The Line Graph Operator on Directed Graphs

ライン作用素によって周期性を持つ
有向グラフの振る舞いについて

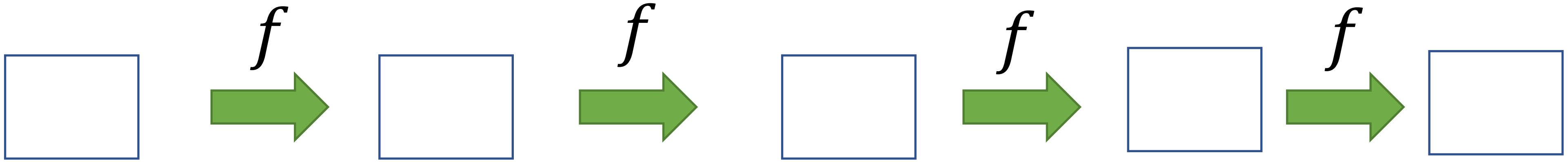
ルイジアナ州立工科大学　元准教授　　菅野　仁子
Louisiana Tech University, research faculty, Jinko Kanno
With Richard Greechie

Dynamical System in Numbers

＋ ー　　× ÷

Numbers and operations (addition, multiplication, or functions) are given;
if we are applying the same operation repeatedly, what would happen?

We are interested in the behaviors of outcomes.
Suppose a function ***f*** and an initial value ***a*** are given;
we call the sequence of outcomes
the orbit（軌跡） of ***a*** under ***f***.



Examples

a:=10, $f(x) \coloneqq x + 2022$

Orbit: 10, 10+2022, (10+2022)+2022, …

10, 2032, 4054, 6076, … The orbit increases strictly.

a :=10, $f(x) \coloneqq x \times (-1) = -x$

Orbit: 10, 10 $\times(-1)$, {10 $\times(-1)$} $\times(-1)$, [{10 $\times(-1)$} $\times(-1)$]$\times(-1)$, …

10, -10, 10, -10, 10, -10, … The orbit repeats the same numbers.

a :=10, $f(x) \coloneqq x \times i$, $i^2 \coloneqq -1$

Orbit: 10, 10 $\times i$, {10 $\times i$} $\times i$, [{10 $\times i$} $\times i$]$\times i$, …

10, $10i, 10i^2, 10i^3, 10i^4, 10i^5, 10i^6, 10i^7, 10i^8$, …

$10, 10i, -10, -10i, 10, 10i, -10, -10i, 10$, ... repeats the same numbers

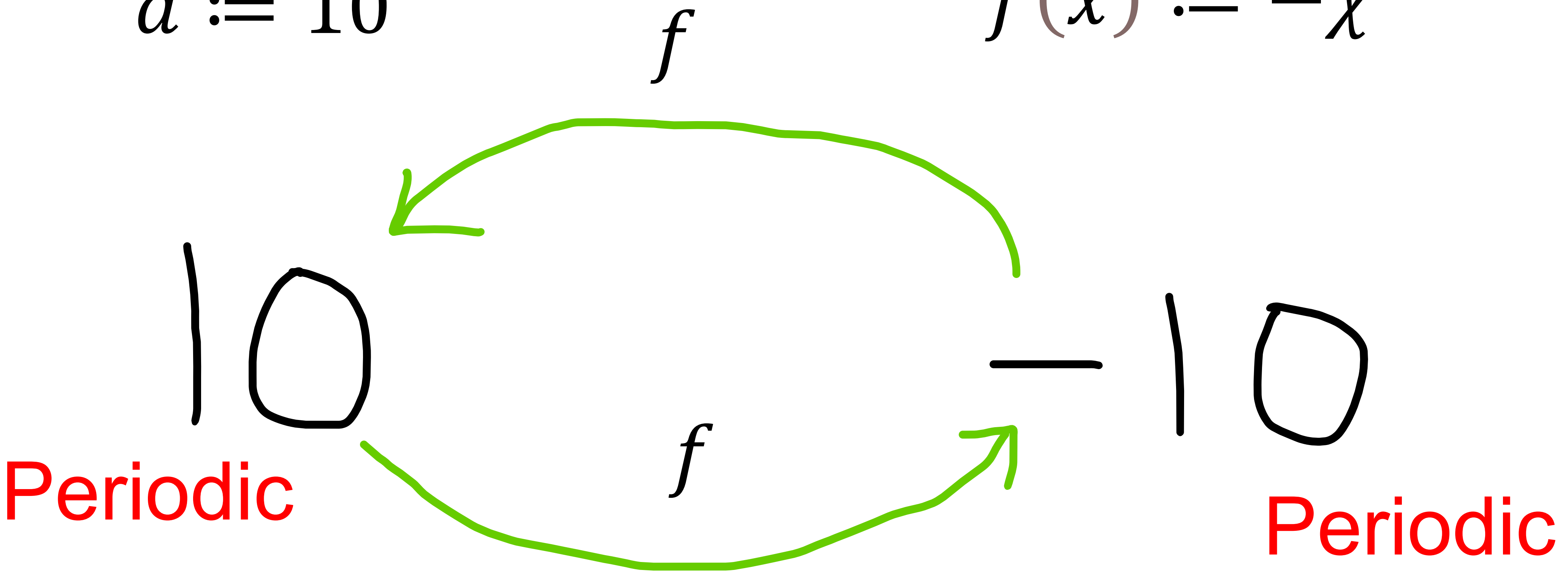
Notations and Definition

For integer $k \geq 2$, let $f^k(x) \coloneqq f\left(f^{k-1}(x)\right)$
$with\ f^1(x) \coloneqq f(x)\ and\ f^0(x) \coloneqq x$.

A value b is *periodic under* f in case
there exists a positive integer k
such that $b = f^k(b)$.

