# 半線形波動方程式系の爆発境界について

佐々木　多希子 (武蔵野大学 工学部数理工学科 / 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻)

非線形発展方程式における研究課題の一つに解の爆発がある．解が爆発 (ある時刻で，方程式の解の適当なノルムが発散する) 場合，「どのような場合に解が爆発するのか」，「爆発するとき，解はどのようにふるまうのか」，「いつ，どこで爆発するのか」という観点から問題が提起されており，多くの発展方程式においてこの問題は重要な課題である．しかしながら，解の爆発現象の数学的な解析は非常に難しい場合が多く，未解決な問題が多く残されている．その一つが非線形波動方程式の爆発境界である．

$x$ を空間変数，$t$ を時間変数とし，非線形波動方程式

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = F(u, \partial_t u, \partial_x u), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

を考える．このとき，爆発境界とは，次で定義される $\Gamma$ のことである：

$$\Gamma = \{(x, T(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

ただし，$T(x)$ は $x$ での古典解の最大存在時刻である．波動方程式の解がいつ，どこで爆発するのか，さらに，$T$ がどのような関数になるのか (微分可能か，特異性を持つのかなど) が解決すべき課題である．

$F = u^p (p > 1), e^u$ である場合に，初期値を十分滑らかに，かつ大きく取ると非線形波動方程式の爆発境界が $C^1$curve になることが示された ([CF, PG])．他にも何人かの研究者により，爆発境界の研究がなされているが，非線形項 $F$ に微分が入った波動方程式に適用することはできなかった．したがって，爆発境界の性質が，非線形項にある程度依存せずに成り立つ，一般的なものなのか，$F = u^p, e^u$ の場合に限った，特殊な性質なのかは分かっていなかった．

この問題に対し，[OT] では独自の手法を用いて，$F = (\partial_t u)^2 - (\partial_x u)^2$ である場合に爆発境界の解析を行った．[OT] では，ある種の変換を行うことで，線形な波動方程式に書き換えられる性質を用いて解析を行った．その結果，$F = u^p (p > 1), e^u$ の場合では示されなかった，$\Gamma$ が一点からなる例や，$C^1$curve になる例を示した．この方程式は，Lorentz 不変性という良い対称性を持っており，比較的に単純な波動方程式だが，いろいろな爆発境界が存在し得ることが示されたのである．このように，非線形項 $F$ に微分が入ると一般には単純な波動方程式でも様々な爆発境界を持つ可能性があるため，一般的な枠組みで爆発曲線を解析することは難しい．

そこで，まず，$F = |\partial_t u|^p$ である場合

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = |\partial_t u|^p, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

の爆発境界について数値・数学解析を行った．(この場合，[OT] で用いられた変換を行い，方程式を線形化することはできないため，[OT] の手法は使えない．) その結果，初期値が

十分滑らかで大きい場合に，爆発境界は$C^1$curve になることを示した．この解析は，数値解析的な手法 [SS] と，関数解析的な手法 [CF] を組み合わせることで達成した．(このように，数値解析的なアプローチをすることは現象の予測だけではなく，関数方程式の理論解析にも直接的な貢献をする．) 本講演ではその数値・数学解析の結果について報告した．

また，次の半線形波動方程式系を考える：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - c_1^2 \partial_x^2 u_1 = |\partial_t u_2|^{p_1 - 1} \partial_t u_2, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ \partial_t^2 u_2 - c_2^2 \partial_x^2 u_2 = |\partial_t u_1|^{p_2 - 1} \partial_t u_1, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ u_i(x,0) = u_{0,i}(x), \quad \partial_t u_i(x,0) = u_{1,i}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

ここで，$u_i = u_i(x,t)$ $(i = 1,2)$ は実数値の未知関数で，$c_1 \geq c_2 > 0$, $p_1, p_2$ は $2, 3$ または $4$ 以上の定数とする．(2) の爆発曲線についても考察し，適切な初期条件のもとで爆発境界が滑らかになる．本講演ではその結果の概要について報告した．

## 参考文献


[CF] L. A. Caffarelli and A. Friedman: Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986), 223–241.

[PG] P. Godin:Calc. Var. Partial Differential Equations, **13** (2001), 69–95.

[OT] M. Ohta and H. Takamura: Nonlinear Anal., **33** (1998), 693–698.

[SS] N. Saito and T. Sasaki: J. Math. Sci. Univ. Tokyo **23** (2016), 349–380.