写像の第二基本形式から定まる積分不変量に関する変分問題

秋山 梨佳 (東京都立大学)
joint work with 酒井高司 (東京都立大学), 佐藤雄一郎 (工学院大学)

arxiv:2204.10538v2

2022 年 9 月 20 日
第 5 回 岡潔女性数学者セミナー

はじめに

幾何学の分野では，**多様体**という平面や空間内の図形を高次元化したものを扱う．

多様体を扱う研究の問題意識 (の一つ):

多様体が複数あった時，それらが同じ形になっているか否かを判定する．

$\rightsquigarrow$ ここで鍵となるのが**不変量** (ex. 種数).

本研究のキーワード

- 部分多様体：

  平面内のなめらかな曲線や，空間内の曲線/曲面などを高次元化したもの.

- 部分多様体の不変量：

  部分多様体に対し定まり，外空間の等長変換で不変な量.

- 写像の不変量：

  Riemann 多様体間の写像に対し定まり，定義域と値域の等長変換で不変な量.

部分多様体を考えることは，写像として等長はめ込みを考えることと同値である.

調和/二重調和写像の理論 (写像の変分問題)

$(M^m, g_M), (N^n, g_N)$: Riemann 多様体, $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$; C^∞ 級写像.

· φ が**調和写像**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ はエネルギー汎関数 $E(\varphi) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |d\varphi|^2 d\mu_{g_M}$ の臨界点.

$\Longleftrightarrow \tau(\varphi) = \mathrm{tr}_{g_M} \nabla d\varphi = 0.$

· φ が**二重調和写像**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ は二重エネルギー汎関数 $E_2(\varphi) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |\tau(\varphi)|^2 d\mu_{g_M}$ の臨界点.

$\Longleftrightarrow \tau_2(\varphi) = -\overline{\nabla}^* \overline{\nabla} \tau(\varphi) - \mathrm{tr}_{g_M} \left(R^N(d\varphi(\cdot), \tau(\varphi))d\varphi(\cdot)\right) = 0.$

- 調和写像 $\Rightarrow$ 二重調和写像.
- 二重調和写像の理論に, B. -Y. Chen 氏により提唱されたある予想があり現在もなお未解決の問題として残されている.

部分多様体の第二基本形式から定まる積分不変量 (積分幾何)

部分多様体の不変量の一つとして, Howard 氏により次が定義された.

Definition (Howard 1993)

G/K: 等質空間, M: G/K の V_0 型コンパクト部分多様体.
このとき, 部分多様体 M に対し

$$I^{\mathcal{P}}(M) := \int_M \mathcal{P}(h_x^M)\, d\mu_{g_M},$$

と定める. ここで h^M は M の第二基本形式, $\mathcal{P}$ は h^M に関する不変多項式としている.

$\rightsquigarrow$ 部分多様体の**第二基本形式**: 部分多様体の外在的な性質を表す量.

$\rightsquigarrow$ 部分多様体の第二基本形式から定まる積分不変量に関し,
一般化された Gauss–Bonnet の定理や部分多様体の共形不変量など
積分幾何の分野で様々な結果が得られている.

Today's topic

motivation :

積分幾何の観点から見たよい積分不変量は,

写像の変分問題においてよいエネルギー汎関数となるのではないか.

In this talk :

まず積分幾何のアイデアを用いて, Riemann 多様体間の写像 φ に対し,
写像の第二基本形式を用いて積分不変量を定める.
次に, 二重エネルギー汎関数を含むように,
第二基本形式に関する 2 次の斉次多項式から定まる積分不変量の族を構成し,
その族に対し第一変分公式を導出する.

$\to$ 特異な性質を持つエネルギー汎関数を見出すことができた.

Contents

1. Riemann 多様体間の写像に対する積分不変量の定義.
2. $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数の導入とそれぞれの第一変分公式.
3. Chern–Federer エネルギー汎関数の導入とその Euler–Lagrange 方程式.
4. Chern–Federer 写像の具体例.

