

令和8年10月・令和9年度4月入学者選抜試験問題
奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科(博士前期課程)

数物科学専攻
【 一 般 選 抜 】

試験科目名：筆記試験(物 理)

令和8年7月4日(土)

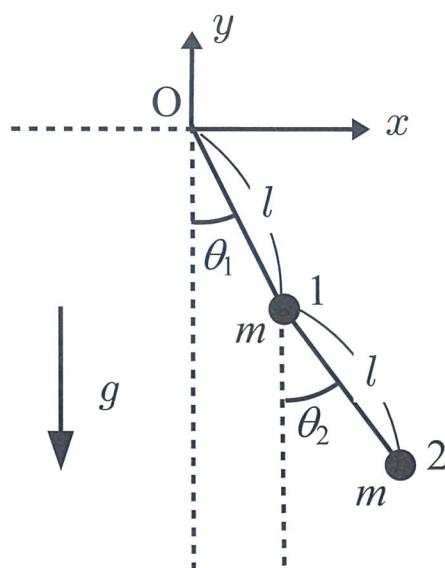
試験時間：10：00～12：00

注意事項

- (1) 問題 [I] から [Ⅲ] の全問を解答すること。
- (2) 解答用紙(両面)は3枚ある。
それぞれの問題番号欄に記載してある番号の問題を解答すること。
記載してある番号以外の問題を解答した場合は採点の対象としない。
- (3) 解答用紙は必要に応じて追加できるので、手を挙げて知らせること。

[I]

図のように、長さ l の糸に質量 m の小球を取り付けた単振り子を 2 つ連結し、上端を xy 平面の原点 O に吊り下げた二重振り子の系を考える。2 つの小球は xy 平面上を運動する。小球 1 の振り子の糸が鉛直下向きとなす角度を θ_1 、小球 2 の振り子の糸が鉛直下向きとなす角度を θ_2 とし、それぞれの角度は反時計回りを正とする。また、重力加速度の大きさを g とする。ここで、糸は伸び縮みせず、糸の質量と空気抵抗は無視するものとする。この系の運動を、ラグランジュの運動方程式を用いて考察し、以下の問いに答えよ。



- 問 1 小球 1 と小球 2 がなす角度がそれぞれ θ_1 と θ_2 であるとき、それぞれの角速度を $\dot{\theta}_1$ と $\dot{\theta}_2$ とする。このとき、小球 1 と小球 2 の位置を (x_1, y_1) と (x_2, y_2) としたとき、それぞれの速度 $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$ と $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$ を求めよ。
- 問 2 この系の運動エネルギー T を θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ を用いて表せ。
- 問 3 この系のポテンシャルエネルギー U を θ_1 , θ_2 を用いて表せ。ただし、点 O の高さで $U = 0$ とする。

次ページに続く

[I] の続き

以下の問いでは、二重振り子が微小振動をしている場合を考える。

- 問4 この系のラグランジアンを $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ を用いて表せ。また、ラグランジュの運動方程式を用いて、この系の運動方程式が

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\frac{g}{l}\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 = 0 \end{cases}$$

となることを示せ。ここで、 $\ddot{\theta}_1$ と $\ddot{\theta}_2$ はそれぞれの角度に対する角加速度である。

- 問5 問4で示した運動方程式を解くために、 $\theta_1 = Ae^{i\omega t}$, $\theta_2 = Be^{i\omega t}$ と仮定する。このとき、角振動数 ω は

$$\omega^2 = \omega_{\pm}^2 = \frac{g}{l} (2 \pm \sqrt{2})$$

を満たすことを示せ。

- 問6 この系が角振動数 ω_+ および ω_- で振動するとき、それぞれの場合について振幅比 $\frac{B}{A}$ を求めよ。

- 問7 問6の2つの振動それぞれについて、 θ_1 と θ_2 の大きさが最大のときの二重振り子の様子を図示せよ。

[II]

図1のように z 軸上の点 $Q(0, 0, d)$ に点電荷 q をおく。無限遠で電位は0になるものとし、真空の誘電率を ϵ_0 とする。以下では、 x 軸、 y 軸、 z 軸の正方向を向く単位ベクトルをそれぞれ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ と表す。以下の問いに答えよ。

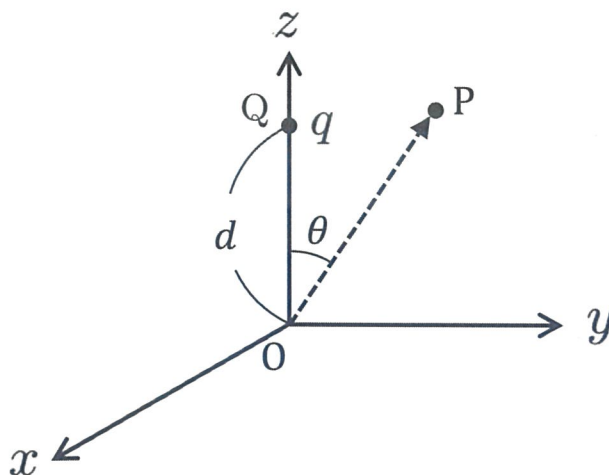


図1

問1 任意の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトル $\vec{r}$ は,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

