一次元広義拡散過程とディリクレ形式

富崎　松代

一次元拡散過程, 一次元広義拡散過程, 一次元双一般化拡散過程とディリクレ形式の列の収束や極限に関する結果を報告する.

開区間 S 上の拡散過程 X (内部での消滅を伴わない) は $s(x)$(尺度関数), m(速度測度) と正則な境界での境界条件によって特徴づけられることが知られている ([3]). $s(x)$ は S 上の連続増加関数であり, m は S 上の右連続増加関数によって定義される Radon 測度である. X に対応するディリクレ形式は Z.-Q. Chen と M. Fukushima によって得られている ([1]). S 上の拡散過程 $X^{(n)}$ の尺度関数 $s^{(n)}$ の列と速度測度 $m^{(n)}$ の列が適当な収束条件を満たす場合, その基本解の列も収束する. これにより $X^{(n)}$ に対応するディリクレ形式の列の Mosco 収束が得られる.

このような考察は, 右連続非減少関数から定義される Radon 測度 m を速度測度とする広義拡散過程のクラスにおいても可能である. [4], [7] において S. Watanabe と S. Kotani によって定式化された広義拡散過程に対応するディリクレ形式は, [1] で示されたディリクレ形式の trace から得られる (T. Takemura との共同研究). 広義拡散過程のクラスにおいても基本解列の収束は得られていることから, 対応するディリクレ形式の列の Mosco 収束が得られる.

Y. Ogura は速度測度の一般化だけでなく尺度関数も一般化した双一般化拡散過程を考察した ([6]). そこでは非減少関数 (連続性を仮定しない)$s(x)$ と右連続非減少関数から定義される Radon 測度 m によって定義される Markov 過程が考察の対象となる. このクラスの研究は, 集団遺伝学の拡散モデルに関する Gallespie の予想「時間の尺度を速めると漸近挙動として定常点間や定常分布間の飛躍が現れる場合がある」(1983) に端を発している. M. Iizuka と Y. Ogura は双一般化拡散過程における極限定理を示し, 一次元の場合に Gallespie の予想を肯定的に解決した ([2]). その後, [2] では取り扱われていない例について Iizuka, Takemura と共同研究を行い, [2] の極限定理を適用することはできないが極限分布は存在する場合があることを証明した. これは, ある意味で, [2] の極限定理の条件が必要十分に近いものであることを示している.

残る問題は双一般化拡散過程に対応するディリクレ形式の表現である. これについては Liping Li によって興味ある結果が得られている ([5]). 今後は [4], [6], [7] に基づく広義拡散過程, 双一般化拡散過程の表現と [5] のディリクレ形式との関連を調べ, このクラスにおけるディリクレ形式の収束問題について検討する必要がある.

[1] Z.-Q. Chen and M. Fukushima: *Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory*, London Math. Soc. Monogr. Ser, 35, Princeton University Press, 2012.

[2] M. Iizuka and Y. Ogura: Convergence of one-dimensional diffusion processes to a jump process related to population genetics, J. Math. Biol. **29** (1991), 671-687

[3] K. Itô and H. P. McKean: *Diffusion Processes and their Sample Paths*, 2nd Printing, Corrected, Springer-Verlag, 1974.

[4] S. Kotani and S. Watanabe: Krein's spectral theory of strings and generalized diffusion processes, *Functional analysis in Markov processes* (M. Fukushima, ed.) Lecture Notes in Math. **923** 235–259, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982

[5] Liping Li: Dirichlet form approach to diffusions with discontinuous scale (arXiv:2303.07574)

[6] Y. Ogura: One-dimensional bi-generalized diffusion processes, J. Math. Soc. Jpn. **41** (1989), 213-242

[7] S. Watanabe: On time inversion of one-dimensional diffusion processes, Z. Wahrsch. Verv. Gebiete, **31** (1975), 115–124