$a \coloneqq 10$

$f(x) \coloneqq -\chi$



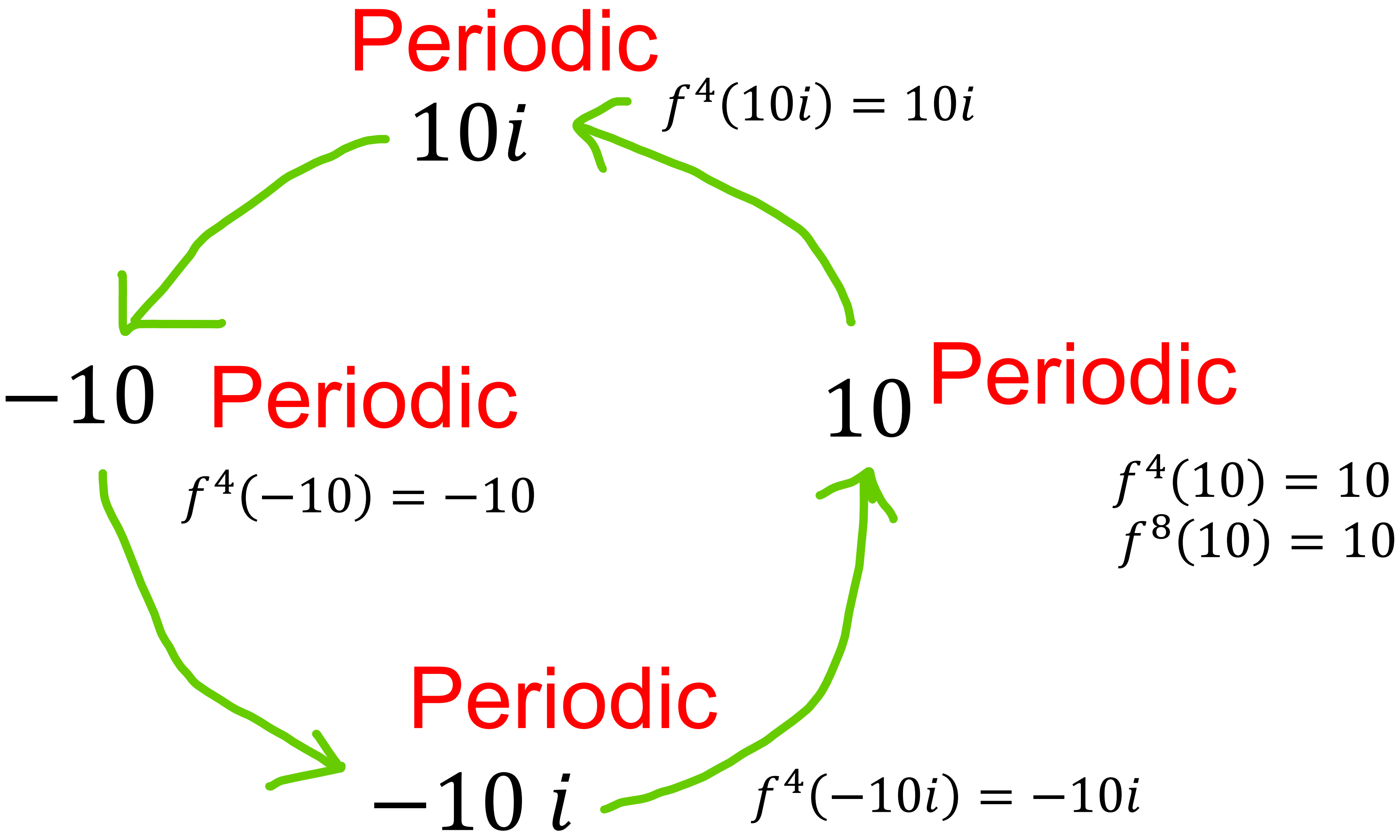
$f^2(10) = 10$

$f^6(10) = 10$

$f^2(-10) = -10$

$f^4(-10) = -10$

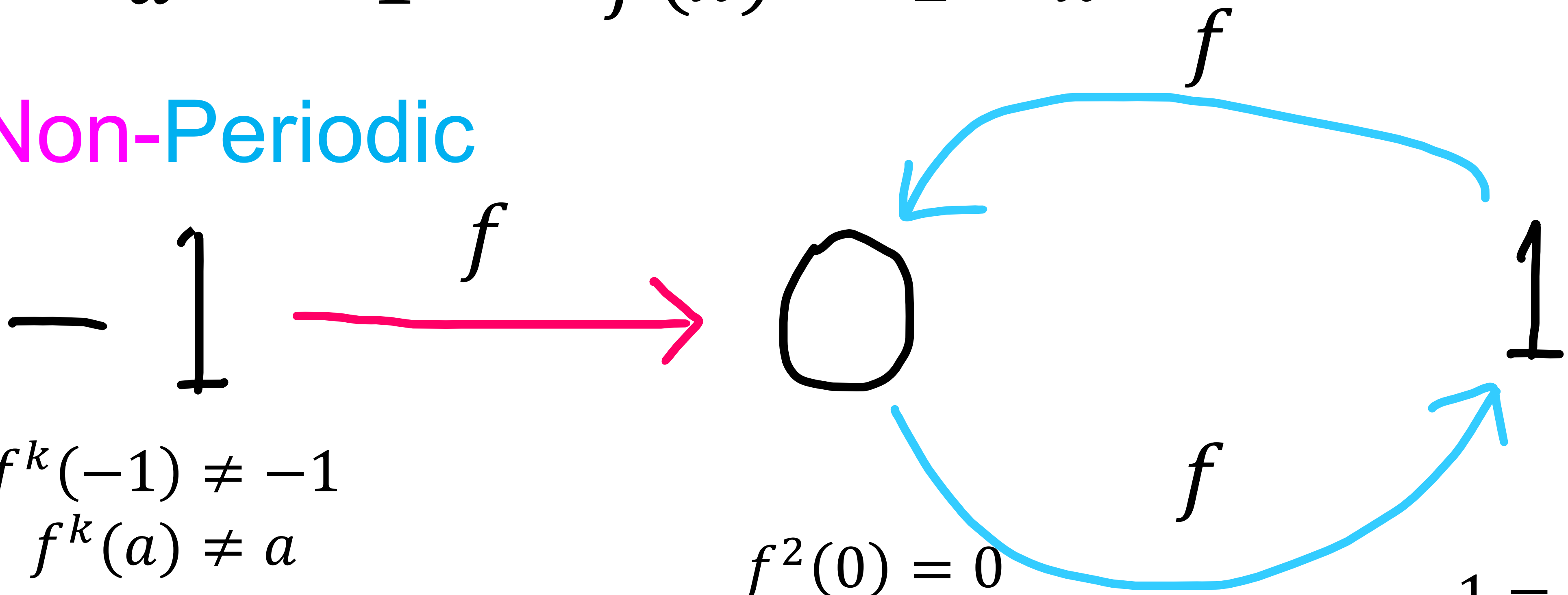
$a := 10$ $\quad f(x) := x \times i$



Not periodic but …

$a := -1$ $\qquad$ $f(x) := 1 - x^2$

Non-Periodic



$f^k(-1) \neq -1$

$f^k(a) \neq a$

$f^2(0) = 0$

$0 = f^1(a)$ *is*

Periodic

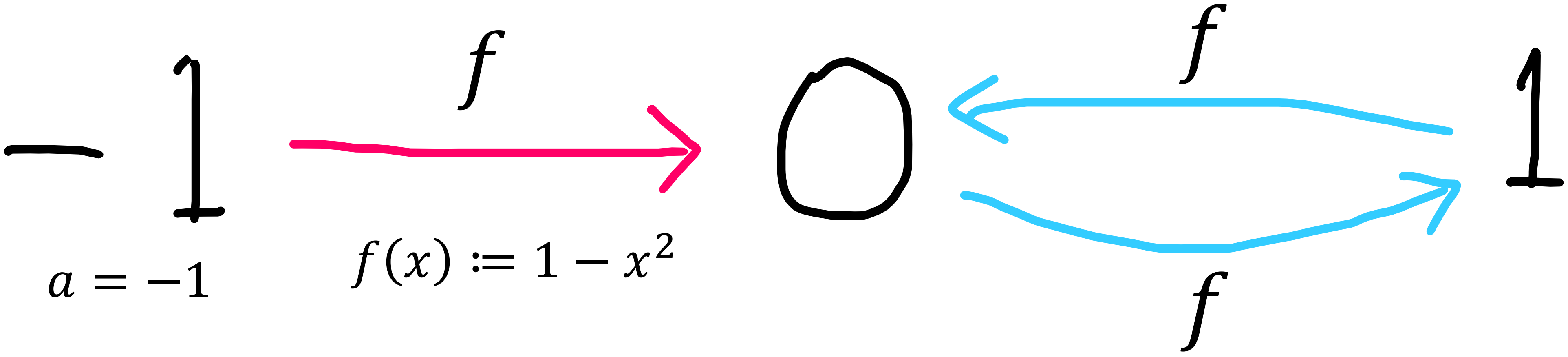
$f^2(1) = 1$

$1 = f^2(a)$ *is*

Periodic

Number Theory from a dynamical perspective

A number a is *pre-periodic*
in case there exists *m* such that f^m(*a*) is periodic
(軌跡の中に、繰り返される値を持つ).



The value -1 is *pre-periodic*
because $0 = f^1(a)$ *and* $1 = f^2(a)$ are periodic.

Introduce a Dynamical Perspective into Graph Theory

Numbers
数論における力学系

Operations or Functions

Find a function and
its pre-periodic values

Directed Graphs (Digraphs)
有向グラフ

The Line Graph Operator

Is there a way to tell us for an arbitrary pre-periodic digraph, how far it is from being periodic?

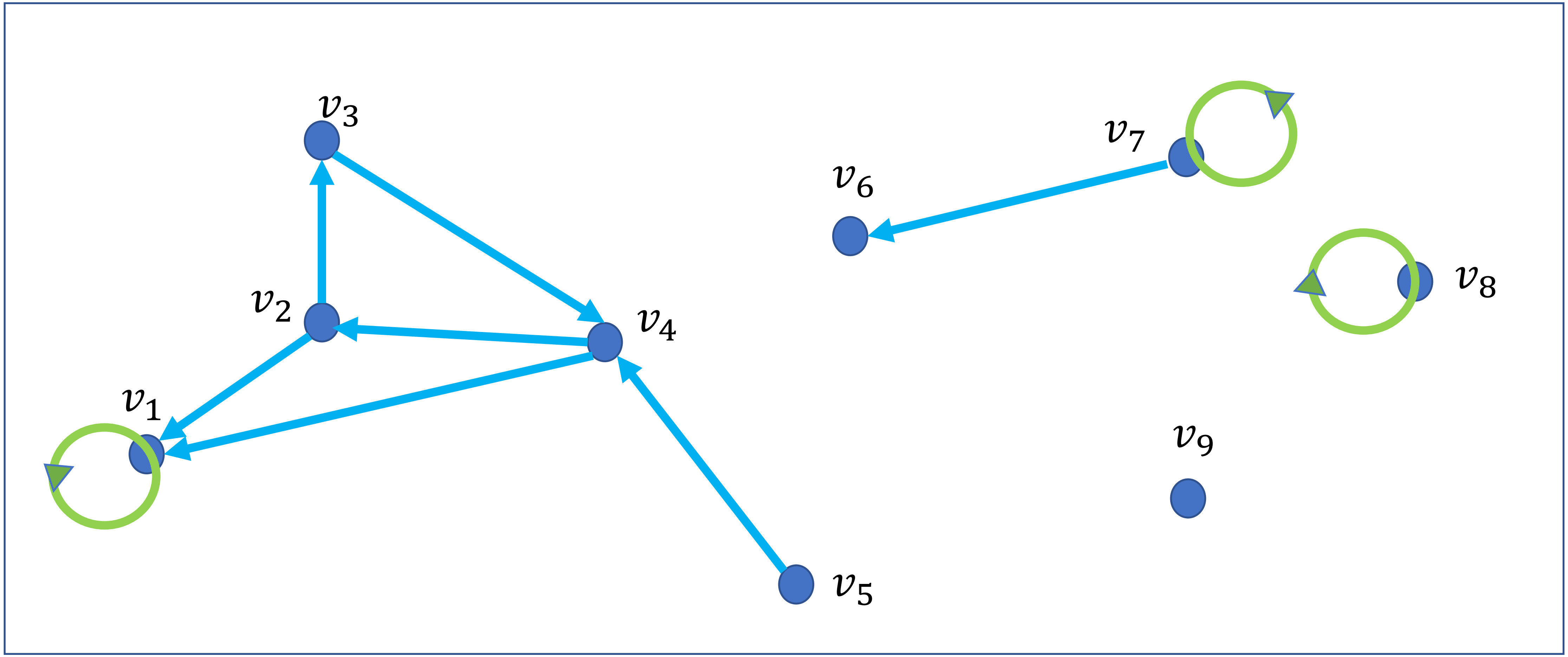
What is a digraph?

A *digraph* D is an ordered pair D = (V, A) where V is a finite set of vertices and A is a set of ordered pairs of V, called arcs.
For $u, v \in V$, an arc $\alpha := (u, v)$ can be expressed as uv for short and u is called the initial point and v the terminal point of the arc α.

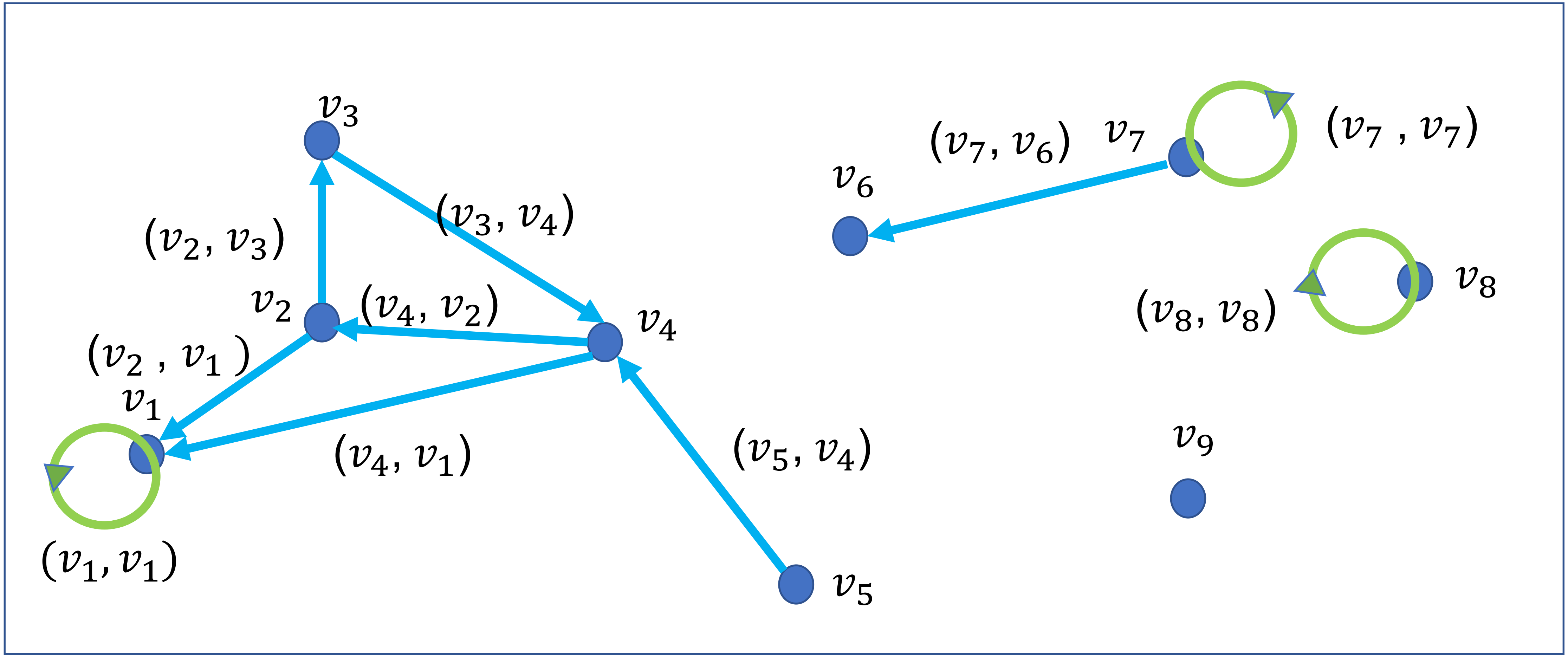
We allow $A = \emptyset$; $D = (V, \emptyset)$ is isolated vertices if $V \neq \emptyset$;
The null graph is $D = (\emptyset, \emptyset)$.

