

理想単体分割を用いた量子不変量の統一的理解に向けて

Sakie Suzuki

1. 結び目と移り目, 結び目図式, 不変量
2. 量子不変量と量子トポロジー
3. 量子不変量の統一的理解に向けて
4. 結び目補空間の framing の構成



1. 結び目と絡み目, 結び目図式, 不変量

2. 量子不変量と量子トポロジー

3. 量子不変量の統一的な理解に向けて

4. 結び目補空間の framing の構成

1. 結び目と絡み目, 絡み目図式, 不変量

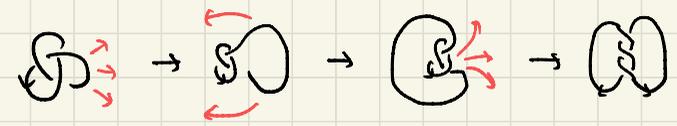
結び目・絡み目とは.

絡み目: $S^1 \cup S^1 \cup \dots \cup S^1 \hookrightarrow S^3$
埋込み



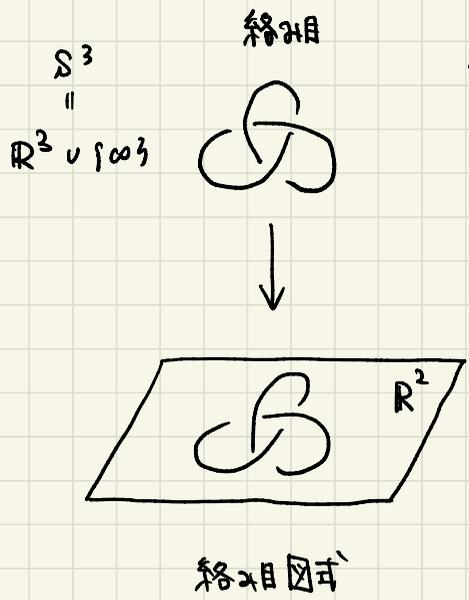
同値関係: $K \sim K' \iff K = K'$ は S^3 の連続変形による場合
(アトコ...)

(例) と は アトコ...

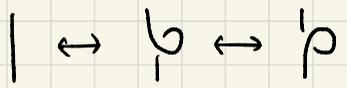


1. 結び目と絡み目, 絡み目図式, 不変量

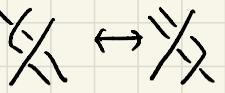
絡み目の図式とは



$$\{\text{絡み目}\} / \text{同値} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{絡み目図式}\} / \text{RI, RII, RIII}$$

RI : 

RII : 

RIII : 

1. 結び目と系多目, 系多目図式, 不変量

結び目の不変量とは

系多目に与えられる値 $f(K)$ は「 $K \sim K' \Rightarrow f(K) = f(K')$ 」が成り立つとき「不変量」という。

〈例〉 成分数 $n: \{\text{系多目}\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ $\bigcirc \mapsto 1$ $\bigodot \mapsto 2$ $\bigoplus \mapsto 3$

最小交点数 $m: \{\text{系多目}\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ $\bigcirc \mapsto 0$ $\bigodot \mapsto 2$ $\bigoplus \mapsto 3$

種数 $g: \{\text{結び目}\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ $\bigcirc \mapsto 0$ $\bigodot \mapsto 1$ $\bigoplus \mapsto 1$



