用いて，導線の表面から内部に流れ込む電磁場のエネルギーを，単位時間，導線の単位長さあたりで求めよ。

問４　導線内部の電場 $\vec{E}$ と電流密度 $\vec{J}$ の関係はオームの法則 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (σ：電気伝導率) に従う。

(a) J_0 および E_0 の関係を求めよ。

(b) 導線内部で発生するジュール熱の単位時間，導線の単位長さあたりの総和を計算し，問３の結果と一致することを示せ。

[III]

一辺の長さ L の十分大きな立方体 V の空洞の箱の中に存在する電磁波（光子）の状態について量子力学的に考察する。$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$（h：プランク定数），c を光速，k_{B} をボルツマン定数として，以下の問いに答えよ。

問1　空洞内の光子の波動関数が $\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = Ae^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ (A は定数) で表される状態を考える。ここで $\boldsymbol{r}$ は空間ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ であり，波動関数は次の周期境界条件を満たすものとする。

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}(0, y, z) = \varphi_{\boldsymbol{k}}(L, y, z), \quad \varphi_{\boldsymbol{k}}(x, 0, z) = \varphi_{\boldsymbol{k}}(x, L, z), \quad \varphi_{\boldsymbol{k}}(x, y, 0) = \varphi_{\boldsymbol{k}}(x, y, L)$$

(a) k_x, k_y, k_z が $\dfrac{2\pi}{L}$ の整数倍の値をとることを示せ。

(b) $\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ は運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ の固有関数であることを示せ。またその固有値 $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ を求めよ。

(c) 光量子説より，1つの光子のエネルギーは $E = \hbar\omega$ で与えられる。E を k を用いて表せ。ここで ω は光子の角振動数，$k = |\boldsymbol{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ である。

(d) 次の積分を用いて，$\hat{\boldsymbol{p}}$ の異なる固有値に属する波動関数は直交することを示せ。

$$\iiint_V \varphi^*_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r})\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})dxdydz$$

問2　この箱が絶対温度 T の熱浴に接している場合を考える。空洞内には様々な振動数をもつ光子が存在し，箱の壁との間で放射と吸収が繰り返され，光子も同じ温度 T の熱平衡状態となる。これを空洞放射という。このとき，空洞内において，エネルギー E の光子の数 (光子数) が n ($n = 0, 1, \cdots$) である確率 $P(n)$ は

$$P(n) = \frac{e^{-\beta n E}}{Z}$$

で与えられる。ここで $\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$，$Z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n E}$ である。

(a) エネルギー E の光子数の平均値 $\langle n \rangle$ が

$$\langle n \rangle = -\frac{1}{E}\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

で与えられることを示せ。

次ページに続く

[III] の続き

(b) エネルギー $E = \hbar\omega$ の光子数の平均値 $\langle n(\omega) \rangle$ を計算し，T，ω を用いて表せ。

(c) 角振動数が $\omega \sim \omega + d\omega$ の間にある光子の状態数を $D(\omega)d\omega$ とする。問 1 の結果を用いて振動モードの数 ($\boldsymbol{k}$ の場合の数) を計算することで状態数が求められる。光子が各振動モードに対し 2 つの独立な偏光成分を持つことに注意すると，

$$D(\omega)d\omega = \frac{L^3}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$$

となることが分かる。これを用いて，角振動数が $\omega \sim \omega + d\omega$ の間にある空洞放射の単位体積当たりのエネルギー $u(\omega)d\omega$ と T，ω との間に成り立つ関係式（プランクの放射公式）を導け。

問 3　次にこの箱の側面に小さな穴を開け，その穴からもれ出る空洞放射のエネルギーについて考察する。ただし穴は十分小さく系の熱平衡状態は保たれているとする。このとき，穴からの放射は黒体放射として扱うことができる。

(a) 穴の面積を ΔS とする。角振動数が $\omega \sim \omega + d\omega$ の間にある光子について考えると，穴からもれ出る単位時間当たりの空洞放射のエネルギーが

$$\frac{c}{4}u(\omega)d\omega\Delta S$$

となることを示せ。

(b) 前問の結果と積分公式 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$ を用いて，温度 T の黒体の表面から，単位面積・単位時間当たりに放射される全エネルギーを求めよ。