Two digraphs D = (V, A) and D′ = (V ′, A′) are isomorphic
if there is a bijection f : V → V ′ such that
$uv \in A$ if and only if $f(u)f(v) \in A'$.

A digraph D



A digraph D



v_3
(v_2, v_3)
(v_3, v_4)
v_2
(v_4, v_2)
v_4
(v_2 , v_1)
v_1
(v_4, v_1)
(v_1, v_1)
(v_5, v_4)
v_5
(v_7, v_6)
v_7
(v_7 , v_7)
v_6
(v_8, v_8)
v_8
v_9

A path means a directed path.

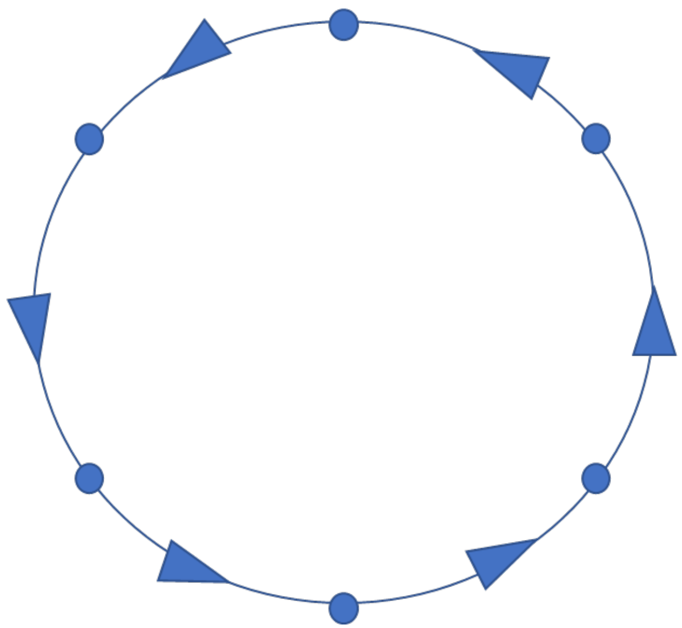
A *path* P in a digraph D is a subgraph of D having $n \geq 1$ distinct vertices $V(P) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ and arcs $A(P) = \{v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n\}$; if $n = 1$ then P is a trivial path of D.

The length $\lambda(P)$ of P is $|A(P)| = n - 1$
And the order $|P|$ of P is $|V(P)| = n$ and we may use the notation P_n.

Similarly, the order $|D|$ of $D = (V, A)$ is the number of vertices.

A cycle means a directed cycle.

A cycle in a digraph D is a subgraph C of D having n ≥ 1 distinct vertices $V(C) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ and arcs $A(C) = \{v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_nv_1\}$.
The length of C is $|A(C)| = n$. When necessary, we write n_C for $|A(C)|$.
We let C_D denote the set of all cycles in a digraph D.



Definition of Linegraph Operator

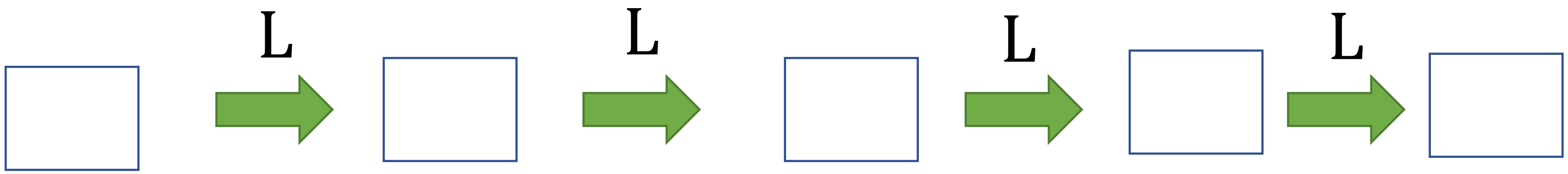
The Linegraph $L(D)$ of a digraph D is that digraph whose vertices are the arcs of D and whose arcs are the concatenated pairs of arcs of D.

Here, two arcs α and β concatenate in case the initial point $\boldsymbol{i}(\beta)$ of the arc equals the terminal point $\boldsymbol{t}(\alpha)$ of the arc ,
or $\boldsymbol{i}(\alpha) = \boldsymbol{t}(\beta)$.

The mapping L that sends D to $L(D)$ is the Linegraph Operator.

ライングラフの定義

ある有向グラフDのライングラフ$L(D)$とは、
Dから新しく定義される有向グラフである。
その頂点集合は、元のグラフの弧集合$A(D)$からなり
二つの弧の隣接関係は、その一方の弧の終点が残りの弧の始点と
一致するときのみ隣接するとして定義される。



Basic Results and Notations

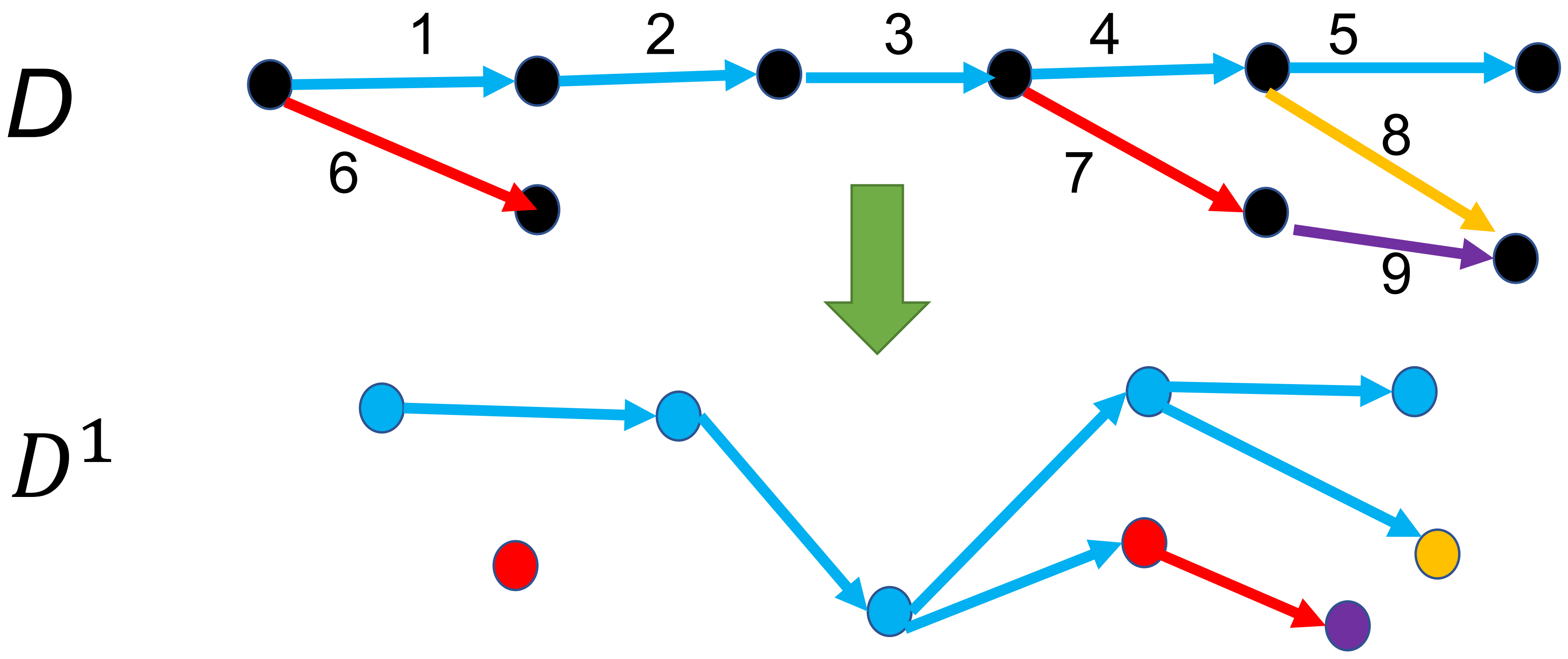
For $k \geq 0$, $D^k := L^k(D)$. Note $D^0 := D$ and $D^1 := L(D)$.

Let P_n be a path length $n - 1$ with n vertices $(n \geq 1)$.
Then $D^1 \cong P_{n-1}$ if $n \geq 2$; otherwise $D^1 \cong (\emptyset, \emptyset)$.
Therefore, $D^k \cong P_{n-k}$ if $k \leq n - 1$; otherwise $D^k \cong (\emptyset, \emptyset)$.