K を張り向きつき曲面の最小種数

系多目群 $\pi_1(K) = \pi_1(S^1 \times K)$

不変量が系多目の性質を表現している。

1. 結び目と糸目目, 糸目目図式, 不変量

2. 量子不変量と量子トポロジー

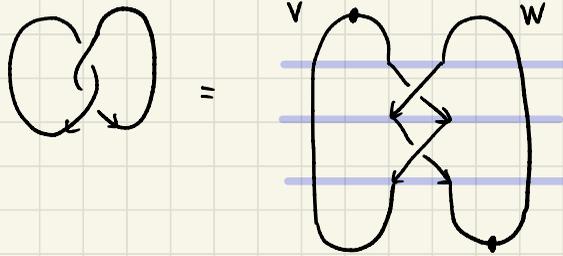
3. 量子不変量の統一的な理解に向けて

4. 結び目補空間の framing の構成

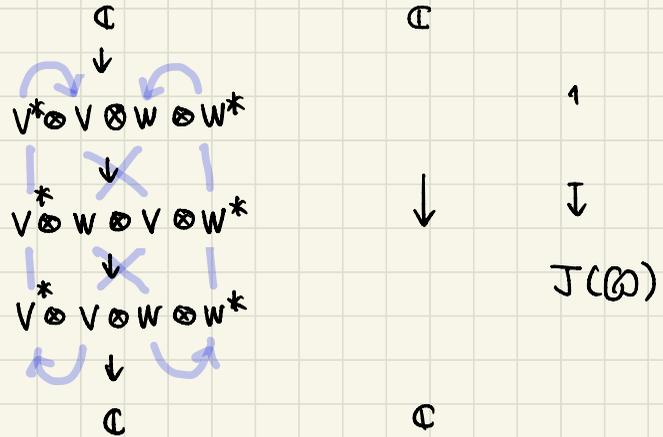
2. 量子不変量と量子トポロジー

量子不変量とは

V, W : 有限次元線形空間



\mapsto



key point

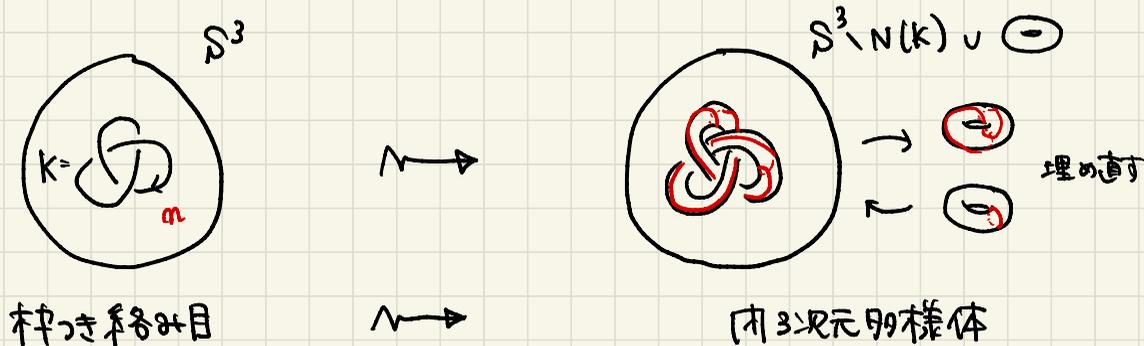
$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \mapsto \begin{array}{c} V \otimes W \\ \downarrow \\ W \otimes V \end{array} =: R$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \sim \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad R_{II}$$

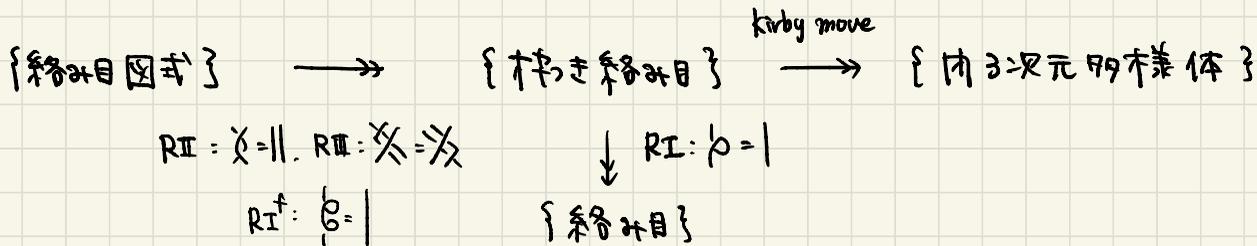
$$\Rightarrow (R \otimes I)(I \otimes R)(R \otimes I) = (I \otimes R)(R \otimes I)(I \otimes R)$$

Yang-Baxter eq.

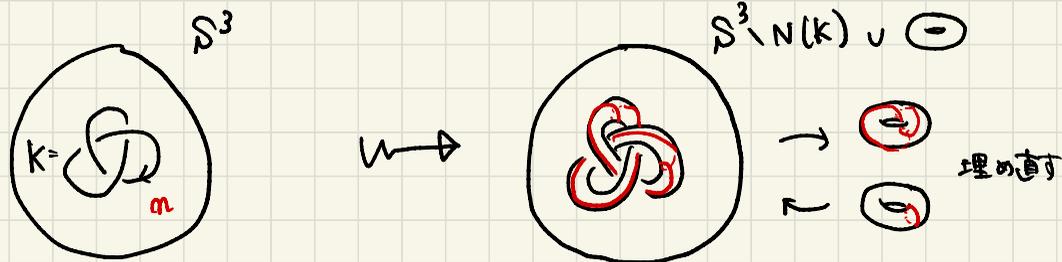
絡み目から内3次元多様体を作る (デーン手術)



