C^* 環の包含とガロア対応について

向原未帆

九州大学 数理学研究院

2025/9/10

ガロア理論

K/L $(= L \subset K)$ を体の拡大とする.
ガロア群 $\mathrm{Gal}(K/L) := \{g \in \mathrm{Aut}(K) \mid g(l) = l,\ \forall l \in L\}$ を考える.

定理

K/L が “有限次ガロア拡大” であるとき，K/L の中間体全体とガロア群の部分群全体に自然な対応が存在する:

$$\{H \leq \mathrm{Gal}(K/L)\} \ni H \mapsto K^H \in \{P \mid L \leq P \leq K\}$$

ただし，$K^H := \{k \in K \mid h(k) = k,\ \forall h \in H\}$.

$\cdots$ 体 (可換単純環) の “良い” 包含は群の作用 (対称性) で説明される.

$\longrightarrow$ Q. 作用素環 (非可換環) の場合ではどうか？
A. 良い作用素環の包含はテンソル圏の作用で理解できる.(部分因子環論)

作用素環

- **作用素環とは:** 複素ヒルベルト空間上の有界線形作用素の成す $\mathbb{C}$ 代数．関数解析的な手法で研究される．C^* 環とフォンノイマン環の二種類がある．
- **起源:**

  1930- フォンノイマン環論の基礎設立 (Murray-von Neumann).

  1940- C^* 環の表現定理が示される (Gelfand-Naimark 等)
  $\rightarrow C^*$ 環の公理系の整理.

- **研究目的:**
  量子力学の数学的定式化，ユニタリ表現論の拡張，作用素環の代数的同型類の記述及び分類，幾何学への応用，群や力学系の解析的性質の理解,....

有界線形作用素

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の完備な内積空間 $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を**ヒルベルト空間**とよぶ.

$$\langle\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \eta\rangle = \lambda_1\langle\xi_1, \eta\rangle + \lambda_2\langle\xi_2, \eta\rangle,$$
$$\overline{\langle\xi, \eta\rangle} = \langle\eta, \xi\rangle, \qquad \|\xi\| := \langle\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{2}} \quad \forall\xi, \eta \in \mathcal{H},\ \forall\lambda \in \mathbb{C}$$

線形写像 $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ の**ノルム**を次で定め，**有界線形作用素** ($\|T\| < \infty$) 全体の成すバナッハ環を $B(\mathcal{H})$ とかく.

$$\|T\| := \sup\{\|T\xi\| \mid \|\xi\| = 1\}$$

- $\forall T \in B(\mathcal{H})$ に対し,

$$\exists T^* \in B(\mathcal{H}) \text{ s.t. } \langle T\xi, \eta\rangle = \langle\xi, T^*\eta\rangle, \quad \forall\xi, \eta \in \mathcal{H}$$

$\longrightarrow$ $B(\mathcal{H})$ はバナッハ $*$ 環. $\|T^*T\| = \|T\|^2 = \|TT^*\|$ を満たす.

作用素環

- **作用素環** $\cdots$ 複素ヒルベルト空間上の有界線形作用素の成す $\mathbb{C}$ 代数.
  フォンノイマン環: $B(\mathcal{H})$ の**作用素強位相**について閉な, $*$ 部分 $\mathbb{C}$ 代数.

  C* 環: $B(\mathcal{H})$ の**ノルム閉**な, $*$ 部分 $\mathbb{C}$ 代数.
  $\Leftrightarrow$ バナッハ $*$ 環で $\|a^*a\| = \|a\|^2 = \|aa^*\|$.

例 1 (簡単な作用素環の例)

- 行列環 $M_n(\mathbb{C})$.
- 局所コンパクトハウスドルフ空間 X 上の連続関数環 $C_0(X)$. $\cdots$ C* 環
- 測度空間 (X, μ) に対する $L^\infty(X) = L^1(X)^*$. $\cdots$ フォンノイマン環

C* 環は位相空間の非可換化, フォンノイマン環は測度空間の非可換化として考えられる.

$\longrightarrow$ 全く同じ技術は使えない...

