

第7回 岡潔女性数学者セミナー 3次元の特異点解消と マッカイ対応

2024. 9.19
@奈良女子大学
Kavli IPMU 東大
伊藤 由佳理

専門 代数幾何学 特異点

略歴 大学 大学院 職歴

海外 学外

家族 趣味

所属 東京大学

1. 自己紹介

2. 2次元マッカイ対応

有限群 $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ 5種類

特異点 $\mathbb{C}^2/G$ 孤立超曲面

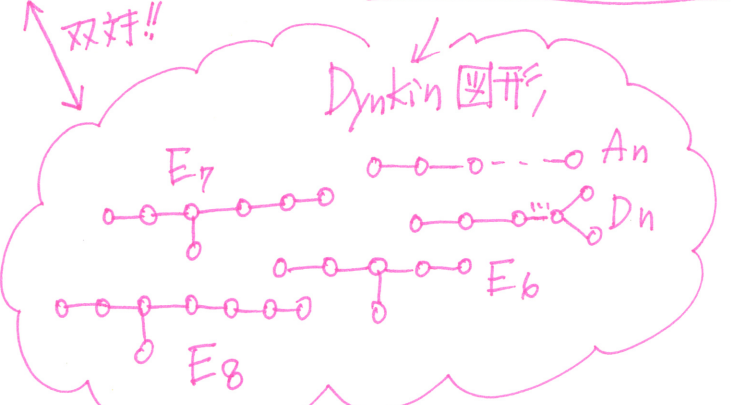
対応 John McKay 1979

特異点解消

$Y \rightarrow X = \mathbb{C}^2/G$
 $E \rightarrow P$ 例外集合 特異点

$\rho: G$ の既約表現
 $\rho_{nat}: G \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$
 G の自然表現

$$\rho_i \otimes \rho_{nat} = \bigoplus_j a_{ij} \rho_j$$



1990 3次元の代数多様体の分類が完成!

3. 超弦理論から

ホーゾールド conjecture
Dixon-Harvey-Vafa-Witten 1995

$$\chi(M, G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(M^{g, h})$$

M : smooth complex Kähler mfd
 G : finite group $\subset M$
 $g, h \in G$

予想 Hirzebruch-Höfer 1990

$G \subset SL(3, \mathbb{C})$ 有限部分群
ユークリッドの特異点解消 i.e.
 $f: Y \rightarrow X = \mathbb{C}^3/G$ $K_Y = f^* K_X$
s.t. $\chi(Y) = \# \{ G \text{ の共役類} \}$

定理 (Markushevich, Roan, I²)
予想は正しい!
($G \subset SL(3, \mathbb{C})$ の分類を利用)
12種類

4. 代数幾何

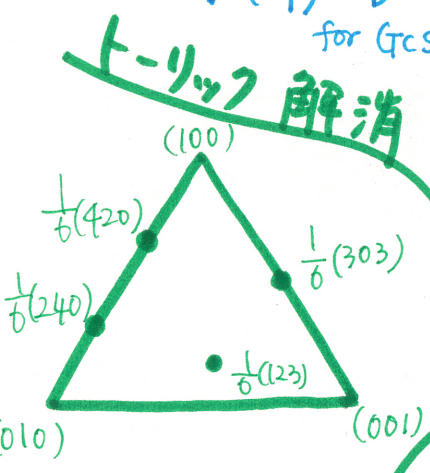
3次元マッカイ対応?

- $\chi(Y) = \# \{ G \text{ の共役類} \}$
 $Y \rightarrow X = \mathbb{C}^3/G$ クラポイント解消
- 2次元マッカイ対応
 $\{E_i\} \xrightarrow{1:1} \{ \text{非自明な既約表現} \}$

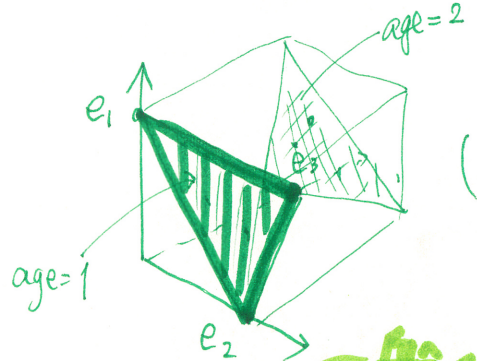
一般化 Batyrev-Dais, Kontsevich, Batyrev

定理 (I-Reid) 1995

$G \subset SL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群
 $Y \rightarrow X = \mathbb{C}^3/G$ クラポイント解消
とするとき
 $\rho^i(Y, \mathbb{Q})$
 $= \# \{ \text{age } i \text{ の共役類} \}$



例 $\frac{1}{6}(123)$
 $G = \langle \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^3 \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \mid \varepsilon^6 = 1 \rangle$



$$N = \mathbb{Z}^3 + \sum \mathbb{Z} v_g$$

$$v_g = \frac{1}{r}(a, b, c) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon^a & \varepsilon^b & \varepsilon^c \\ \varepsilon^b & \varepsilon^c & \varepsilon^a \\ \varepsilon^c & \varepsilon^a & \varepsilon^b \end{pmatrix} \varepsilon^r = 1$$

$$U = \{ \sum x_i v_i \in \mathbb{R}^3, x_i \geq 0 \}$$

$$\mathbb{C}^3/G \cong \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma^v \cap M]$$

定理 (III) $G \subset SL(m, \mathbb{C})$: P-バル群
 $Y \rightarrow X = \mathbb{C}^m/G$: クラポイント解消
 $\Rightarrow D(Y) \cong D^*(\mathbb{C}^3)$

定理と定義 I-Nakamura etc.
"G-ヒルバースキーム"
 $G \text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$

5. 3次元のクラポイント解消
 G : P-バル群の場合

トリーク 多様体

7. 今後の問題 高次元 非可換 等...

カブリ IPMU 東京大学