: 各成分に整数が割り当てられた絡み目 $\mu = 1$ $\mu = -1$



円3次元多様体の量子不変量



結び糸各々目

$M \rightarrow$

円3次元多様体

各々の
量子不変量

Jones poly
Reshetkhin-Turaev inv
Universal inv
Kontsevich inv

$M \rightarrow$

Witten-Reshetkhin-Turaev inv
Hennings inv
LMO inv

円3次元多様体の
量子不変量

古典的不変量 v.s. 量子不変量

古典的
不変量

穴の数

素朴な不変量 古典的な幾何を用いた不変量

同値問題 (2つの絡み目 L, L' が isotopy かどうか判定せよ)

分類問題 (すべての絡み目の表を作成せよ)

個々の絡み目の性質に興味

量子
不変量

*
*

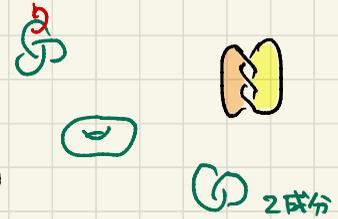
何回も眺めれば
規則性がわかる

X 素朴な不変量 X 古典的な幾何を用いた不変量

絡み目を代数を使って調べる というより 絡み目 (カノール) を代数として扱う枠組み

絡み目の集合の構造にも興味

Hopf代数の射の作用に関する "同変写像"



直感を数学で言語化

$$J(\bigcirc) = -t^4 + t^3 + t$$

絡み目の新しい性質を定義

2. 量子不変量と量子トポロジ-

量子トポロジ-

Jones 多項式の発見をきっかけに発展し続けている
量子不変量とその応用, 関連領域の呼び名

- 1984. Jones poly. \rightarrow quantum invs for links.

Atiyah's question: What is 3-dim interpretation of Jones poly?

- 1989. An answer by Witten (using Chern-Simons theory)

- 1990. math def by Reshetikhin-Turaev (R-T) \rightarrow quantum invs for 3-mfds

{ 数学的に厳密な枠組みで 古典的幾何学と比較できる形で	{ 系多相と 3次元多様体の	量子不変量を統一的に理解したい。
---------------------------------	-------------------	------------------

1. 結び目と絡み目, 絡み目図式, 不変量

2. 量子不変量と量子トポロジー

3. 量子不変量の統一的な理解に向けて

4. 結び目補空間の framing の構成

系各目目を3次元多様体(1本)として統一的に扱いたい



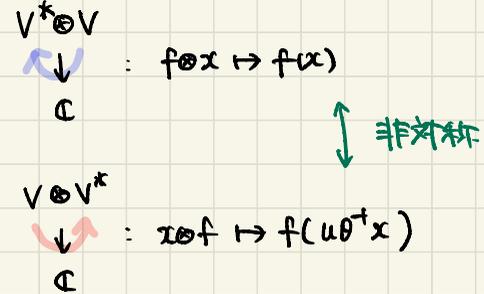
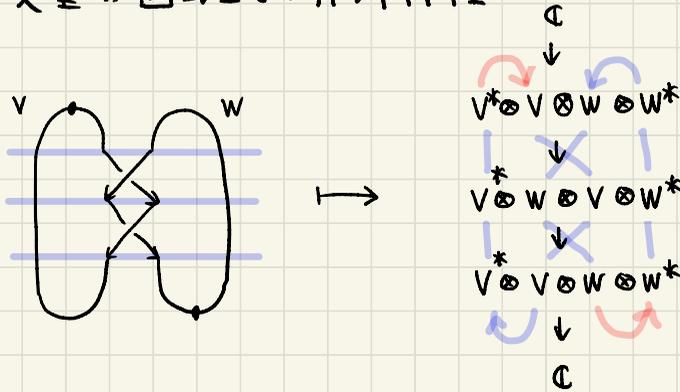
3次元多様体(1本)を(理想)単体分割を用いて定式化し、
その枠組みで系各目目と3次元多様体の量子不変量を統一的に理解したい。