単純 C* 環の例

C* 環 A であって，0 と A 以外のノルム閉両側イデアルを持たないものを**単純 C* 環**と呼ぶ.

例 2

行列環のテンソル積 $M_2^{\otimes n} \cong M_{2^n}$ を考える．埋め込み

$$M_2^{\otimes n} \ni x \mapsto x \otimes 1_{M_2} \in M_2^{\otimes n+1}$$

による帰納極限 C* 環は単純 C* 環で **UHF 環**と呼ばれる.

例 3

以下の関係式を満たす $S_1, \ldots, S_n$ からできる普遍 C* 環は単純 C* 環で**クンツ環** $\mathcal{O}_n$ と呼ばれる.

$$S_i^* S_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = 1$$

群作用と接合積環

G：局所コンパクト群，B：C* 環

定義 4

連続な群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(B)$ を G の B への作用といい，$G \curvearrowright B$ と書く．

定義 5 (接合積 C* 環)

$\beta\colon \Gamma \curvearrowright B$ を離散群作用とする．

被約接合積 C* 環 $B \rtimes_{\beta,r} \Gamma :=$ 群環 $B[\Gamma]_\beta$ の “適切なノルム” による完備化．

$$B[\Gamma]_\beta = \{\sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_{s_i} \mid b_i \in B, s_i \in \Gamma\}$$

$$\lambda_s b = \beta_s(b)\lambda_s, \quad \lambda_s \lambda_t = \lambda_{st}, \quad \lambda_s^* = \lambda_{s^{-1}} = \lambda_s^{-1}, \quad \forall s, t \in \Gamma,\ \forall b \in B.$$

フォンノイマン環への群作用や接合積環も同様に定義できる．

群作用と接合積環

離散群作用 $\beta\colon \Gamma \curvearrowright B$ から，**C* 環の包含** $B \overset{E_\beta}{\subset} B \rtimes \Gamma$ が得られる．
E_β は自然な “良い” 線形射影 (**条件付き期待値**).

$$E_\beta\colon B \rtimes \Gamma \ni \sum_{s\in\Gamma} b_s\lambda_s \mapsto b_{1_\Gamma} \in B$$

例 6

群 C* 環: $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{Z}) = \overline{\mathbb{C}[\mathbb{Z}]} =$ 自明作用 $\beta\colon \mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C}$ からできる接合積
フーリエ変換 (以下) は C* 環の同型 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{Z}) \cong C(\mathbb{T})$ に拡張される．

$$\ell^1(\mathbb{Z}) \ni \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta_n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \in C(\mathbb{T})$$

E_β は $C(\mathbb{T})$ 上の以下の自然な射影と同一視される．

$$C(\mathbb{T}) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{T}} f(z)dz \in \mathbb{C}$$

コンパクト群と離散群

双対群

離散アーベル群 Γ に対し，双対群 $\hat{\Gamma} := \{g : \Gamma \to \mathbb{T} \mid \text{群準同型}\}$ はコンパクトアーベル群.

定理 7 (竹崎-高井双対定理)

(離散) アーベル群の作用 $\beta : \Gamma \curvearrowright B$ に対し，**双対作用** $\hat{\beta} : \hat{\Gamma} \curvearrowright B \rtimes_{\beta,r} \Gamma$ が存在し，

$$(B \rtimes_{\beta,r} \Gamma \rtimes_{\hat{\beta},r} \hat{\Gamma},\ \hat{\hat{\beta}}) \cong (B \otimes \mathbb{K}(\ell^2\Gamma),\ \beta \otimes \mathrm{Ad}\rho)$$

上記の設定で以下の包含の同型も存在する.

$$B \subset B \rtimes_{\beta,r} \Gamma \cong (B \rtimes_{\beta,r} \Gamma)^{\hat{\beta}(\hat{\Gamma})} \subset B \rtimes_{\beta,r} \Gamma$$

$\to$ 離散群作用 $\Gamma \curvearrowright B$ から得られる包含 $\mathbf{B \subset B \rtimes \Gamma}$ と
コンパクト群作用 $G \curvearrowright A$ から得られる包含 $\mathbf{A^G \subset A}$ は似ている.