Setting

- $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n) := \{H : \mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n \ ;\ $対称双線形形式$\}$,
  $G := O(m) \times O(n)$.
  $\rightsquigarrow G \curvearrowright \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n) \overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall g = (a, b) \in G,\ {}^\forall H \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$
  $$(gH)(u, v) := b\big(H(a^{-1}u, a^{-1}v)\big) \qquad (u, v \in \mathbb{E}^m)$$
  $\rightsquigarrow \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 作用で不変な関数 $\mathcal{P}$ を考える.
  $$\text{i.e.} \quad \mathcal{P}(gH) = \mathcal{P}(H),\ \ {}^\forall g \in G, {}^\forall H \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$$

- $(M^m, g_M), (N^n, g_N)$: Riemann 多様体, $\varphi : M \to N$; C^∞ 写像.
- 写像 φ の第二基本形式は対称双線形形式;
  $$\widetilde{\nabla} d\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$
  であり, 次で定義される.
  $$(\widetilde{\nabla} d\varphi)(X, Y) := \overline{\nabla}_X\big(d\varphi(Y)\big) - d\varphi(\nabla_X Y) \quad (X, Y \in \Gamma(TM)).$$

各点 $x \in M$ に対し, $T_x M$ と $\mathbb{E}^m$, $T_{\varphi(x)} N$ と $\mathbb{E}^n$ をそれぞれ同一視することで, $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ と $T_x M \odot T_x M \otimes T_{\varphi(x)} N$ の間に線形同型な対応を作ることができる.

つまり, $(\widetilde{\nabla} d\varphi)_x \in T_x M \odot T_x M \otimes T_{\varphi(x)} N$ に対し $H_x := (h^\alpha_{ij}) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ を対応させる. ここで

$$h^\alpha_{ij} = g_N \left((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x (e_i, e_j), \xi_\alpha \right)$$

としている. $\{e_i\}_{i=1}^m$ は $T_x M$ の, $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ は $T_{\varphi(x)} N$ の正規直交基底である.

$\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 不変な関数 $\mathcal{P}$ に対し, <u>写像 φ の第二基本形式の不変関数 $\mathcal{P}$</u> を次で定める.

$$\mathcal{P}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) := \mathcal{P}(H_x)$$

Definition (写像の第二基本形式から定まる積分不変量)

(M^m, g_M): m 次元 Riemann 多様体, (N^n, g_N): n 次元 Riemann 多様体,
$\mathcal{P}$: $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 不変な関数 とする．このとき，なめらかな写像
$\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し，<u>$\mathcal{P}$ に関する φ の積分不変量</u> を次で定める．

$$I^{\mathcal{P}}(\varphi) := \int_M \mathcal{P}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M}.$$

Remark

$I^{\mathcal{P}}(\varphi)$ は写像 φ の不変量になっている．
実際，任意の $f \in \mathrm{Isom}(M)$ と $g \in \mathrm{Isom}(N)$ に対し次が成り立つ．

$$I^{\mathcal{P}}(g \circ \varphi \circ f^{-1}) = I^{\mathcal{P}}(\varphi)$$

Definition (多項式 $\mathcal{Q}_1$, 多項式 $\mathcal{Q}_2$)

$H = (h^\alpha_{ij}) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し, 多項式 $\mathcal{Q}_1$と多項式 $\mathcal{Q}_2$を次で定める.

$$\mathcal{Q}_1(H) = \sum_\alpha \sum_{i,j} (h^\alpha_{ij})^2, \quad \mathcal{Q}_2(H) = \sum_\alpha \Big(\sum_i h^\alpha_{ii} \Big)^2.$$

h^α_{ij} は $\mathbb{E}^m$ と $\mathbb{E}^n$ にそれぞれ正規直交基底を取った時の成分表示としている.

Note 多項式 $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ はそれぞれ G 不変な 2 次の斉次多項式である.

Proposition

$\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 不変な 2 次斉次多項式全体は多項式 $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ で張られる.

Remark

φ を Riemann 多様体間のなめらかな写像とすると次が成り立つ.

$$\mathcal{Q}_1\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) = |\widetilde{\nabla} d\varphi|^2(x), \quad \mathcal{Q}_2\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) = |\mathrm{tr}_{g_M}(\widetilde{\nabla} d\varphi)|^2(x)$$

Definition ($\mathcal{Q}_1$ 写像, $\mathcal{Q}_2$ 写像)

$\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し,
<u>$\mathcal{Q}_1$ エネルギー汎関数</u>と<u>$\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数</u>をそれぞれ次で定める.

$$I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi) = \int_M \mathcal{Q}_1\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M} = \int_M |\widetilde{\nabla} d\varphi|^2 d\mu_{g_M},$$
$$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi) = \int_M \mathcal{Q}_2\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M} = \int_M |\mathrm{tr}_{g_M}(\widetilde{\nabla} d\varphi)|^2 d\mu_{g_M}.$$

このとき, $I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi)$ の臨界点を<u>$\mathcal{Q}_1$ 写像</u>, $I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi)$ の臨界点を<u>$\mathcal{Q}_2$ 写像</u>と呼ぶ.