3. 量子不変量の統一的な理解に向けて

(+α) についての考察



量子不変量の図式上での非対称性



— 量子不変量は局所的に図式の winding number を拾っている。



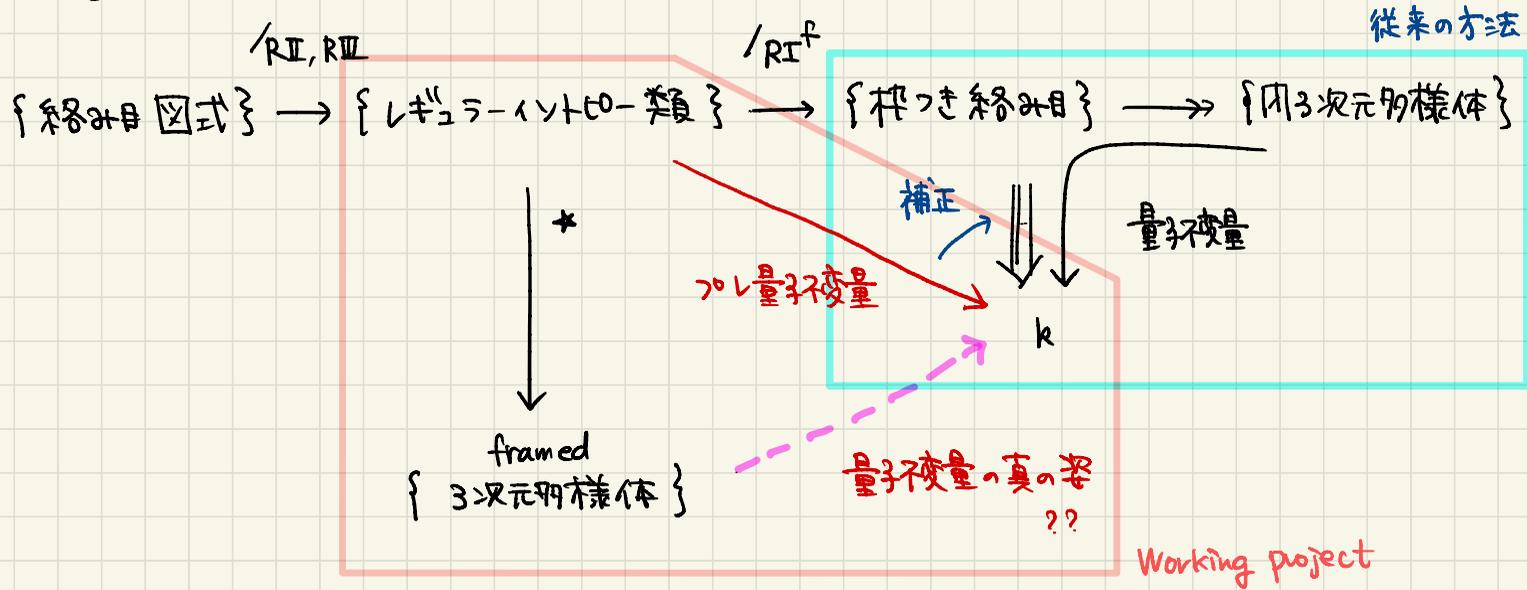
$$\{\text{系目図式}\} / \mathbb{R}\mathbb{I}, \mathbb{R}\mathbb{I}^\dagger =: \{\text{レキュライトコ-類}\} \quad |p \neq 1| \quad |0 \neq 1|$$

→ 補空間では足りない。 (境界のロ>シ&nbnd;だけども足りない)

→ ... → 補空間の framing を使う。

3. 量子不変量の統一的な理解に向けて

Working Project



[S.M. Mihalache-S-Terashima] framed closed 3-mfds with $b_1=0$

残り $*$ の説明

[S] Universal invariant for links

1. 結び目と移り目, 移り目図式, 不変量

2. 量子不変量と量子トポロジー

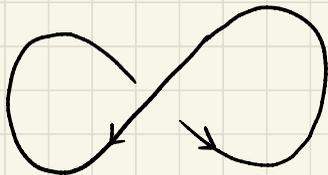
3. 量子不変量の統一的な理解に向けて

4. 結び目補空間の framing の構成

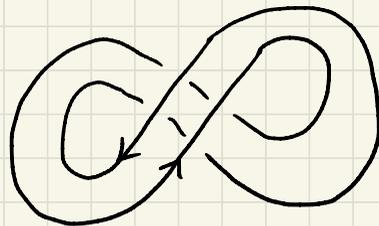
4. 結び目補空間の framing の構成

$\{\text{リンク-イソトピー-類}\} \rightarrow \{\text{framed 3-mfds } (M, \nu_1, \nu_2, \nu_3)\}$ の構成