と表せる。点 Q から点 P へ向かうベクトル $\vec{R}$ を $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ を用いて表せ。また、その大きさ $R = |\vec{R}|$ を x, y, z, d で表せ。

問2 $r = |\vec{r}|$, z 軸と $\vec{r}$ のなす角を θ としたとき, R を r, d, θ で表せ。

問3 点 Q におかれた点電荷 q が点 P につくる電場 $\vec{E}_q$ と電位 ϕ_q を $\vec{R}$ とその大きさ R を用いて表せ。

次ページに続く

[II] の続き

次に，図 2 のように半径 a の接地された導体球を原点 O が中心となるようにおく。点電荷 q は，点 Q においたままで， $d > a$ である。このとき，導体表面では電位が 0 である。このような電位をつくるために鏡像法を用いて考える。以下の問いに答えよ。

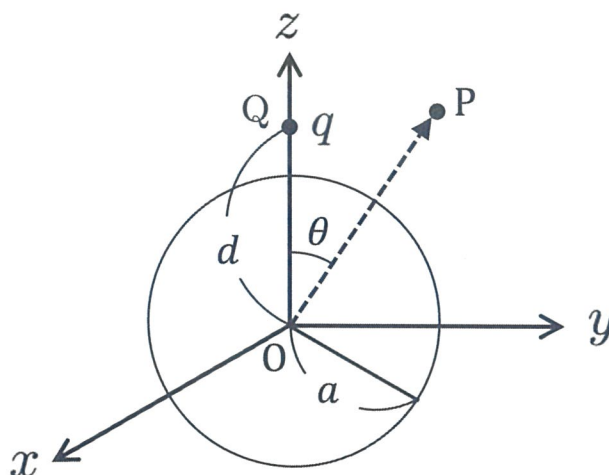


図 2

問 4 導体球のかわりに z 軸上の点 $(0, 0, b)$ に鏡像電荷 q' をおくと仮定する。球面 $r = a$ 上の電位を 0 にするための b と q' がそれぞれ

$$b = \frac{a^2}{d}, \quad q' = -\frac{a}{d}q$$

となることを示せ。

問 5 点電荷 q にはたらく力の大きさと向きを求めよ。

問 6 導体球に誘起される電荷の総量を求めよ。

問 7 次に，導体球が接地されておらず，全電荷が 0 に保たれた孤立した導体球を考える。このとき，導体表面の電位は 0 にならない。このような電位をつくるために導体球のかわりに問 4 の鏡像電荷 q' に加えて，追加の鏡像電荷をおく必要がある。その電荷量とおくべき場所について説明せよ。

[III]

問1 ポテンシャル $V(x)$ の下で x 軸上を運動する質量 m の粒子について考える。時刻 t における粒子の波動関数を $\psi(x, t)$ とする。 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h : プランク定数) として、以下の問いに答えよ。

(a) $\psi(x, t)$ に対するシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t)$$

となる。これを用いて

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0$$

が成り立つことを示せ。ここで $\rho(x, t)$ は確率密度、 $j(x, t)$ は確率流密度であり、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= |\psi(x, t)|^2 \\ j(x, t) &= \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \frac{\partial \psi^*(x, t)}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

なお $\psi^*(x, t)$ は $\psi(x, t)$ の複素共役を表す。

(b) 粒子のエネルギーが確定値 E をとる状態を定常状態という。定常状態では確率密度 $\rho(x, t)$ は t に依存しないことを示せ。

(c) 定常状態では確率流密度 $j(x, t)$ は t にも x にも依存しないことを示せ。

次ページに続く

[III] の続き

問2 互いに独立な粒子が N 個ある系を考える。各粒子は 0 と ε の2つのエネルギー準位だけを持ち、この系が絶対温度 T の熱浴と接している。ボルツマン定数を k_B として、以下の問いに答えよ。

(a) エネルギー準位 ε の粒子数を m 、エネルギー準位 0 の粒子数を $N - m$ とする。この系の微視的状态の数 $W(m)$ を N, m を用いて表せ。

(b) エントロピーは $S = k_B \log W(m)$ で与えられる。全エネルギーを E とすると、エントロピーは

$$S = k_B \left[N \log N - \frac{E}{\varepsilon} \log \frac{E}{\varepsilon} - \left(N - \frac{E}{\varepsilon} \right) \log \left(N - \frac{E}{\varepsilon} \right) \right]$$

となることを示せ。ただし $N, m \gg 1$ とし、必要ならば $n \gg 1$ で成り立つ公式 $\log n! = n \log n - n$ を用いよ。

(c) この系をカノニカル分布を用いて考える。分配関数を Z_N とすると、ヘルムホルツの自由エネルギーは $F = -k_B T \log Z_N$ で与えられる。 Z_N を計算し、 F を求めよ。

(d) S を T の関数と考え、横軸を $\frac{k_B T}{\varepsilon}$ 、縦軸を S として、その関数の概形を図示せよ。
必要ならば、熱力学の関係式 $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ を用いてもよい。