Note $\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数は 2 倍の二重エネルギー汎関数と一致する.

$$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi) = \int_M |\mathrm{tr}_{g_M}(\widetilde{\nabla} d\varphi)|^2 d\mu_{g_M} = \int_M |\tau(\varphi)|^2 d\mu_{g_M} = 2E_2(\varphi)$$

$\widetilde{\nabla}^2 d\varphi \in \Gamma\big(\bigotimes^3 T^*M \otimes \varphi^{-1}TN\big)$ と $\widetilde{\nabla}^3 d\varphi \in \Gamma\big(\bigotimes^4 T^*M \otimes \varphi^{-1}TN\big)$ は
それぞれ次で定義される.

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(X,Y,Z) &:= \overline{\nabla}_X\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(Y,Z)\big) - (\widetilde{\nabla} d\varphi)(\nabla_X Y, Z) \\
&\quad - (\widetilde{\nabla} d\varphi)(Y, \nabla_X Z) \\
(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(X,Y,Z,W) &:= \overline{\nabla}_X\big((\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(Y,Z,W)\big) - (\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(\nabla_X Y, Z, W) \\
&\quad - (\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(Y, \nabla_X Z, W) - (\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(Y, Z, \nabla_X W)
\end{aligned}
$$

ここで $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ としている.

Note 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(X,Y,Z) &= \big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(X,Z,Y) \\
\big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(X,Y,Z,W) &= \big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(X,Y,W,Z)
\end{aligned}
$$

Theorem ($\mathcal{Q}_1$ エネルギーと $\mathcal{Q}_2$ エネルギーの第一変分公式)

(M^m, g_M) をコンパクト Riemann 多様体, (N^n, g_N) を Riemann 多様体とし, $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ をなめらかな写像とする．また, $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ を φ のなめらかな変分, $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ を変分ベクトル場とする．このとき次が成り立つ．

$$\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_i}(\varphi_t)\bigg|_{t=0} = 2\int_M \langle W_i(\varphi), V\rangle \, d\mu_{g_M} \qquad (i = 1, 2)\,.$$

ここで, $W_1(\varphi)$ と $W_2(\varphi)$ はそれぞれ

$$W_1(\varphi) = \sum_{i,j} \Big\{ (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(e_i, e_j, e_i, e_j) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_j), d\varphi(e_i)\big) d\varphi(e_j) \Big\}$$

$$W_2(\varphi) = \sum_{i,j} \Big\{ (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(e_i, e_i, e_j, e_j) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) \Big\}$$

で定められる．また, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場とする．

Theorem ($\mathcal{Q}_1$ エネルギーと $\mathcal{Q}_2$ エネルギーの第一変分公式)

(M^m, g_M) をコンパクト Riemann 多様体, (N^n, g_N) を Riemann 多様体とし, $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ をなめらかな写像とする．また, $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ を φ のなめらかな変分, $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ を変分ベクトル場とする．このとき次が成り立つ．

$$\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_i}(\varphi_t)\bigg|_{t=0} = 2\int_M \langle W_i(\varphi), V\rangle \, d\mu_{g_M} \qquad (i = 1, 2) \, .$$

ここで, $W_1(\varphi)$ と $W_2(\varphi)$ はそれぞれ

$$W_1(\varphi) = \sum_{i,j} \Big\{ (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(e_i, e_j, e_i, e_j) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_j), d\varphi(e_i)\big) d\varphi(e_j) \Big\}$$

$$W_2(\varphi) = \sum_{i,j} \Big\{ (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(e_i, e_i, e_j, e_j) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) \Big\}$$

で定められる．また, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場とする．

証明に用いる補題 ($\mathcal{Q}_1$ エネルギーの場合)

φ のなめらかな変分 $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ を考えることで, 次の写像 Φ が得られる.

$$\Phi : M \times I \to N,\ (x,t) \mapsto \Phi(x,t) =: \varphi_t(x) \quad \text{s.}t.\ \ \varphi_0(x) = \varphi(x) \quad ({}^\forall x \in M)$$

また, 変分ベクトル場 V は次式であらわせる.

$$V = d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \right) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

$\{e_i\}_{i=1}^m$ で $x \in M$ の近傍 U 上の局所正規直交枠場をあらわすとると,
$\left\{e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right\}$ は $(x,t) \in M \times I$ の近傍 $U \times I$ 上の正規直交枠場となる.
このとき次が成り立つ.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i = \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (1 \le i \le m)$$

先述の設定の下, 写像 φ のなめらかな変分 $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ に対し, 次の補題が成り立つ.