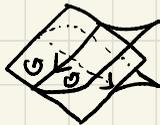
Step 1



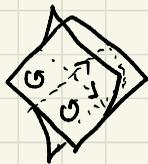
2重化
 \uparrow
 片方の向き
 変える



Step 2

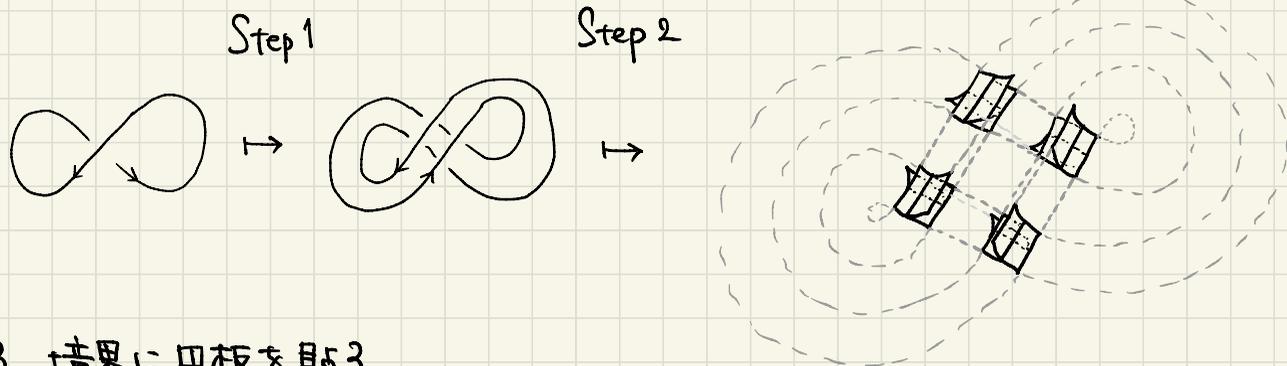


と置き換えて ひもに沿ってつなげる

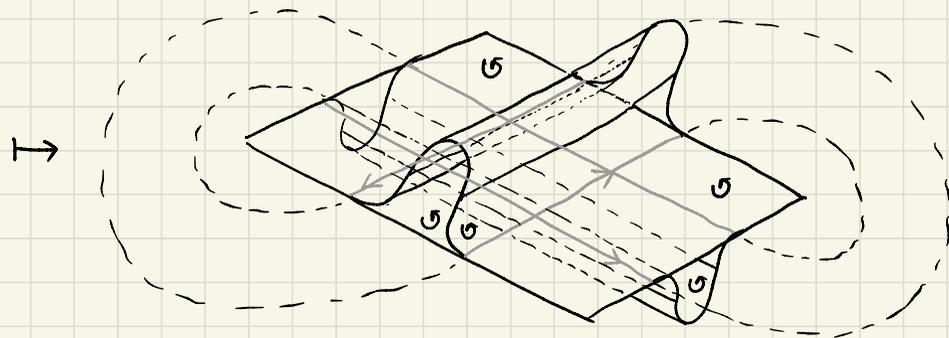


4. 結び目補空間の framing の構成

(13)



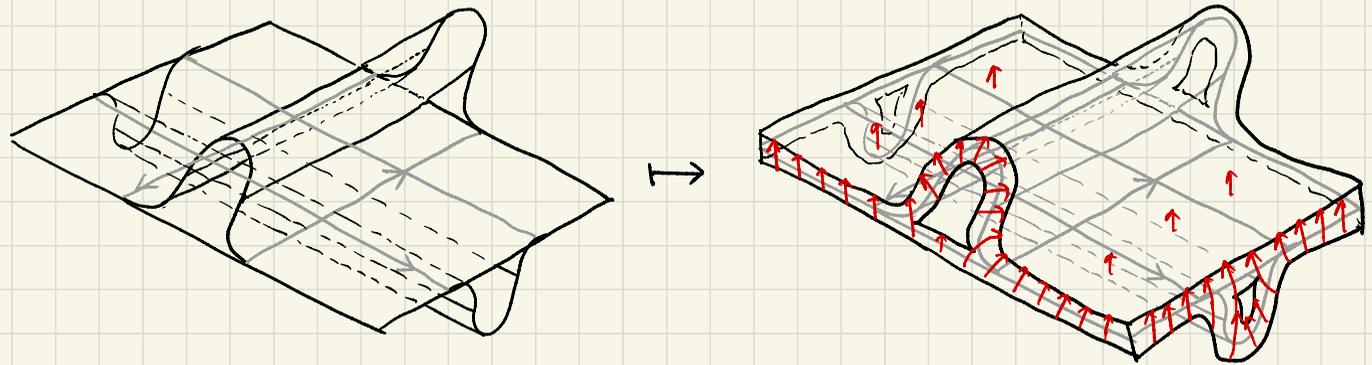
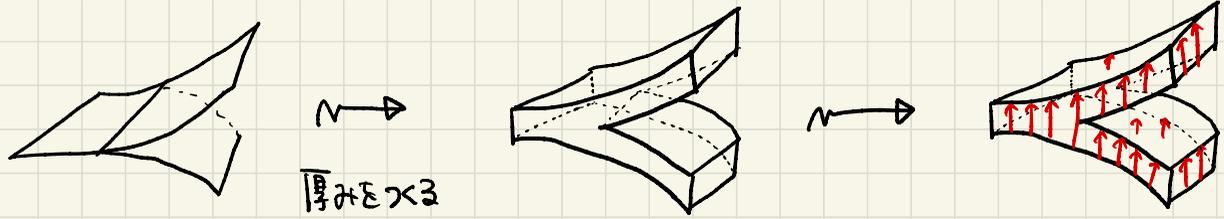
Step 3 境界に円板を貼る