ガロア対応 (フォンノイマン環)

M, N: 因子環 ($M \cap M' = \mathbb{C}$ であるフォンノイマン環),
G: コンパクト群, Γ: 離散群

定理 8 (Izumi-Longo-Popa 1998)

"極小作用" $\alpha\colon G \curvearrowright M$ と "外部作用" $\beta\colon \Gamma \curvearrowright N$ に対し，次の全単射が存在する．これをガロア対応と呼ぶ．

$$\{H \leq_{closed} G\} \ni H \mapsto M^H \in \{P \mid M^G \subset P \subset M\} \tag{1}$$

$$\{\Lambda \leq \Gamma\} \ni \Lambda \mapsto N\overline{\rtimes}\Lambda \in \{Q \mid N \subset Q \subset N\overline{\rtimes}\Gamma\} \tag{2}$$

$\cdots$ **外部性，極小性** $\leftrightarrow$ 包含の既約性 ($M \cap M^{G\prime} = N\overline{\rtimes}\Gamma \cap N' = \mathbb{C}$.)

以下に関するガロア対応も知られている．

- 因子環への Kac 型のコンパクト量子群作用 (Izumi-Longo-Popa 1998)
- 因子環へのコンパクト量子群作用 (Tomatsu, 2008)

ガロア対応 (C^* 環)

定理 9 (Izumi 2002)

単純 C^* 環への有限群の外部作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright A$ に対し，以下は全単射.

$$\{\Lambda \leq \Gamma\} \ni \Lambda \mapsto A^{\Lambda} \in \{D \mid A^{\Gamma} \subset D \subset A\}$$
$$\{\Lambda \leq \Gamma\} \ni \Lambda \mapsto A \rtimes_{\alpha} \Lambda \in \{D \mid A \subset D \subset A \rtimes_{\alpha} \Gamma\}$$

定理 10 (Cameron-Smith 2017)

単位的単純 C^* 環への離散群の外部作用 $\beta\colon \Gamma \curvearrowright B$ に対し，以下は全単射.

$$\{\Lambda \leq \Gamma\} \ni \Lambda \mapsto B \rtimes_{\beta,r} \Lambda \in \{D \mid B \subset D \subset B \rtimes_{\beta,r} \Gamma\} \tag{3}$$

定理 11 (Izumi 2024, M. 2024)

C^* 環への極小作用 $\alpha\colon G \curvearrowright A$ で，A^G が可分，単純である時，以下は全単射.

$$\{H \leq_{closed} G\} \ni H \mapsto A^H \in \{D \mid A^G \subset D \subset A\} \tag{4}$$

具体例

以下のようなコンパクト群作用に対し，ガロア対応が成立する．

例 12

- 左シフト作用 $Lt\colon G \curvearrowright C(G)$ が誘導する自由積 C* 環への作用 $(Lt \otimes \mathrm{id}) * \mathrm{id}\colon G \curvearrowright (C(G) \otimes C(\mathbb{T})) * C(\mathbb{T})$.
- 単純 C* 環へのコンパクト群の “isometrically shift-absorbing action”.
- クンツ環 $\mathcal{O}_n := \mathrm{C}^*(\{S_i\}_{i=1}^n \mid S_i^* S_i = 1,\ \sum_i S_i S_i^* = 1)$ へのゲージ作用 $\gamma\colon \mathbb{T} \curvearrowright \mathcal{O}_n$:

$$\gamma_z(S_i) = zS_i \quad \forall i,\ \forall z \in \mathbb{T}.$$

$\cdots$ 最後の例は亜群 C* 環の解析を使って証明できる．(Komura 2022)

定理 13 (Gabe-Szabo 2023)

任意の *“Kirchberg 環”A* と局所コンパクト群 *G* に対し，*isometrically shift-absorbing action* $\alpha\colon G \curvearrowright A$ が存在する．