Lemma

$$\frac{d}{dt}I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi_t) = 2\int_M \sum_{i,j}\left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_j, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}$$
$$- 2\int_M \sum_{i,j}\left\langle R^N\left(d\Phi(e_i), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) d\Phi(e_j), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}$$

Lemma

$$\int_M \sum_{i,j}\left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_j, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}$$
$$= \int_M \sum_{i,j}\left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), (\widetilde{\nabla}^3 d\Phi)(e_i, e_j, e_i, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}$$

証明に用いる補題 ($\mathcal{Q}_2$ エネルギーの場合)

Lemma

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi_t) &= 2 \int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi) \left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t} \right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M} \\
&\quad - 2 \int_M \sum_{i,j} \left\langle R^N \left(d\Phi(e_i), d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) d\Phi(e_i), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}
$$

Lemma

$$
\begin{aligned}
&\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi) \left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t} \right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M} \\
&= \int_M \sum_{i,j} \left\langle d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\widetilde{\nabla}^3 d\Phi)(e_i, e_i, e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}
$$

二重エネルギー汎関数の第一変分公式の導出の際は, 次の補題を用いている.

Lemma (Jiang 2009)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t) \\
&= 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right) - (\widetilde{\nabla} d\Phi)\left(\nabla_{e_i} e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M} \\
&\quad - 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle R^N\left(d\Phi(e_i), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) d\Phi(e_i), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}$$

Lemma (Jiang 2009)

$$\begin{aligned}
&\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right) - (\widetilde{\nabla} d\Phi)\left(\nabla_{e_i} e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M} \\
&= \int_M \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), (\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i})(\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}$$

Sec. 2 - $\mathcal{Q}_1,\ \mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数の第一変分公式 (8/9)

二重エネルギー汎関数の第一変分公式の導出の際は, 次の補題を用いている.

Lemma (Jiang 2009)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t)\\
&= 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right) - (\widetilde{\nabla} d\Phi)\left(\nabla_{e_i} e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}\\
&\quad - 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle R^N\left(d\Phi(e_i), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) d\Phi(e_i), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}
$$

Lemma (Jiang 2009)

$$
\begin{aligned}
&\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right) - (\widetilde{\nabla} d\Phi)\left(\nabla_{e_i} e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}\\
&= \int_M \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), (\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i})(\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}
$$

Jiang 氏の導出した二重エネルギー汎関数の第一変分公式と,
$\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数の第一変分公式を比較することで次を得た.

Proposition

$\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ を Riemann 多様体間のなめらかな写像とする.
このとき次が成り立つ.

$$-\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\tau(\varphi) = \sum_{i,j} \big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(e_i, e_i, e_j, e_j)$$

ここで $-\overline{\nabla}^*\overline{\nabla} := \sum_k \big(\overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k} - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_k}e_k}\big)$ は疎ラプラシアン,
$\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場としている.

Definition (Chern–Federer 多項式)

$H=(h^\alpha_{ij})\in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m,\mathbb{E}^n)$ に対し, 2 次の Chern–Federer 多項式を次で定める.

$$\mathrm{CF}(H):=\mathcal{Q}_2(H)-\mathcal{Q}_1(H).$$

Definition (Chern–Federer エネルギー, Chern–Federer 写像)

$\varphi\in C^\infty(M,N)$ に対し, Chern–Federer エネルギー汎関数を次で定める.

$$I^{\mathrm{CF}}(\varphi)=\int_M \mathrm{CF}\big((\widetilde{\nabla}d\varphi)_x\big)d\mu_{g_M}.$$

このとき, $I^{\mathrm{CF}}(\varphi)$ の臨界点をChern–Federer 写像と呼ぶ.