= P : spine of $\overline{S^3 \setminus (N(k) \cup B^3 \cup B^3)}$

4. 結び目補空間の framing の構成

バットル場 の 構成



$$\approx \overline{S^3 \setminus (N(K) \cup B^3 \cup B^3)}$$

4. 結び目補空間の framing の構成

framing の構成 (ベクトル場 μ_1 に直交するもう一つのベクトル場 μ_2 の構成)

① fix vectors on vertices (0-cell)

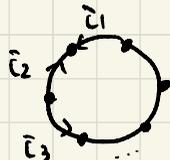


② fix rotation numbers on edges (1-cell)



$$: x \in C^1(P:Z)$$

③ extend to disks (2-cell)



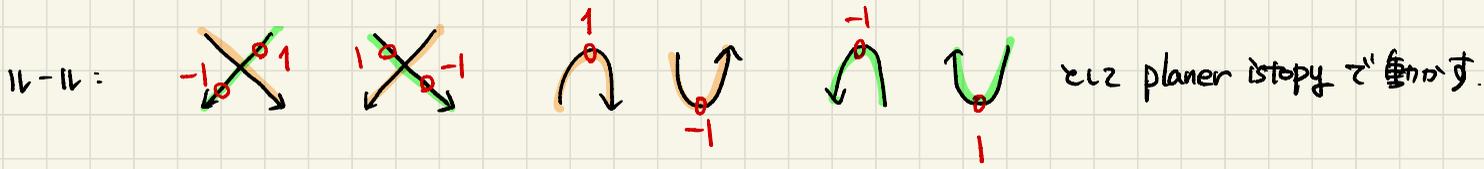
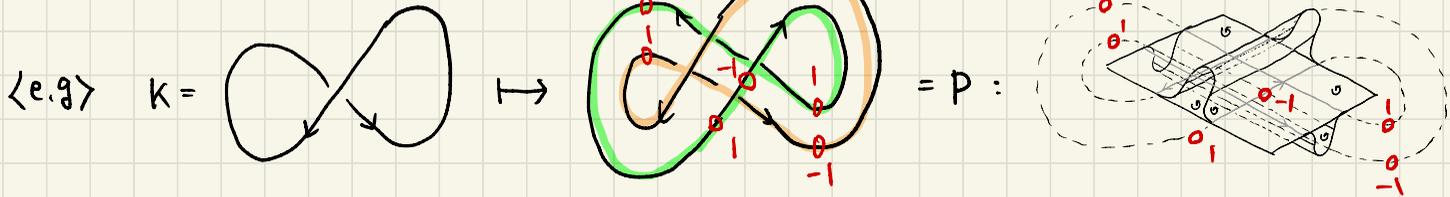
(under the condition on $x \in C^1(P:Z)$
as obstruction = 0)



4. 結び目補空間の framing の構成

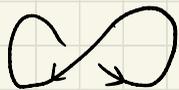
$x \in C^1(P; \mathbb{Z})$ の構成

結び目図式

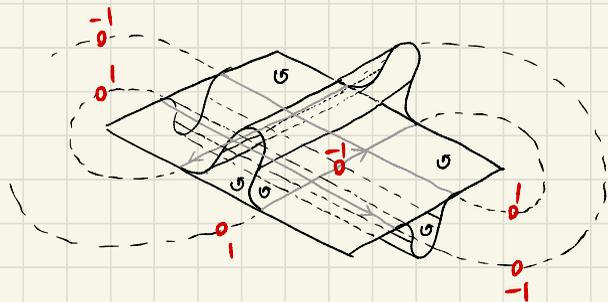
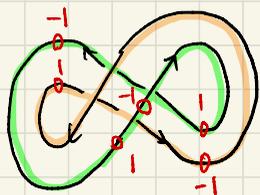