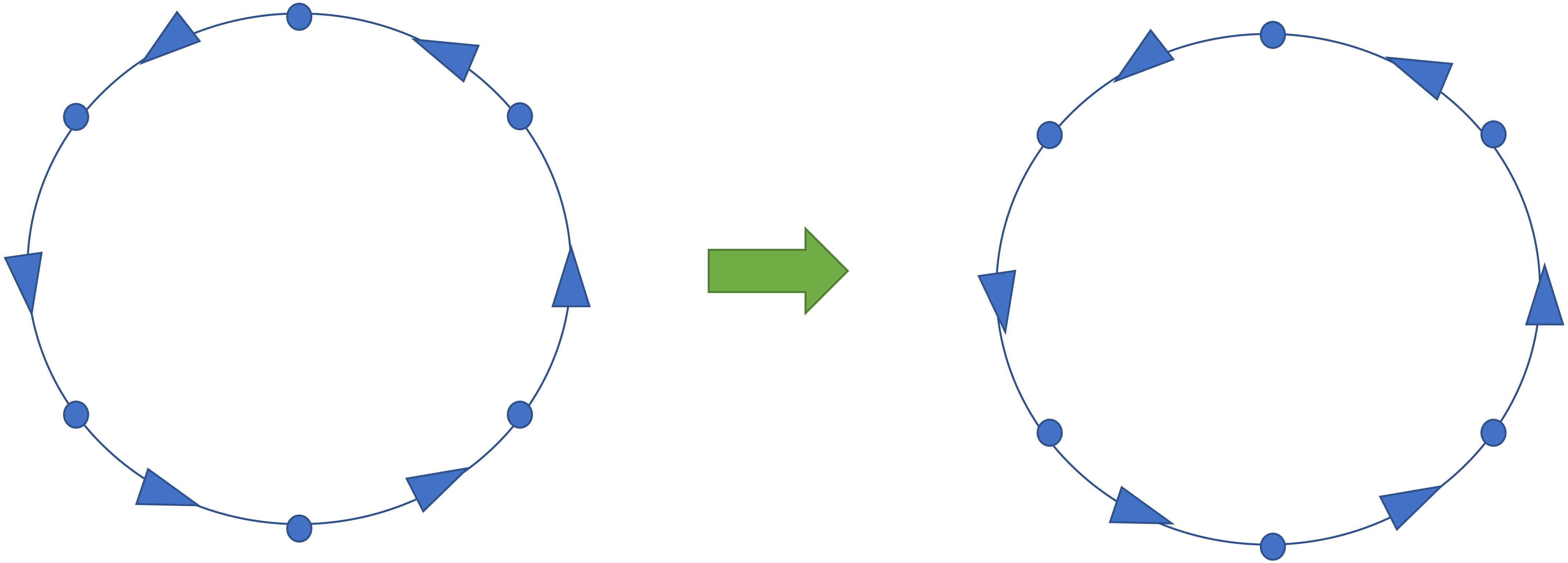
Let C be a cycle length at least 1.
Then for any $k \geq 0$, $C^k \cong C$.

どんなサイクルも、ライン作用素では、決して変わらない。

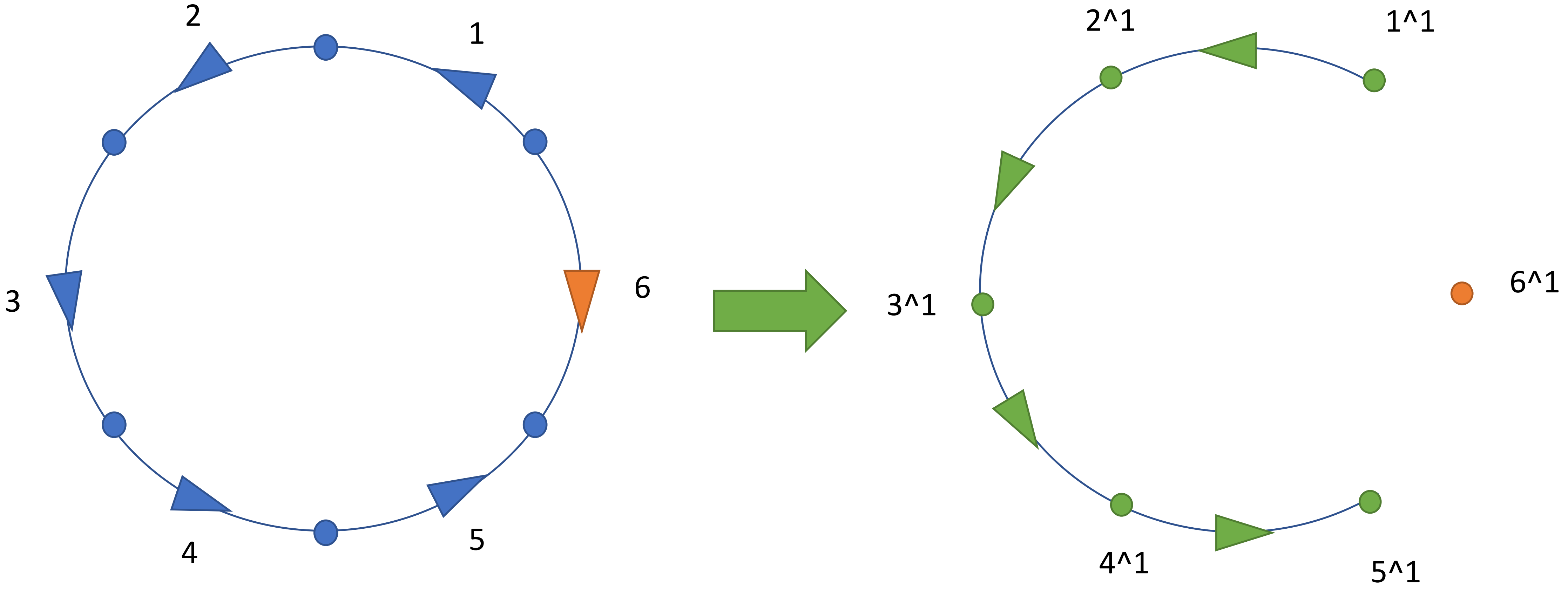
空中の木や森は、ライン作用素で長さが一ずつ短くなり、
やがて消滅する。しかし、、、、



サイクルは、ライン作用素で、いつも不変。



Maximal Directed Paths matter in L-operator.



$D \coloneqq P_6 \cup P_2$

$D^1 \cong P_5 \cup P_1$

サイクルでは、ない。

Only three possible behaviors of digraphs in the L-operator dynamical system

消滅型

D is dissipative if ∃ an integer N such that $\forall m > N$

$D^m \cong (\emptyset, \emptyset)$

拡散型

D is expansive if $\forall n \ \exists m > n$ such that

$|D^m| > |D^n|$

周期型

D is periodic if ∃ k such that $D^k \cong D$,

or D is pre-periodic if $\exists m \geq 0$ such that D^m is periodic.

Distances in Digraphs

For vertices u, v in a digraph D,
the distance of vertices u, v, denoted $d(u, v) = d(v, u)$, is defined by the length of a shortest directed path having endpoints u and v in D.
If there is no such path we define
$d(u, v) = \infty$.

For subgraphs X and Y in D, the distance d(X,Y) in D is the minimum of the set $\{d(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$.

ここでは、パスで距離を測る。
二点間にパスがなければ、たとえ連結でも距離は、無限大。

Characterization of the L-Dynamical system

Lemma(1960, 1970s):

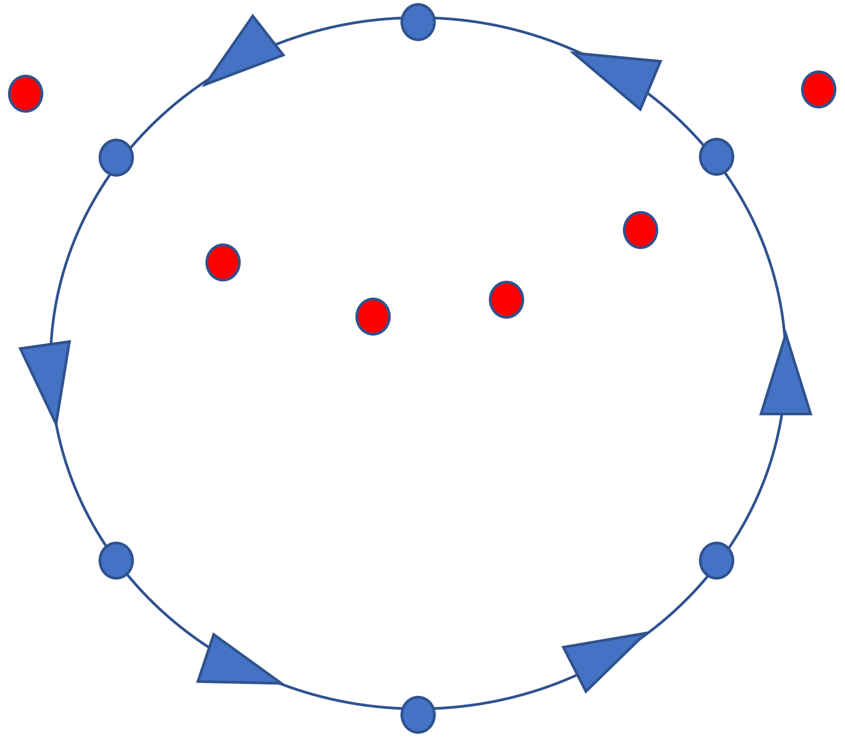
Let D be a digraph.

D is Dissipative ⟺ D has no cycles.

D is Expansive ⟺ D has at least two cycles and they are of finite distance from each other.

D is Pre-Periodic ⟺ Any two distinct cycles of D are of infinite distance from each other.

Note：A path intersects a cycle twice yields an expansive digraph.



理由は、赤い頂点を通るパスがどちらの向きであろうと、二つのサイクルが形成され二つの距離は、ゼロ。つまり有限なので、二番目の条件で、拡散する。

Tangents to a cycle matter in Pre-Periodic graphs.