包含の指数

$B \subset A$ を単純 C* 環の (単位的) な包含，$E\colon A \to B$ を条件付き期待値 (ノルム 1 の線形射影) とする．

- 条件付き期待値は $B-B$ 双線形写像．

$$E(b_1 a b_2) = b_1 E(a) b_2 \quad \forall a \in A,\ \forall b_i \in B.$$

定義 14

A の元 $\{(v_i, w_i)\}_{i=1}^n$ で，以下を満たすものを quasi-basis と呼ぶ．

$$x = \sum_{i=1}^n v_i E(w_i x) = \sum_{i=1}^n E(x v_i) w_i, \quad \forall x \in A.$$

この時，包含 $B \overset{E}{\subset} A$ は有限な**綿谷指数** $\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}} E = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ を持つ．

$\cdots$ 上の仮定の下，$\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}} E$ はスカラーで，quasi-basis によらない．

有限指数の包含

- 綿谷指数は部分因子環論で使われる “Jones 指数” の C* 環類似である.
- $\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}} E$ は A の B 双加群としての “大きさ” の情報を持っている.

例 15

有限群作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright A$ に対し，$A \overset{E_\alpha}{\subset} A \rtimes_\alpha \Gamma$ は quasi-basis$\{(\lambda_s, \lambda_s^*)\}_{s\in\Gamma}$ を持つ.
$\cdots\ \mathrm{Ind}_{\mathrm{w}} E_\alpha = |\Gamma|$

定理 16 (Izumi 2002)

$B \overset{E}{\subset} A$ を単純 C* 環の有限指数を持つ包含とする.
中間環 $B \subset D \subset A$ に対し，条件付き期待値 $E_D\colon A \to D$ が存在する

有限群作用に関するガロア対応

A: 単純 C* 環, $\alpha : \Gamma \curvearrowright A$: 有限群の外部作用, $A \subset D \subset A \rtimes \Gamma$: 中間環

claim 1 $A \rtimes \Gamma$ は単純 C* 環で $A \subset A \rtimes \Gamma$ は既約 $(A \rtimes \Gamma \cap A' = \mathbb{C})$.

claim 2 前定理の条件付き期待値 $E_D : A \rtimes \Gamma \to D$ について, 以下を得る:

$$E_D(\lambda_s)\lambda_s^* \in A \rtimes \Gamma \cap A' = \mathbb{C} \quad \overset{\text{つまり}}{\longrightarrow} \quad E_D(\lambda_s) \in D \cap \mathbb{C}\lambda_s,\ \forall s \in \Gamma.$$

claim 3 部分群 $\Lambda := \{s \in \Gamma \mid \lambda_s \in D\}$ に対し, 以下が成立.

$$E_D(\lambda_s) = \begin{cases} \lambda_s & : s \in \Lambda \text{ の時}, \\ 0 & : s \notin \Lambda \text{ の時}. \end{cases}$$

claim 4 $D = E_D(A \rtimes \Gamma) = A \rtimes \Lambda$ を得る.

定理 (Izumi,2002)

以下は全単射:

$$\{\Lambda \leq \Gamma\} \ni \Lambda \mapsto A \rtimes_{\alpha,r} \Lambda \in \{D \mid A \subset D \subset A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma\}$$

包含の離散性

$B \overset{E}{\subset} A$ を単純 C* 環の既約 $(M(A) \cap B' = \mathbb{C})$ な包含とする.

離散的包含

包含 $B \subset A$ が "離散的" であるとき，A は B 双加群としての既約分解

$$A \cong \overline{\oplus_s X_s \otimes \mathbb{A}(s)}$$

を持つ．各既約 B 双加群 X_s は有限指数を持ち，重複度 $\dim \mathbb{A}(s)$ は有限.

例 17

$\beta\colon \Gamma \curvearrowright B$ を離散群作用, $\alpha\colon G \curvearrowright A$ をコンパクト群作用とする．適切な仮定 (単純性，外部性，極小性) のもと,

$$A^G \subset A, \qquad B \subset B \rtimes \Gamma \qquad \text{は離散的.}$$

離散的包含とガロア対応

$B \overset{E}{\subset} A$ を単純 C* 環の既約 $(M(A) \cap B' = \mathbb{C})$ な包含とする.