4. 結び目補空間の framing の構成

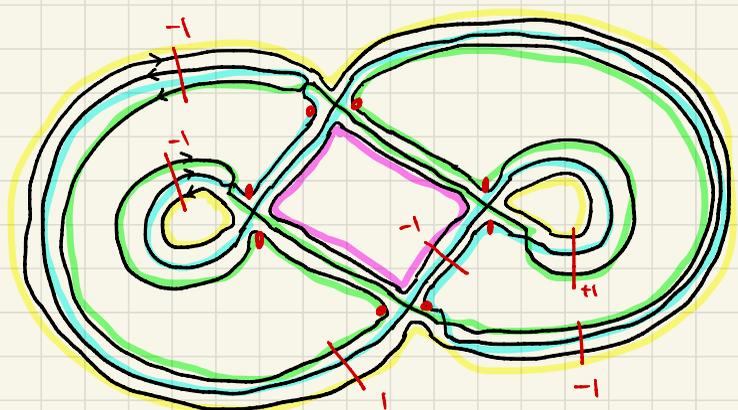
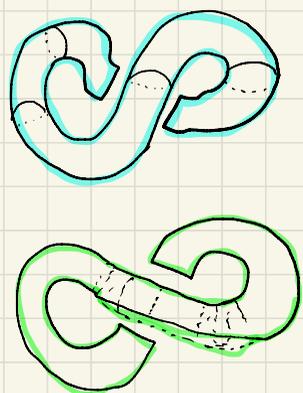
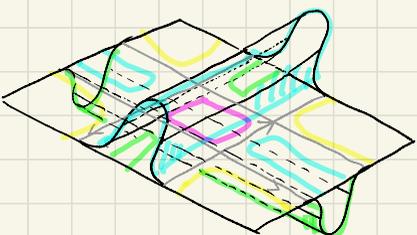
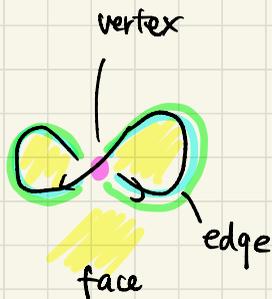
結び目図式



Spine

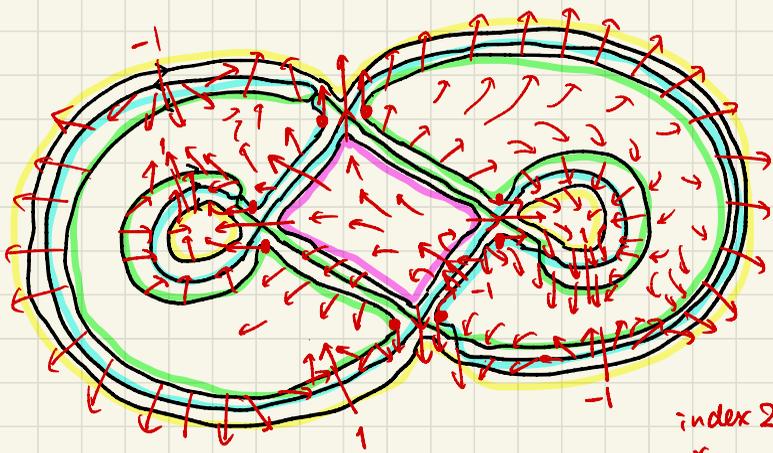
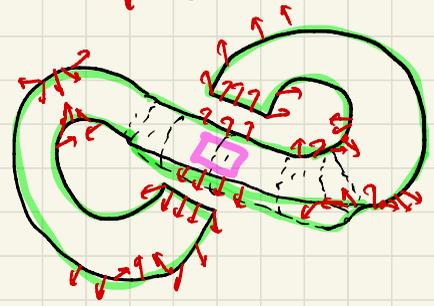
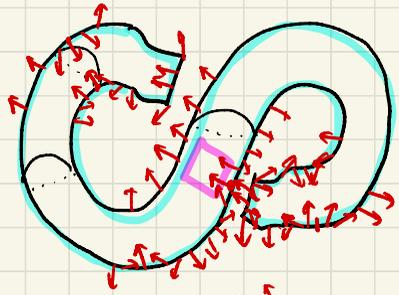
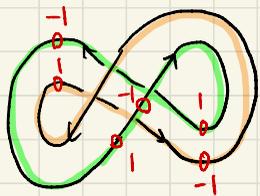
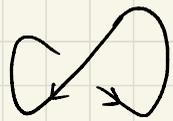