あるサイクル*C*に対するタンジェント*T*とは、
*C*との共通点がただ一頂点であるという条件を満たすパスのうち
極大なパスを指す。

この唯一の頂点を
そのタンジェントの根（ルート）と呼ぶ。

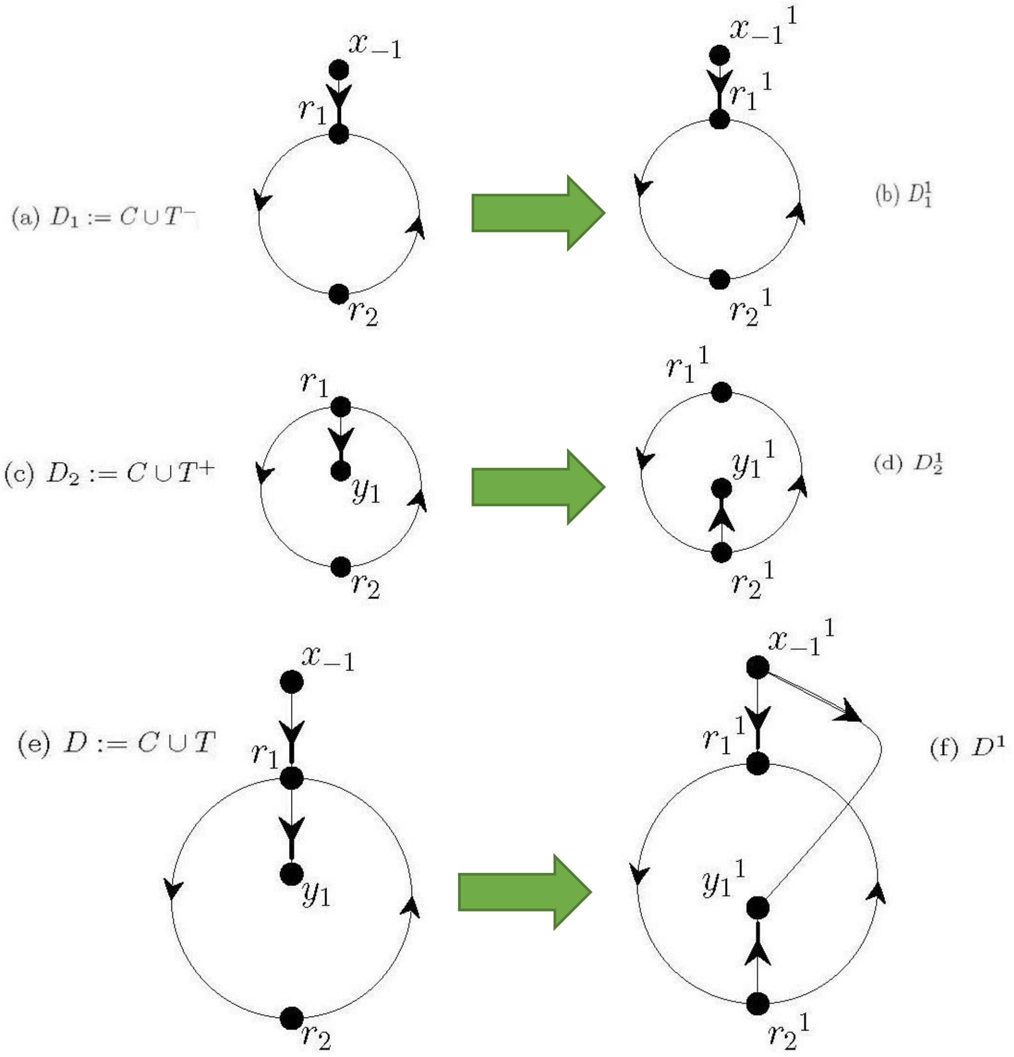
タンジェントTを、ルートのところで二つの部分
（*T*プラスと*T*マイナス）に分けて考えるのが賢明と思われる。

Tangents survive.

$C \cup T^{-}$

$C \cup T^{+}$

$C \cup T$



根も不変

根が一つ戻る

波と呼ばれる
新しいパスが
出現する。

サイクルの近傍$\mathcal{N}_C$

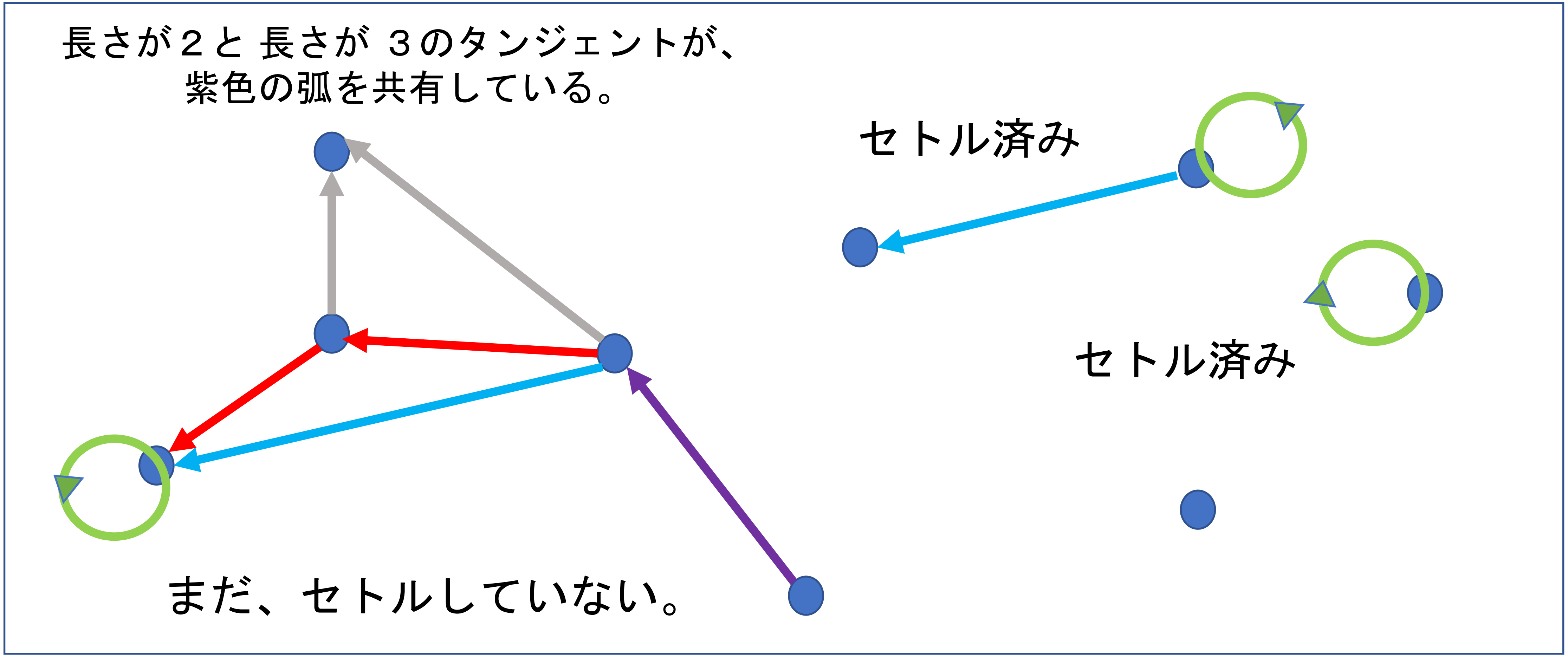
とは、Cとその各頂点を根に持つタンジェント全ての和集合

We say that $\mathcal{N}_C$ is ***settled*** (ready to be periodic) in case

(1) どのタンジェントも、同じ方向に向きづけられた木から生成され、根の異なるタンジェント同士は、互いに素。根が同じタンジェント同士は、根以外に共通点を持たない。

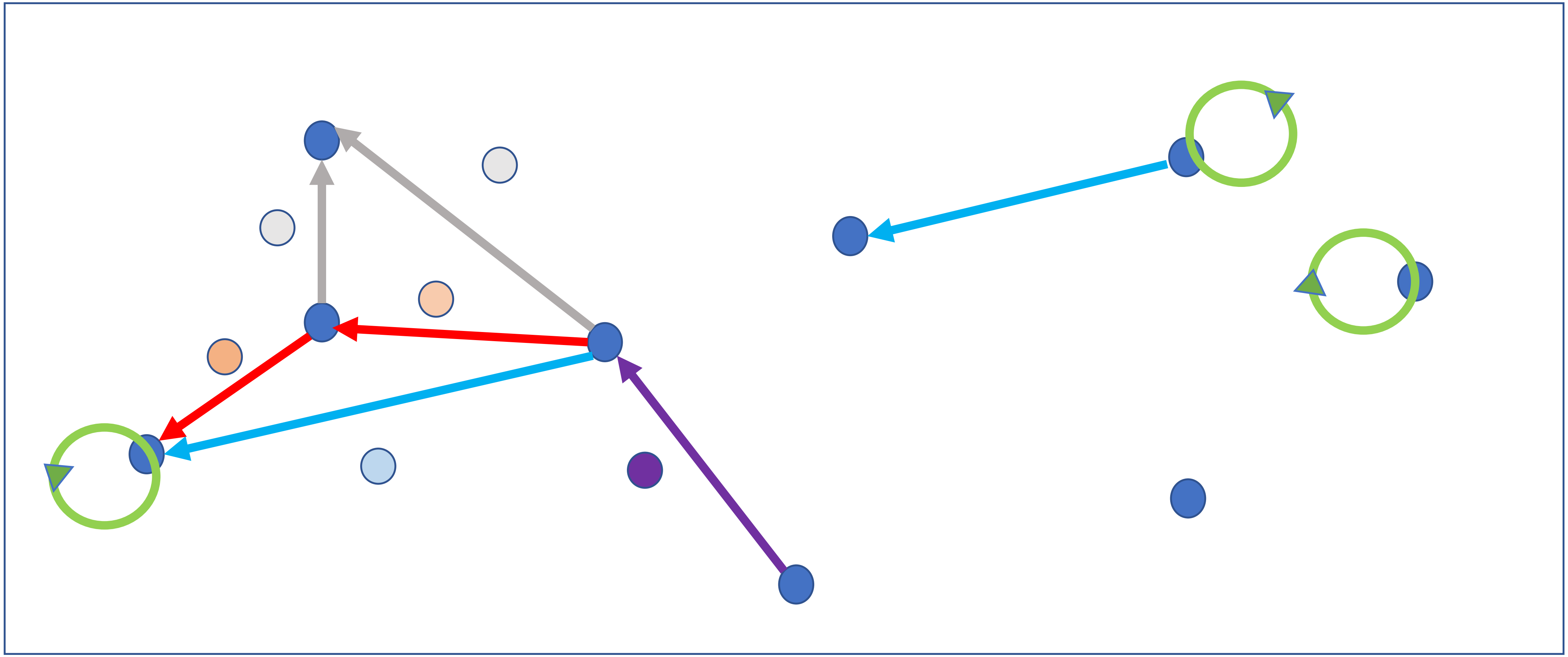
(2) *D*の部分グラフである$\mathcal{N}_C$ は、十分な回数ライン作用素を施したグラフの部分グラフと同型である。