Definition (Willmore–Chen 多項式)

$H = (h_{ij}^{\alpha}) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し, Willmore–Chen 多項式を次で定める.

$$\mathrm{WC}(H) := m\mathcal{Q}_1(H) - \mathcal{Q}_2(H).$$

Definition (Willmore–Chen エネルギー, Willmore–Chen 写像)

$\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し, Willmore–Chen エネルギー汎関数を次で定める.

$$I^{\mathrm{WC}}(\varphi) = \int_M \mathrm{WC}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M}.$$

このとき, $I^{\mathrm{WC}}(\varphi)$ の臨界点をWillmore–Chen 写像と呼ぶ.

$\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ を C^∞ 級写像,
α と β を $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ を満たす定数とする．このとき写像 φ が

$$\alpha W_1(\varphi) + \beta W_2(\varphi) = 0$$

を満たすとき, $(\alpha \mathcal{Q}_1 + \beta \mathcal{Q}_2)$ 写像と呼ぶことにする.

$(\alpha \mathcal{Q}_1 + \beta \mathcal{Q}_2)$ 写像に対し, それぞれ以下が成り立つ.

1. $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ のとき φ は $\mathcal{Q}_1$ 写像；
2. $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ のとき φ は $\mathcal{Q}_2$ 写像；
3. $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$ のとき φ は Chern–Federer 写像；
4. $(\alpha, \beta) = (m, -1)$ のとき φ は Willmore–Chen 写像.

Proposition (Chern–Federer エネルギーの Euler–Lagrange 方程式の表示)

なめらかな写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ が Chern–Federer 写像であることの必要十分条件は, 次が成り立つことである.

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i,j} \Big\{ &(\nabla R^N)\big(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) - \big(\widetilde{\nabla} d\varphi\big)\big(e_i, R^M(e_i, e_j)e_j\big) \\ &- d\varphi\big((\nabla R^M)(e_i, e_i, e_j)e_j\big) + 2R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) \\ &+ 2R^N\big(d\varphi(e_i), (\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_j)\big) d\varphi(e_j) \Big\}. \end{aligned}$$

ここで, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場としている.

Note Chern–Federer エネルギー $I^{\mathrm{CF}}(\varphi)$ の Euler–Lagrange 方程式は, φ に関する 2 階の偏微分方程式になっていることがわかる.

Recall 二重エネルギー汎関数の EL 方程式は次のものであった.

$$\tau_2(\varphi) = -\overline{\nabla}^* \overline{\nabla} \tau(\varphi) - \mathrm{tr}_{g_M} \big(R^N(d\varphi(\cdot), \tau(\varphi)) d\varphi(\cdot)\big) = 0$$

先の命題の証明には次の 2 つの補題を使う.

Lemma

なめらかな写像 $\varphi : M \to N$ と $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ に対し, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(X, Y, Z) - \big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(Y, X, Z) \\
&= R^N\big(d\varphi(X), d\varphi(Y)\big)d\varphi(Z) - d\varphi(R^M(X, Y)Z)
\end{aligned}
$$

Lemma

なめらかな写像 $\varphi : M \to N$ と $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ に対し, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(X, Y, Z, W) - \big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(X, Z, Y, W) \\
&= \big(\nabla R^N\big)\big(d\varphi(X), d\varphi(Y), d\varphi(Z)\big)d\varphi(W) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(X, Y), d\varphi(Z)\big)d\varphi(W) \\
&\quad + R^N\big(d\varphi(Y), (\widetilde{\nabla} d\varphi)(X, Z)\big)d\varphi(W) + R^N\big(d\varphi(Y), d\varphi(Z)\big)(\widetilde{\nabla} d\varphi)(X, W) \\
&\quad - (\widetilde{\nabla} d\varphi)\big(X, R^M(Y, Z)W\big) - d\varphi\big((\nabla R^M)(X, Y, Z)W\big)
\end{aligned}
$$

Note Chern–Federer エネルギーは次のようにあらわすことができる.

$$\begin{aligned} I^{\mathrm{CF}}(\varphi) &= I^{\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1}(\varphi) \\ &= \int_M \mathcal{Q}_2\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) - \mathcal{Q}_1\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M} \\ &= \int_M \sum_\alpha \Big(\sum_i h^\alpha_{ii}\Big)^2 - \sum_\alpha \sum_{i,j} (h^\alpha_{ij})^2 d\mu_{g_M} \\ &= \int_M \sum_\alpha \sum_{i,j} \det \begin{pmatrix} h^\alpha_{ii} & h^\alpha_{ij} \\ h^\alpha_{ij} & h^\alpha_{jj} \end{pmatrix} d\mu_{g_M}. \end{aligned}$$