disk components

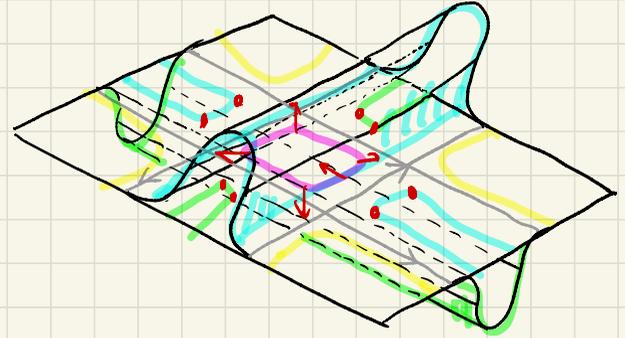


4. 結び目補空間の framing の構成

framing の構成

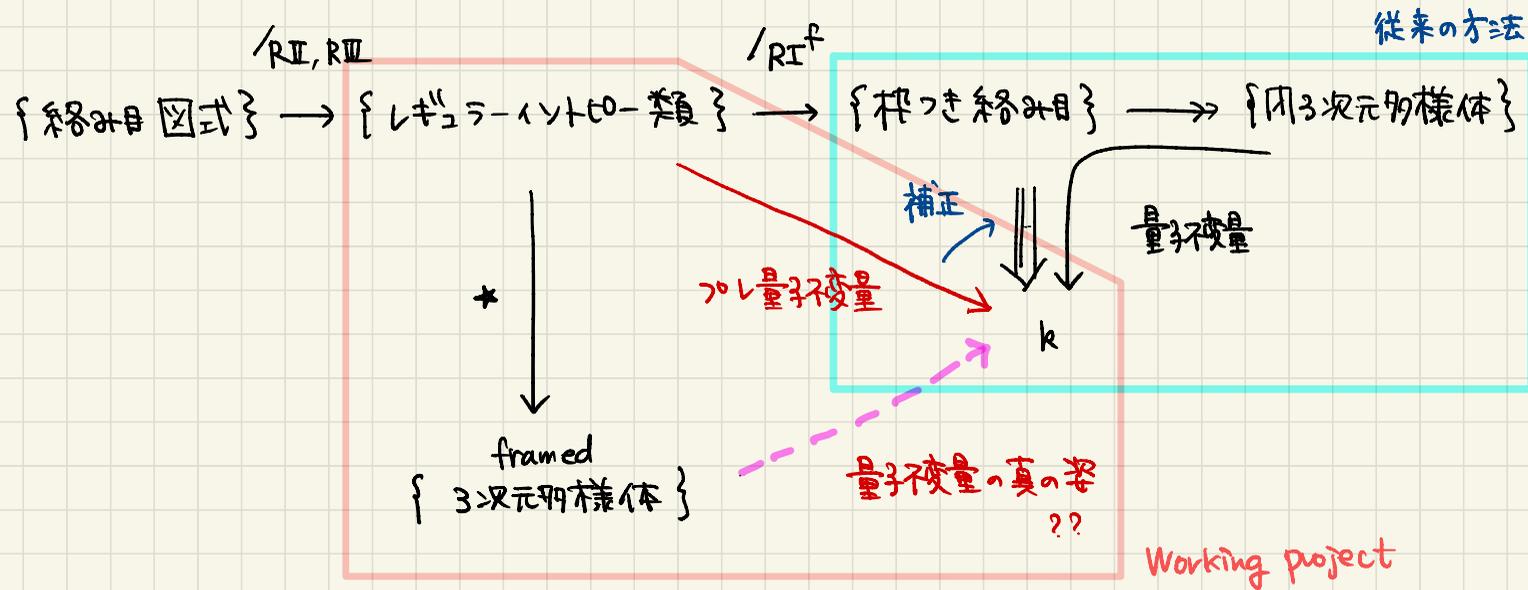


index 2
x



Thm (S) 上記で構成した framing は $RII, RIII$ で不変.

まとめ



この枠組みを使って、絡み目と3次元多様体の量子不変量を系統的に理解したい。

[S.M. Mihalache-S-Terashima] framed closed 3-mfds with $b_1=0$.

[S] Universal invariant for links,