Dの三つのサイクルとそのタンジェントに注目

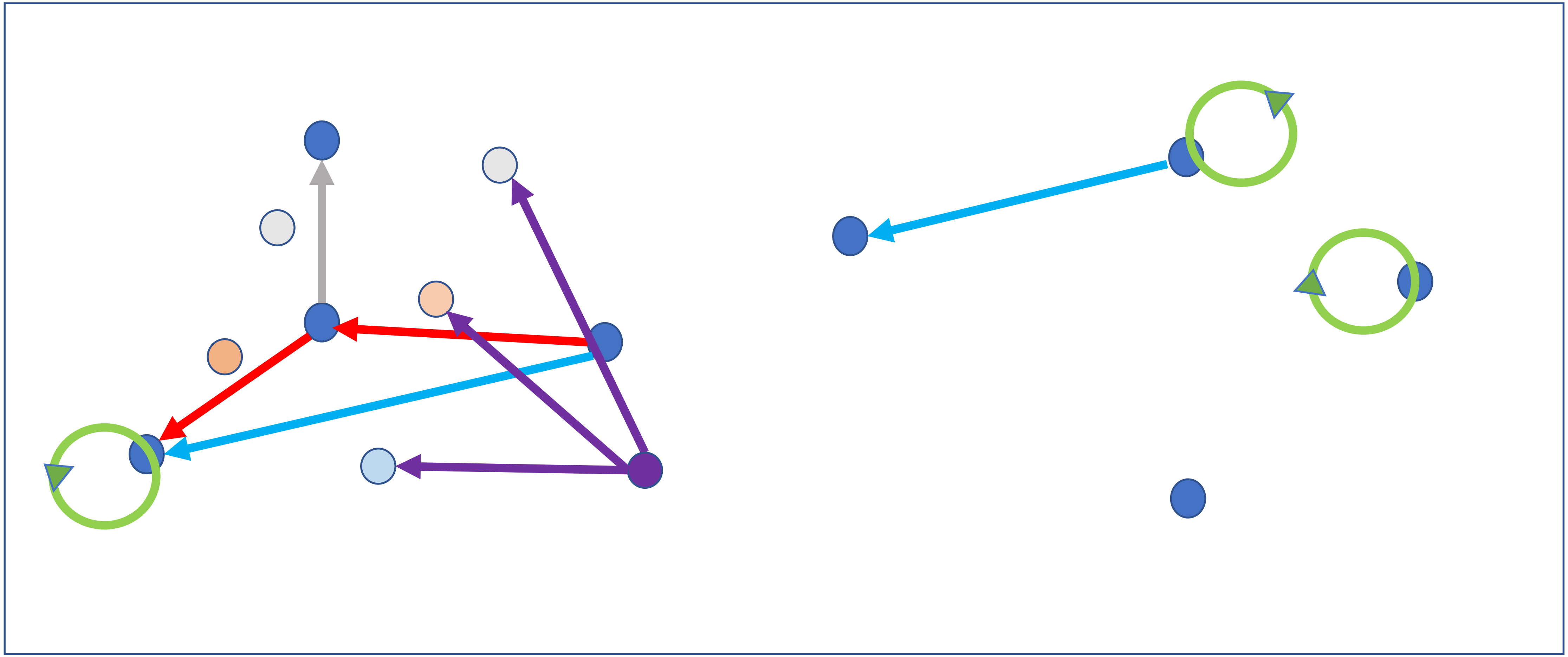


ライングラフの計算法

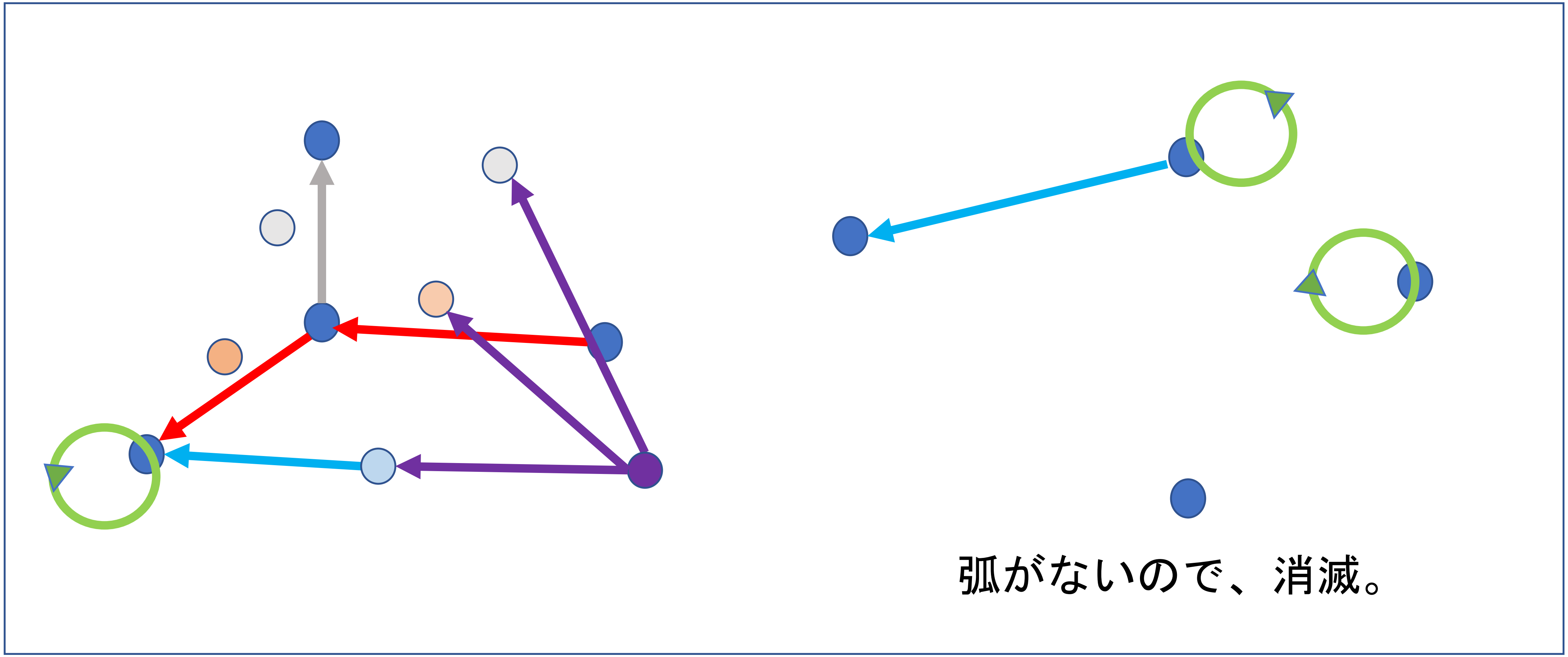
過程1：弧に頂点を対応させる。



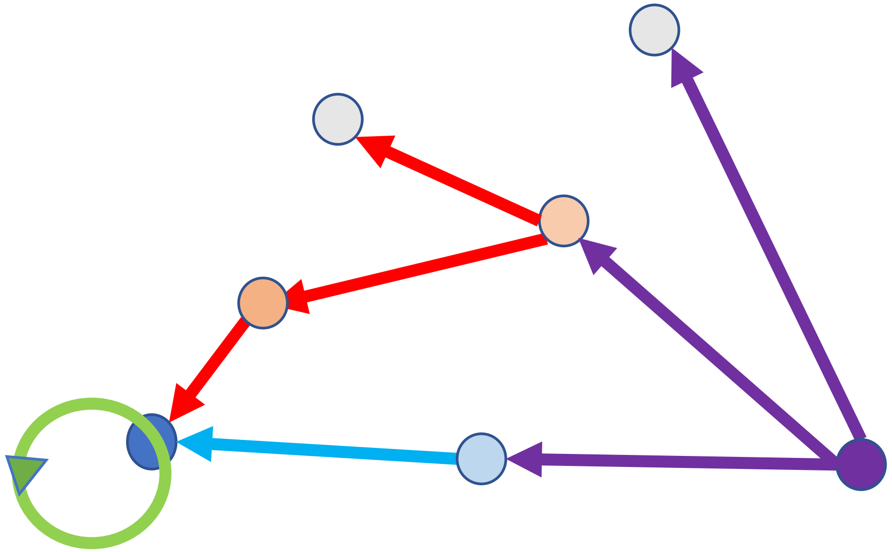
過程２：長さが２のパスになっている弧同士をみつけ、
それらに対応する新しい頂点同士にパスと同じ方向の弧を描く。

