拡散型発展方程式の解の漸近解析とその応用

奈良女子大学 STEAM・融合教育開発機構 南 香名

1 導入

発展方程式は，物理や工学の幅広い分野で用いられる重要な数理モデルであり，その解の長時間挙動を解析することは理論と応用の両面で極めて重要である．

本講演では，発展方程式の初期値問題における自己相似解に，初期値の情報を十分に反映する手法とその応用に関する予想を紹介する．特に，次の n 次元熱方程式の初期値問題について考察する．

(1) $$\partial_t u = \Delta u \qquad x \in \mathbf{R}^n,\ \ t > 0$$

(2) $$u(x,0) = f(x) \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

ここに，$u = u(x,t) = u(x_1,\dots,x_n,t)$ は位置 $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n$, 時刻 $t > 0$ における温度を表す未知の実数値関数，初期値 $f = f(x) = f(x_1,\cdots,x_n)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の既知関数である．

具体的には n 次元熱核，すなわち

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \qquad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

を $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$ 倍し，空間シフト $x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*) \in \mathbf{R}^n$ と，時間シフト $t^* \in \mathbf{R}$ を施した (0 次) 修正熱核

$$\hat{G}_t^{(0)}(x) = \hat{G}_t^{(0)}(x;x^*,t^*) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx \cdot G_{t-t^*}(x-x^*) = \frac{\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx}{(4\pi(t-t^*))^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x-x^*|^2}{4(t-t^*)}\right)$$

を導入し，初期値 f の 0 次,1 次,2 次モーメント

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0}}(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx,\ \ \mathcal{M}_{\boldsymbol{e_i}}(f) = \int_{\mathbf{R}^n} x_i\, f(x)\,dx,\ \ \mathcal{M}_{\boldsymbol{e_i}+\boldsymbol{e_j}}(f) = \int_{\mathbf{R}^n} x_i\, x_j\, f(x)\,dx,\ i,j = 1,\cdots,n$$

(ここに, $\mathbf{0}$ は $\mathbf{R}^n$の零ベクトル, $\boldsymbol{e_i}$は $\mathbf{R}^n$の第 i 単位ベクトルを表す)

に適合した空間シフト，時間シフトをとることにより，(1)，(2) の解 u の長時間挙動を良く近似する漸近解を構成する．

実際，空間シフト x^* の i 番目の成分は次式で与えられる：

(3) $$x_i^*\, \mathcal{M}_{\mathbf{0}}(f) = \mathcal{M}_{\boldsymbol{e_i}}(f), \qquad i = 1,\cdots,n\,.$$

一方，最適な時間シフト t^* を決定するためには，ある定数 $C_0 \in \mathbf{R}$ が存在して，f の 1 次モーメントと 2 次モーメントについて次のような追加条件が成立する：

(4) $$\frac{1}{2}\,\mathcal{M}_{\boldsymbol{e_i}+\boldsymbol{e_j}}(f) - \frac{1}{2}\,\mathcal{M}_{\mathbf{0}}(f)\, x_i^* x_j^* = C_0\, \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,\cdots,n\,.$$

ここに，x_i^*, $i = 1,\cdots,n$, は (3) で与えられた空間シフト x^* の第 i 成分であり，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

2 結果

$f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ とし，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx \neq 0$ とする．また，$\displaystyle\int_{R^n} (1+|x|)^2 |f(x)|\,dx < +\infty$ とする．(0 次) 修正熱核 $\hat{G}_t^{(0)}(x)$ の空間シフト x^* を (3) のようにとる．更に，初期値 f は (4) の条件を満たすものとし，(0 次) 修正熱核 $\hat{G}_t^{(0)}(x)$ の時間シフト t^* は次を満たすものとする：

$$C_0 + t^*\, \mathcal{M}_{\mathbf{0}}(f) = 0.$$

ここに，C_0 は (4) に現れる定数である．

このとき，熱方程式の初期値問題 (1)，(2) の解 u と修正熱核 $\hat{G}_t^{(0)}$ について次が成立する：

$$\lim_{t\to\infty} t^{1+\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(\cdot,t) - \hat{G}_t^{(0)}(\cdot)\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = 0.$$

証明は Taylor 展開と熱核の L_p − L_q 評価による．

参考文献

[1] Fujigaki, Y., Miyakawa, T., *Asymptotic profiles of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in the whole space.* SIAM J. Math. Anal. **33**, 523–544 (2001).

[2] Giga, M., Giga, Y., Saal, J., *Nonlinear Partial Differential Equations. Asymptotic behavior of solutions and self-similar solutions.* Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin 2010.

[3] Kato, T., *Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbf{R}^m$, with applications to weak solutions.* Math. Z. **187**, 471–480 (1984).

[4] Klenstein, G., Ting, L., *Optimum one-term solutions for heat conduction problems.* Z. Angew. Math. Phys. **51**, 1–16 (1971).

[5] Yanagisawa, T., *Asymptotic behavior of solutions to the viscous Burgers equation.* Osaka J. Math. **44**, 99–119 (2007).