Theorem (Chern–Federer エネルギーの Euler–Lagrange 方程式の別表示)

なめらかな写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ が Chern–Federer 写像であることの必要十分条件は次が成り立つことである.

$$C(\mu + \nu) = 0,$$

ここで C は

$$C := \det \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{24} & C_{34} \end{pmatrix},$$

であり C_{ij} は縮約としている. また, μ, ν はそれぞれ以下で定められる, $\varphi^{-1}TN$ に値を持つ $(0,4)$ 型のテンソル場である.

$$\mu(X_1, X_2, X_3, X_4) := (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(X_1, X_2, X_3, X_4),$$
$$\nu(X_1, X_2, X_3, X_4) := R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(X_3, X_4), d\varphi(X_1)\big) d\varphi(X_2)$$

ただしここで $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ としている.

Setting

- (M^m, g_M): Riemann 多様体, Q: (M^m, g_M) の Ricci 作用素.
- $N^n(c)$: 断面曲率が $c \in \mathbb{R}$ である Riemann 空間形.
- $\varphi : (M^m, g_M) \to N^n(c)$; 等長はめ込み.
- $\mathcal{H}$: 平均曲率ベクトル場, h: 第二基本形式,

Theorem

上述の設定の下,

φ が Chern–Federer 写像であることの必要十分条件は次が成り立つことである.

$$-d\varphi(\mathrm{tr}_{g_M}(\nabla Q)) + 2cm(m-1)\mathcal{H} - \mathrm{tr}_{g_M} h(Q(\text{-}), \text{-}) = 0.$$

また, 以下と同値である.

$$(\top) : \mathrm{tr}_{g_M}(\nabla Q) = 0, \quad (\perp) : 2cm(m-1)\mathcal{H} - \mathrm{tr}_{g_M} h(Q(\text{-}), \text{-}) = 0,$$

ここで $(\top)$ と $(\perp)$ はそれぞれ接成分と法成分をあらわすとする.

Example

(M^m, g_M) が Ricci-flat な Riemann 多様体ならば,
任意の等長はめ込み $\varphi : (M^m, g_M) \to \mathbb{E}^n$ は Chern–Federer 写像である.

Example (曲線の場合)

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とする.
このとき, 任意の曲線 $\gamma : I \to (N^n, g_N)$ は Chern–Federer 写像である.

Proposition (曲面の場合)

$\varphi : (M^2, g_M) \to N^n(c)$ を等長はめ込みとし, K を (M^2, g_M) の断面曲率とする.
このとき, φ が Chern–Federer 写像であることの必要十分条件は次のいずれかが成り立つときである.

(i) K が定数かつ φ が極小, または (ii) $K = 2c$.

超曲面 (特に等径超曲面) の場合

Definition

$M^m \subset (N^n, g_N)$ を Riemann 部分多様体とする.
このとき, M^m が Chern–Federer であるとは,
包含写像 $i : (M^m, i^* g_N) \to (N^n, g_N)$ が Chern–Federer 写像であることと定める.

Theorem

$M^m \subset N^{m+1}(c)$ を Riemann 空間形内の等径超曲面, A をその形作用素とする.
このとき M^m が Chern–Federer 部分多様体であるための必要十分条件は, 次が成り立つことである.

$$c(m-1)(\mathrm{tr}A) - (\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}A^2) + (\mathrm{tr}A^3) = 0$$

単位球面 $\mathbb{S}^{m+1}(1)$ 内の等質な等径超曲面の例をいくつか紹介する.

g : 等径超曲面の相異なる主曲率の個数

$g = 1$ の場合, 分類として次の全臍的超曲面がある.

$$\mathbb{S}^m(r) = \left\{ (x, \sqrt{1-r^2}) \in \mathbb{E}^{m+2} \mid \|x\|^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{S}^{m+1}(1) \quad (0 < r \leq 1)$$

このとき次を得る.

Proposition

上式の等径超曲面が Chern–Federer であることの必要十分条件は,
$r = 1$ (全測地的超曲面) または
$r = 1/\sqrt{2}$ (proper な二重調和超曲面) となることである.

以下, 等径超曲面 $M^m \subset \mathbb{S}^{m+1}(1)$ の最大主曲率を

$$\lambda = \cot t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{g}\right)$$

とする. $g = 2$ の場合, 分類として次の Clifford 超曲面がある.

$$\mathbb{S}^p(r_1) \times \mathbb{S}^{m-p}(r_2) \subset \mathbb{S}^{m+1}(1) \quad (r_1^2 + r_2^2 = 1)$$

このとき次を得る.