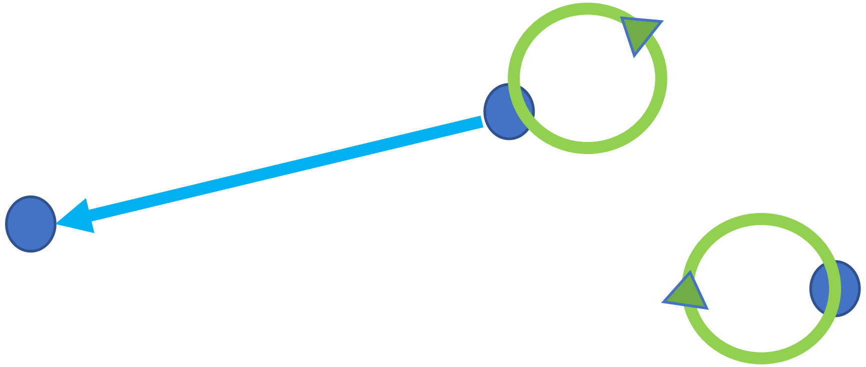


過程３：ループ（サイクル）は、左右どちら向きの弧も含むので、
端点を共有するどんな弧とも、L（D）で隣接する弧を含む。



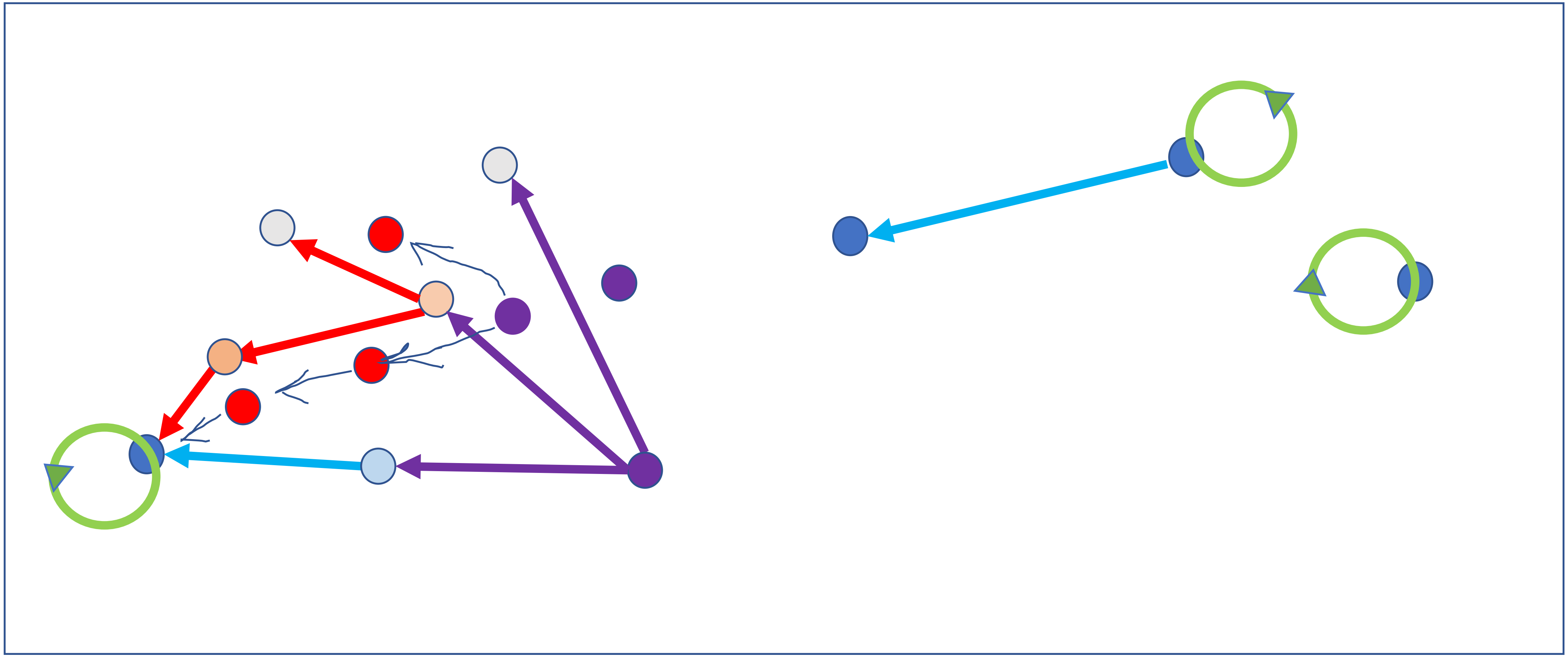
A nonsettled digraph D^1



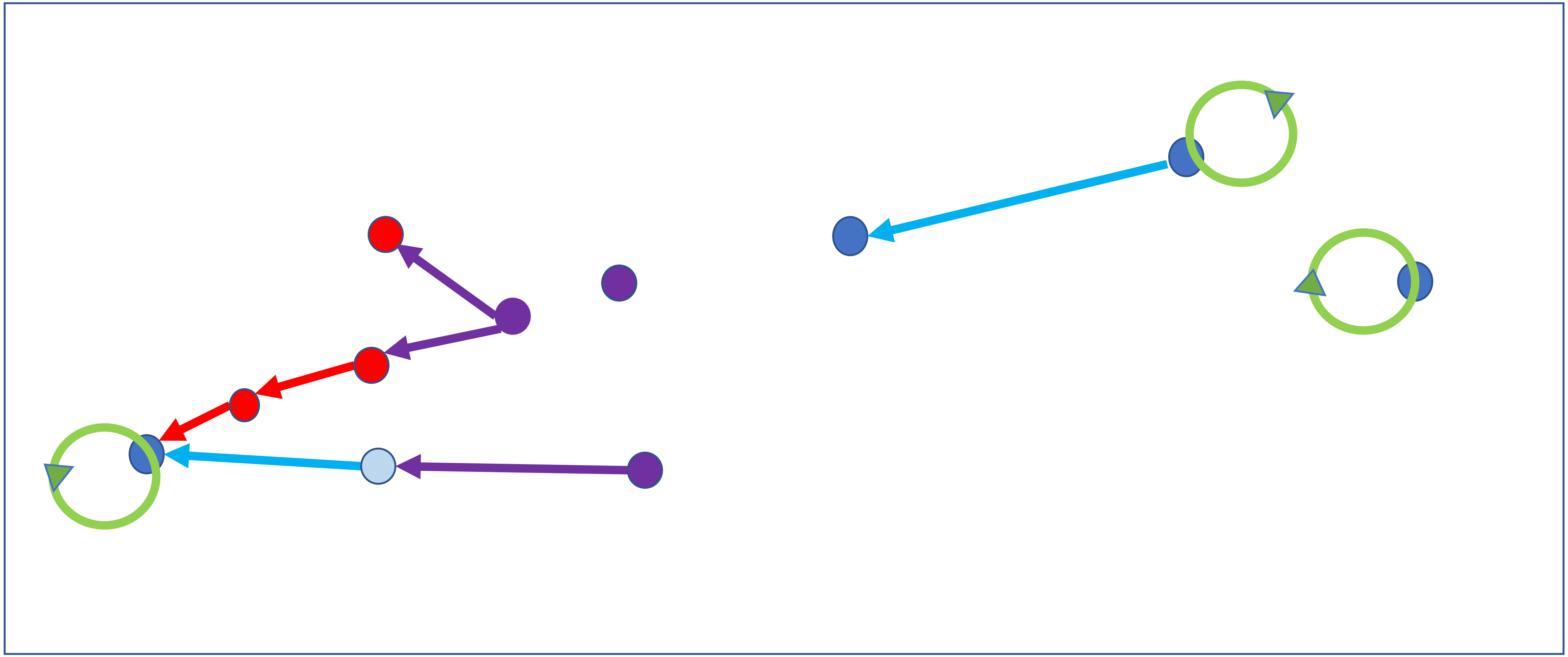


まだ、セトルしていない。
二つのタンジェントの共通部分とサイクルの距離が、距離１だけ遠のいたことに注目。

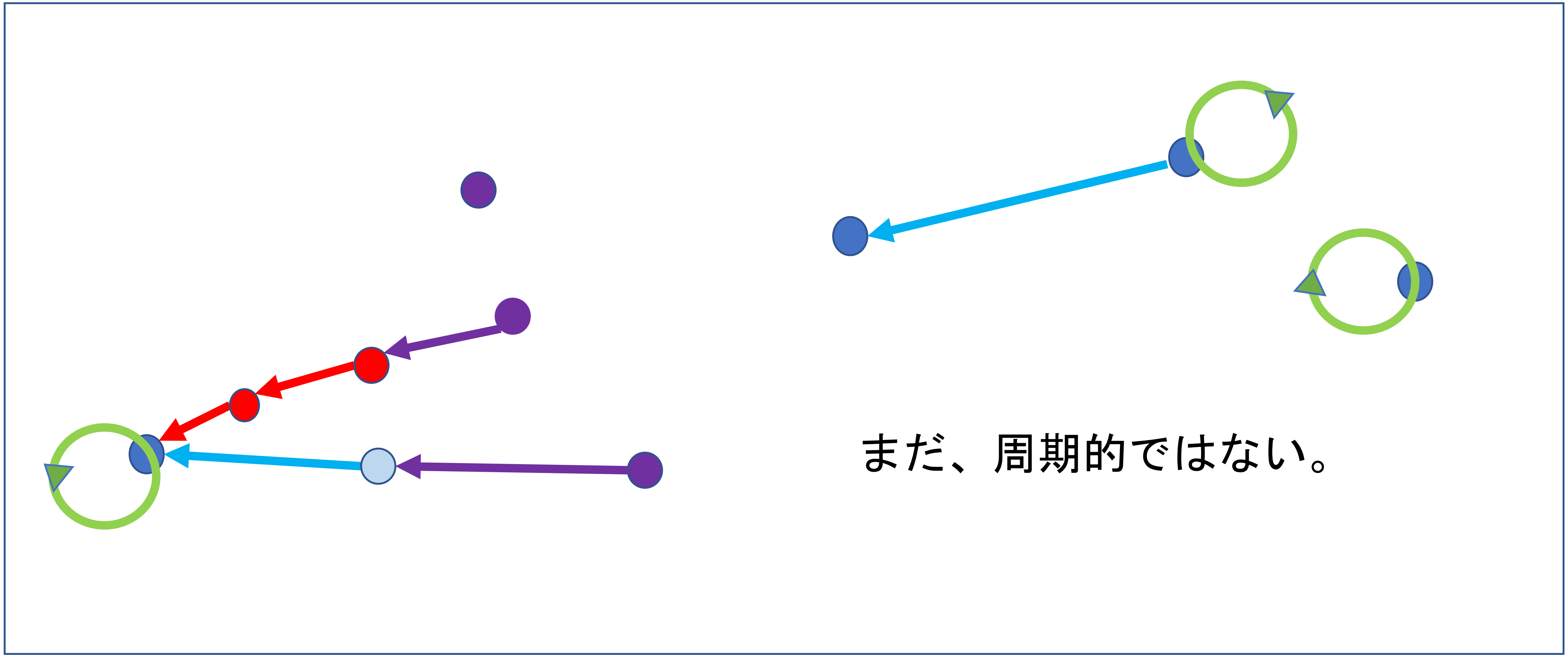
A nonsettled digraph D^1



A settled digraph D^2

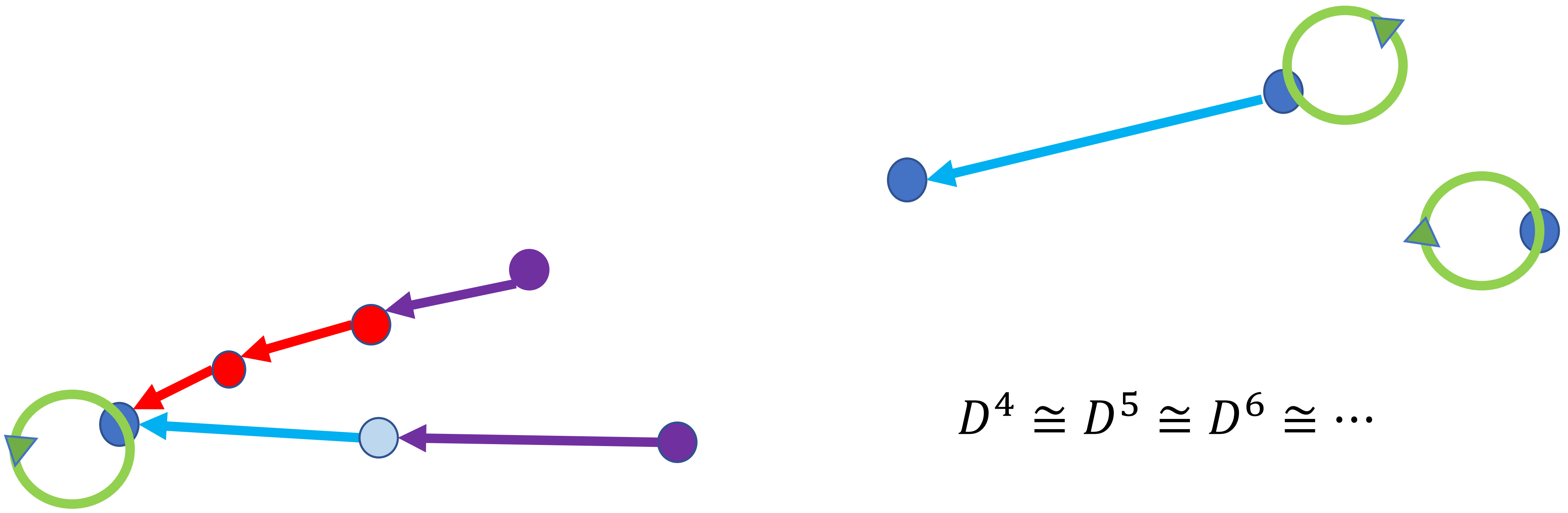


Another settled digraph D^3



まだ、周期的ではない。

A periodic digraph D^4

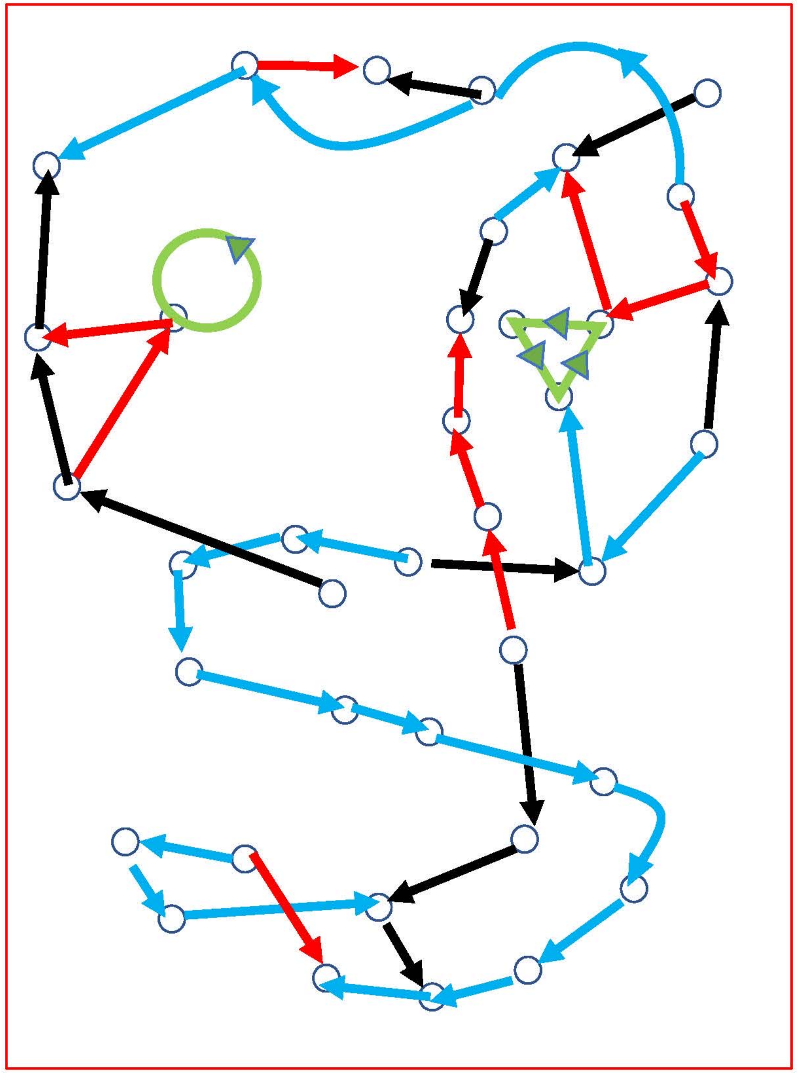


$$D^4 \cong D^5 \cong D^6 \cong \cdots$$

波

サイクルは、緑色

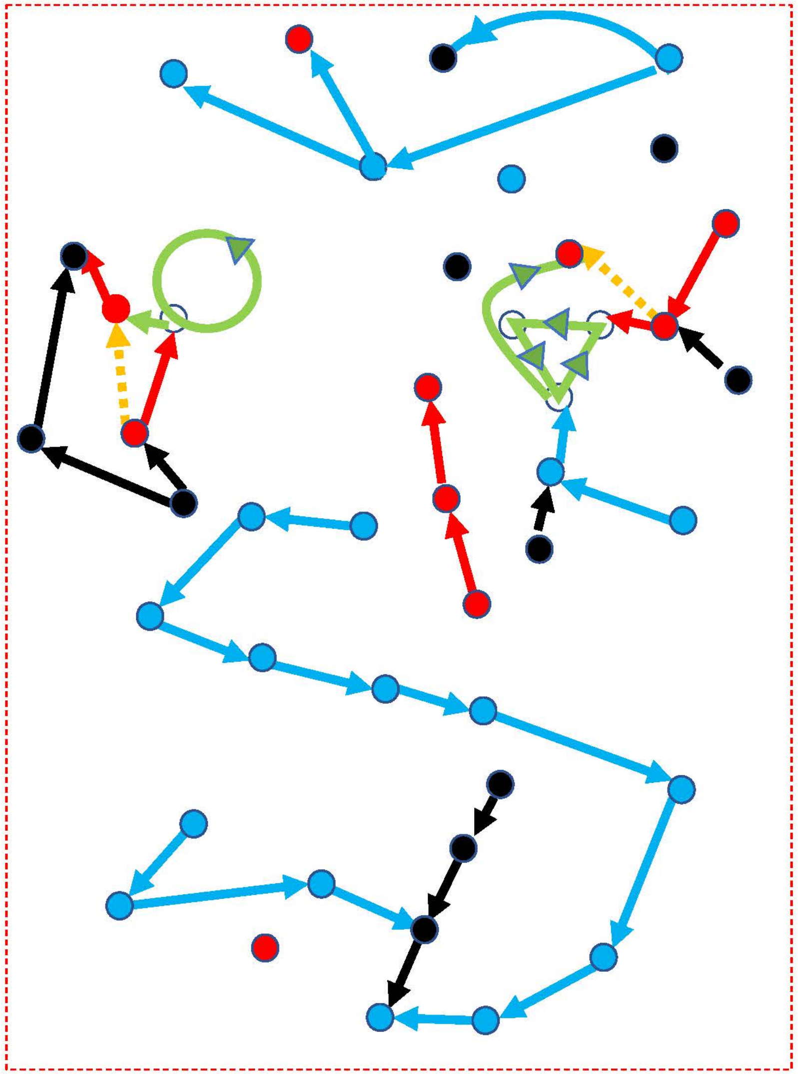
サイクル以外のDを極大パスの分割とみて、距離の近い極大パス同士は別の色に染色し、ライングラフの計算がしやすいようにした。

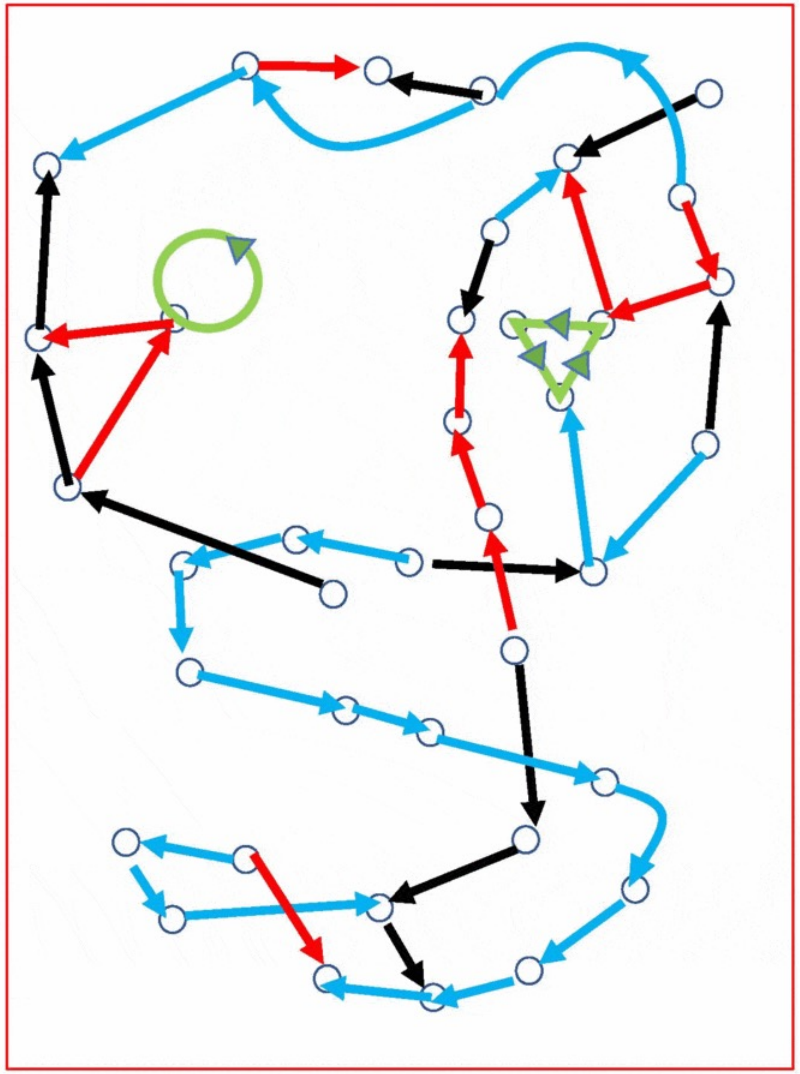


一つのサイクル内に、正負のタンジェントが共存しているとその軌道に波が発生する。

サイクルとタンジェントのセトル具合はどうでしょう？

これは、D^1
頂点の色は、弧の
色を反映した





Theorem

Let πD be the set of all maximal paths in *D* and $\lambda^*(\pi D^*)$ be the length of the longest path in $D¥\bigcup_{C \in C_D} \tan(C)$ and let
$M_D := \min\{kn_C : k \in \mathbb{N}, C \in C_D \ and \ kn_C \geq \max\{2\lambda^*(\mathcal{N}_C^- \cup \mathcal{N}_C^+), \lambda^*(\pi D^*)\}\}$.

The graph D^{M_D} is periodic.

Hence if there exists a D_0 with $D_0^{MD_0} \cong D$, i.e.,
if some D^{-M_D} exists, then D is periodic.

サイクルたちの長さ、それぞれの正負のタンジェントのうち最長の長さ、タンジェントと交わらない最長のパスの長さによって周期性をもつまでに多くても、何回ライン作用素を施せばよいか、計算できる。

