

スーパー Lie 代数に由来する q 級数の等式について

鈴木美裕

三角数とは「点を正三角形に配置したときの点の総数」であり、例えば各辺に 3 個の点を配置すると



なので 3 番目の三角数は 6 である。一般に n 番目の三角数 T_n は $T_n = n(n+1)/2$ で与えられる。任意の自然数は高々 4 個の三角数の和で表わせる^{*1}ことが知られている。さらに、与えられた自然数 N に対して 4 個以下の三角数の和の形で N を表わす方法が何通りあるかを、次の定理により計算することができる。

定理 (Legendre, 1828). 任意の $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\#\{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^4 \mid T_{n_1} + T_{n_2} + T_{n_3} + T_{n_4} = N\} = \sum_{d \mid (2N+1)} d.$$

級数 $\Delta(q)$ を $\Delta(q) = \sum_{n \geq 0} q^{n(n+1)/2}$ で定めると、上の Legendre の定理は次の恒等式と同値である:

$$\Delta(q)^4 = \sum_{N \geq 0} \left(\sum_{d \mid (2N+1)} d \right) q^N.$$

松坂俊輝氏 (九州大学) との共同研究において、講演者は Legendre の定理の類似として次の定理を得た。

定理 ([MS25a]).

$$\begin{aligned} \Delta(q)^{2m(2m+1)} &= \frac{1}{m! \left(\prod_{j=1}^m (2j-1)! \right)^2} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_m \geq 0 \\ r_1, \dots, r_m \geq 0}} (-1)^{k_1 + \dots + k_m} \\ &\times \prod_{1 \leq i < j \leq m} (r_i + k_i - r_j - k_j)(r_i - r_j)(2 + r_i + k_i + r_j + k_j)(1 + r_i + r_j) \\ &\times \prod_{j=1}^m (1 + 2r_j)(1 + r_j + k_j) q^{\sum_{j=1}^m (k_j^2 + 2k_j r_j + 2k_j + r_j) - \frac{m(m-1)}{2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

等式 (1) は Kwac と協本の論文 [KW94] において Conjecture 5.1 として提示されたもので、論文 [KW94] では affine スーパー Lie 代数の分母公式を特殊化することでこの等式が導けるだろうと述べられている。論文 [MS25a] では (1) に対して次のような 2 通りの独立な証明を与えた:

- 解析的な証明 … 級数 $q^{1/16} \Delta(q^{1/2})$ に対して $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, ($\tau \in \mathbb{H}$) とおいて上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数とみなすと、これは重さ $1/2$ でレベル $\Gamma(2)$ のモジュラー形式である。したがって、(1) の右辺がモジュラー形式であって左辺と同じ重さ、同じレベルをもち、各尖点における漸近挙動も一致していることを示せば、Liouville の定理から等式 (1) が導ける。

*1 実際には 3 個で十分。

- 代数的な証明 … affine スーパー Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{spo}}(2m, 2m+1)$ の分母公式は、次の形の恒等式である:

$$\frac{\prod_{\alpha \in \widehat{\Phi}_0^+} (1 - e^{-\alpha})}{\prod_{\alpha \in \widehat{\Phi}_1^+} (1 + e^{-\alpha})} = \frac{e^{-\widehat{\rho}}}{2^m m!} \sum_{x \in M} \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) t_x w \left(\frac{e^{\widehat{\rho}}}{\prod_{\beta \in S} (1 + e^{-\beta})} \right).$$

ここで左辺の $\widehat{\Phi}_0^+$ (resp. $\widehat{\Phi}_1^+$) は $\widehat{\mathfrak{spo}}(2m, 2m+1)$ の even (resp. odd) は正ルートの集合. また右辺の $W \simeq (\mathfrak{S}_m \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m) \times (\mathfrak{S}_m \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m)$ は $\mathfrak{spo}(2m, 2m+1)$ の Weyl 群であり, t_x はコルート格子 $M \simeq \mathbb{Z}^m$ の作用を表わす. スルルート δ に対して $q = e^{-\delta}$ とおき, 分母公式の左辺を適切に特殊化すると $\Delta(-q)^{2m(2m+1)}$ が得られる. 右辺も同様に特殊化することで (1) の右辺が得られる.

等式 (1) は affine スーパー Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{spo}}(2m, 2m+1)$ の分母公式から導かれるが, 他にもいくつかの affine スーパー Lie 代数から同様の計算により (1) と似た $\Delta(q)^N$ の展開式が得られる. 論文 [MS25b] では他に 6 つのケースで同様の等式を証明した. そのうち例えば $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{spo}}(2m, 2m+2)$ の分母公式からは $\Delta(q)^{4m^2}$ の展開式が得られ, 特に $m=1$ の場合を考えると Legendre の定理を導くこともできる.

講演では 2 通りの証明それぞれの詳しいアイディアなどについて説明した.

参考文献

- [KW94] V. Kac and M. Wakimoto, *Integrable highest weight modules over affine superalgebras and number theory*, Progress in Math., **123**, 1994, pp.415–456
- [MS25a] T. Matsusaksa and M. Suzuki, *Denominator identity for the affine Lie superalgebra $\widehat{\mathfrak{spo}}(2m, 2m+1)$ and indefinite theta functions*, Res. Math. Sci., **12**, no. 62, 2025, pp.26 pp.
- [MS25b] ———, *Indefinite theta functions arising from affine Lie superalgebras and sums of triangular numbers*, preprint, 2025+; available at [arXiv:2506.04722](https://arxiv.org/abs/2506.04722)