エルゴード理論と測度論的数論

日本女子大学 理学部 数物情報科学科　夏井利恵

本講演では、ergodic theory と metric number theory の基礎的な概念、及び、それらを融合した研究事例について幾つか紹介した。ここで、metric number theory とは、ある性質を満たすような数（或いはベクトルなど）の集合を数量的に評価する理論のことである。本概要においては、Diophantus approximation の metirc number theory とある種の連分数変換のエルゴード理論的研究の一例を紹介する。

まずはじめに、Diophantus approximation の "metric" な最初の結果としては次が知られている。

Theorem (A. Khintchine [2]). *We let λ denote the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. Consider a function $\psi : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ such that the sequence $(q\psi(q))_{q=1}^{\infty}$ is decreasing. Put*

$$\mathcal{K} = \left\{ \alpha \in [0,1] : \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\psi(q)}{q} \text{ has infinitely many solutions } (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \text{ with } 0 \leq p \leq q \right\}.$$

Then the following hold:

(a) If $\sum_{q \geq 1} \psi(q) < \infty$, *then* $\lambda(\mathcal{K}) = 0$

(b) If $\sum_{q \geq 1} \psi(q) = \infty$, *then* $\lambda(\mathcal{K}) = 1$.

この定理の証明には、実数の正規連分数変換の metric number theory と ergodic theory の議論が本質的に用いられている。その後、Khinchin の結果は拡張され、R. J. Duffin - A. C. Schaeffer [1], D. Koukoulpoulos - J. Maynard [3] によって最終的な 0-1 法則の確立に至っている。ここで用いられている正規連分数変換は Gauss map とも呼ばれ、以下で定義される:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{if} \quad x \in (0,1] \\ 0 & \text{if} \quad x = 0. \end{cases}$$

Gauss map のエルゴード理論的研究については、1980 年代に構成された G の natural extension (projective limit) を用いることにより新たな研究に発展し、それ以降、様々なタイプの連分数変換に関する研究結果が生まれている。その中でも本講演者は、例えば、α-連分数の中間近似を導出する無限大不変測度を持つ 1 次元写像の 1-parameter family（α-Farey maps）に関して、その natural extension の構成や同型問題などの研究成果を得ている。

References

[1] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, Khintchine's problem in metric Diophantine approximation, Duke Math. J. **8** (1941), 243–255.

[2] A. Khintchine, Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen, Math. Ann. **92** no.1-2 (1924), 115–125.

[3] D Koukoulopoulos and J Maynard, On the Duffin-Schaeffer conjecture, Annals of Math. **192** (2020), 251–307.