Proposition

上式の等径超曲面が Chern–Federer であることの必要十分条件は,
λ が次式を満たすことである.

$$\begin{aligned} &p(p-1)\lambda^6 - p(2m-p-1)\lambda^4 \\ &\qquad + (m-p)(m+p-1)\lambda^2 - (m-p)(m-p-1) = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&p(p-1)\lambda^6 - p(2m-p-1)\lambda^4 \\
&\qquad + (m-p)(m+p-1)\lambda^2 - (m-p)(m-p-1) = 0
\end{aligned}
$$

先の方程式の解は次の通り:

(i) $m = 2$, $p = 1$ のとき, $\lambda = 1$ (極小 Clifford トーラス).

(ii) $m \geq 3$, $p = 1$ のとき,

$\lambda = 1$ (二重調和) または $\lambda = \sqrt{\frac{m-2}{2}}$(二重調和でない).

(iii) $m \geq 3$, $p \geq 2$ のとき,

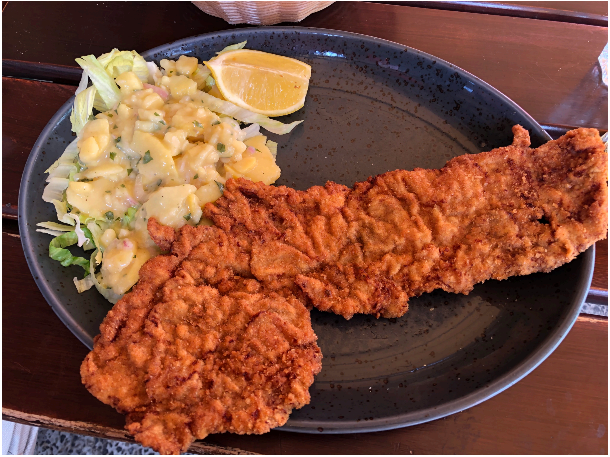
$\lambda = 1$ (二重調和) または $\lambda = \sqrt{\frac{p(m-p) \pm \sqrt{p(m-p)(m-1)}}{p(p-1)}}$ (二重調和でない).

今後の展望について

今後の研究の方向性として以下のことを考えている.

- 変分問題の観点からの研究を更に進める.
- 写像の積分不変量の幾何的性質を明らかにする.
- 可積分系の観点から Chern–Federer 写像について研究を進める.

＼ご清聴いただきありがとうございました／



[1] C. B. Allendoerfer and A. Weil, *The Gauss–Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 101–129.

[2] R. L. Bryant, *Minimal surfaces of constant curvatures in* S^n, Trans. Amer. M. S. **290** (1985), 259–271.

[3] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Geometry of hypersurfaces*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2015.

[4] B.-Y. Chen, *An invariant of conformal mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 563–564.

[5] B.-Y. Chen, *Some conformal invariants of submanifolds and their applications*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 380–385.

[6] B.-Y. Chen, *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*, World Scientific, (2011).

Reference II

[7] B.-Y. Chen, *Recent developments in δ-Casorati curvature invariants*, Turkish J. Math. **45** (2021), no. 1, 1–46.

[8] R. Howard, *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, 1993.

[9] T. Ichiyama, J. Inoguchi and H. Urakawa, *Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields*, Note Mat. **28** (2009), [2008 on verso], suppl. 1, 233–275.

[10] G. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*. Translated from the Chinese by Hajime Urakawa. Note Mat. **28** (2009), [2008 on verso], suppl. 1, 209–232.

Reference III

[11] H. J. Kang, T. Sakai and Y. J. Suh, *Kinematic formulas for integral invariants of degree two in real space forms*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), no. 5, 1499–1519.

[12] Y. Kitagawa, *Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in* S^3, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), no. 3, 457–476.

[13] Y. Kitagawa, *Isometric deformations of flat tori in the 3-sphere with nonconstant mean curvature*, Tohoku Math. J. (2) **52** (2000), no. 2, 283–298.

[14] K. Kenmotsu, *On minimal immersion of* R^2 *into* S^n, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 182–191.

[15] H. Weyl, *On the volume of tubes*, Amer. J. Math., **61** (1939), 461–472.