応用:

They are helpful for analyzing the DNA sequences or human genome.
A digraph D' is called a DNA graph if there exists a digraph D such that $D' = L(D)$, i.e. D' has a pre-image of L-operator.

ライン作用素の軌跡を研究することは、
遺伝子の研究につながっていくだけでなく
NP-Hardな問題を、やさしい問題に変換して解く
道具としても利用できる。

References

[1] M. Aigner, On the Linegraph of a Directed Graph, *Math. Zeitschr.* **102**, (1967), 56-61.

[2] L.W. Beineke, On derived graphs and digraphs, *Beitrage Zur Graphentheorie*, Ed. H. Sachs, H.J. Voss, H. Walther, Teubner, Leipzig, 1968, 17-23.

[3] L.W. Beineke and C.M. Zamfirescu, Connection Digraphs and Second-Order Line Digraphs, *Discrete Math.* **39**, (1982), 237-254.

[4] C. Berge, *Theorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958; *The theory of graphs and its applications* , John Wiley & Sons, New York, 1962.

[5] R. Diestel, *Graph Theory*, 4th Edition, Springer, Heidelberg, 2010.

[6] F. Harary and R.Z. Norman, Some properties of line digraphs, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **9** (2), (1960), 161-169.

[7] R. L. Hemminger, Digraphs with periodic line digraphs, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **9**, (1974), 27-31.

[8] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2nd Edition, Prentice-Hall, NJ, 2001.

Thank you.