問

$B \subset A$ が離散的であるとき，$B \subset D \subset A$ なら $B \subset D$ は離散的？

- フォンノイマン環の既約な包含では常に正しい．(Tomatsu 2008)
- 条件付き期待値 $E_D \colon A \to D$ が存在すれば，$B \subset D$ は離散的.
  $\cdots$ $B \subset A$ が有限指数を持てば常に正しい.
- 離散群作用やコンパクト群作用から現れる包含 $B \subset B \rtimes \Gamma$, $A^G \subset A$ に対し，上の主張が真であることとガロア対応の成立は同値.
  $\cdots$ 単純性や外部性，極小性の仮定のもと常に正しい．(Cameron-Smith 2017, Izumi 2024, M. 2024)
- **コンパクト量子群**作用から現れる C* 環の包含では未解決.

まとめ

G: コンパクト群, Γ: 離散群, N, M: 因子環, A, B : (可分)C* 環

定理 (Izumi-Longo-Popa 1998)

極小作用 $\alpha\colon G \curvearrowright M$ と外部作用 $\beta\colon \Gamma \curvearrowright N$ に対し，次は全単射.

$$\{H \leq_{closed} G\} \ni H \mapsto M^H \in \{P \mid M^G \subset P \subset M\}$$

$$\{\Lambda \leq \Gamma\} \ni \Lambda \mapsto N\overline{\rtimes}\Lambda \in \{Q \mid N \subset Q \subset N\overline{\rtimes}\Gamma\}$$

定理 18 (Izumi 2002, Cameron-Smith 2017, Izumi 2024, M. 2024)

単純 C^* 環への外部作用 $\beta\colon \Gamma \curvearrowright B$ と単純な不動点環 A^G を持つ極小作用 $\alpha\colon G \curvearrowright A$ に対し，次の全単射が成立する.

$$\{H \leq_{closed} G\} \ni H \mapsto A^H \in \{D \mid A^G \subset D \subset A\}$$

$$\{\Lambda \leq \Gamma\} \ni \Lambda \mapsto B \rtimes_{\beta,r} \Lambda \in \{D \mid B \subset D \subset B \rtimes_{\beta,r} \Gamma\}$$

今後の展望・課題

課題

一般に，単純 C^* 環の既約な包含 $B \overset{E}{\subset} A$ が離散的であるとき，すべての中間環を特定できるか？

定理 19 (Hernández Palomares–Nelson 2024)

単位的で離散的な包含 $B \overset{E}{\subset} A$ と中間環 $B \subset D \subset A$ に対し次が成立する．

(1) テンソル圏の外部作用 $F\colon \mathcal{C} \curvearrowright B$ と “C^* 環対象 $\mathbb{A} \in \mathrm{Vec}\,\mathcal{C}$” が存在し，
$A \cong B \rtimes_F \mathbb{A}$.

(2) $B \subset D$ が離散的．$\Leftrightarrow$ C^* 環対象 $\mathbb{D} \leq \mathbb{A}$ により，$D \cong B \rtimes_F \mathbb{D}$.

問題点

離散的包含 $B \overset{E}{\subset} A$ と中間環 $B \subset D \subset A$ に対し，$B \overset{E|}{\subset} D$ は離散的か?

[1] J. Cameron and R. R. Smith; *A Galois correspondence for reduced crossed products of simple C^*-algebras by discrete groups.* Canad. J. Math. **71**(2019), no. 5, 1103–1125.

[2] R. Hernández Palomares and B. Nelson; *Discrete inclusions of C^*-algebras.* arXiv: 2305.05072v2.

[3] M. Izumi, R. Longo, and S. Popa; *A Galois correspondence for compact groups of automorphisms of von Neumann algebras with a generalization to Kac algebras.* J. Funct. Anal. **155**(1998), no. 1, 25–63.

[4] M. Izumi; *Inclusions of simple C^*-algebras.* J. Reine Angew. Math. **547** (2002), 97–138.

[5] M. Izumi; *Minimal compact group actions on C^*-algebras with simple fixed point algebras.* preprint, arXiv:2405.03231v1

[6] M. Mukohara; *Inclusions of simple C^*-algebras arising from compact group actions.* J. Funct. Anal. **288** (2025), no. 2.