

# Nonlinear Schrödinger equation: soliton, blow-up and noise

福泉麗佳 (東北大学情報科学研究科)  
fukuizumi@math.is.tohoku.ac.jp

この講演では, 非線形 Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + \lambda|\psi|^{2\sigma}\psi = 0, \quad \psi = \psi(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

にノイズが伴った場合にどのような研究が行われているか, 講演者の研究とそれに関連した研究, また最近の動向を紹介する. 非線形 Schrödinger 方程式は非線形分散型方程式の代表例であり, 解の挙動は分散項と非線形相互作用項の競合によって決定される. 分散項と非線形相互作用項が釣り合うと進行波, 定在波 (可積分系の場合はソリトンと呼ばれる), 渦などの定常解が生じ, 分散性が支配的で波の振幅が時間減衰する場合は散乱状態となり, 非線形相互作用項が分散項に打ち勝つと解の爆発が起こる. そこで, 数学的に「もしノイズを加えたら, これらの振舞いにどのような影響が見られるか」ということに興味がある. この講演では物理や工学に現れる確率的な非線形 Schrödinger 方程式において, そのノイズによる効果が実用上重要である場合に, どのようにノイズが効いているのかを数学的に正当化し, 一般化し, その普遍的性質を物理・工学にフィードバックすることを目指す研究を中心に紹介する.

一番初めの例としては, 光通信に使われる光ファイバー中の光パルスの伝搬を表す非線形 Schrödinger 方程式である. 上に述べた通り, Schrödinger 方程式には分散性があるため信号損失が免れないが, 分散係数の符号が交互に変化するようなファイバーを使って信号損失を少なくし, 光パルスの伝送距離および容量の拡大に貢献している分散マネージメントという技術がある. 実際, 非線形 Schrödinger 方程式の分散係数をランダムに変化させることによって, この技術を数学的に説明することに成功している研究が [1,8,10,11] にあり, さらに, どのようなランダム係数であれば伝送距離の拡張に貢献するかということまで調べられている.

非線形 Schrödinger 方程式がモデル方程式として現れるのは上述の光ファイバーモデルだけでなく, Bose-Einstein 凝縮体の波動関数のダイナミクスを表現するものとしても現れる. この場合にも, レーザーによる光学トラップポテンシャルを用いて凝縮体を捕獲した場合に, そのダイナミクスにはレーザーの揺らぎが無視できないとの実験結果があり, 揺らぎをノイズとして非線形 Schrödinger 方程式に加える必要が出てくる. このノイズを加えたことによる影響を数学的に調査したものに [6,7] が挙げられる. 他にも, Bose-Einstein 凝縮を絶対零度下で考えるのではなく, 温度効果を考慮した場合には急冷クエンチにより相転移が発生するなど興味深い現象が観測できる. このモデル方程式は散逸項と加法的時空ホワイトノイズを加えた非線形 Schrödinger 方程式である [4,5].

最後に, 非線形 Schrödinger 方程式に乗法的色付きノイズを加えた場合の任意の時間, 任意の初期値に対する爆発の結果や, 数値計算のみの結果だがホワイトノイズによる爆発の抑制についても少し言及する他 [2,3,13], なぜそれが今のところ数値計算のみの結果であるのか, 加法的時空ホワイトノイズを加えたときに, [12] にあるような繰り込みを行って方程式に意味をつけるのが困難である理由についても触れる [9,14].

## 参考文献

- [1] P. Antonelli, J-C. Saut and C. Sparber, *Well-posedness and averaging of NLS with time-periodic dispersion management* Advances in Differential Equations, 18 (2013) 49-68.
- [2] M. Barton-Smith, A. Debussche and L. Di Menza, *Numerical study of two-dimensional stochastic NLS equations*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 21(2005), 810-842.

- [3] A de Bouard and A Debussche, Blow-up for the stochastic nonlinear Schrödinger equation with multiplicative noise, *Ann. Probab.*,(2005) 33, 1078-1110.
- [4] A. de Bouard, A. Debussche and R. Fukuizumi *Long time behavior of Gross-Pitaevskii equation at positive temperature*, *SIAM. J. Math. Anal.* **50** (2018) 5887-5920.
- [5] A. de Bouard, A. Debussche and R. Fukuizumi, *Two-dimensional Gross-Pitaevskii equation with space-time white noise*, arXiv:2101.10106.
- [6] A. de Bouard, R. Fukuizumi and R. Poncet, *Vortex solutions in Bose-Einstein condensation under a trapping potential varying randomly in time*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* 20, no.9 (2015) 2793-2817.
- [7] A. de Bouard and R. Fukuizumi, *Representation formula for stochastic Schrödinger evolution equations and applications*, *Nonlinearity* 25 (2012) 2993-3022.
- [8] A. Debussche and Y. Tsutsumi, *1d quintic nonlinear Schrödinger equation with white noise dispersion*. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 96(4) (2011) 363-376.
- [9] A Debussche and H. Weber, *The Schrödinger equation with spatial white noise potential*, *Electron. J. Probab.* 23 (2018) 1-16.
- [10] R. Duboscq and A. Réveillac, *On a stochastic Hardy-Littlewood-Sobolev inequality with application to Strichartz estimates for a noisy dispersion*, to appear in *Ann. Henri Lebesgue*.
- [11] K. Chouk and M. Gubinelli, *Nonlinear PDEs with modulated dispersion I: Nonlinear Schrödinger equations*. *Communications in Partial Differential Equations*, 40(11) (2015) 2047-2081.
- [12] M. Hairer, *A theory of regularity structures*, *Invent. Math.* 198 (2014) 269-504.
- [13] A. Millet, S. Roudenko and K. Yang *Behaviour of solutions to the 1D focusing stochastic L2-critical and supercritical nonlinear Schrödinger equation with space-time white noise*, *IMA Journal of Applied Mathematics*, hxab040.
- [14] T. Oh and M. Okamoto, *Comparing the stochastic nonlinear wave and heat equations: a case study*, *Electron. J. Probab.* 26 (2021) 1-44.