圧縮性 Navier-Stokes 方程式の 球対称定常問題について

橋本 伊都子 (金沢大学 理工研究域)

本研究は大阪大学の松村昭孝氏との共同研究に基づく. n 次元空間 $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ の外部領域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| > r_0\}$ における圧縮性 Navier-Stokes 方程式, 特に粘性・熱伝導性気体の理想ポリトロピックモデルについて考える:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ (\rho U)_t + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p = \nabla \cdot D, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ \left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} |U|^2 \right) \right\}_t + \nabla \cdot \left\{ \rho U \left(e + \frac{1}{2} |U|^2 \right) \right\} + \nabla \cdot (pU) = \nabla \cdot (DU + \kappa \nabla \theta), \end{cases} \quad (1)$$

ここに r_0 は正定数, $\rho = \rho(t, x)$ は質量密度, $U = U(t, x)$ は流速, $p = R\rho\theta$ は圧力を表し (R は気体定数), $e = c_V\theta$ ($c_V > 0$) は内部エネルギーを表し c_V は定積比熱, θ は絶対温度を表す. さらに

$$D = 2\nu \Theta + \lambda (\nabla \cdot U) I, \quad \Theta = \frac{1}{2} \{ \nabla \otimes U + {}^t(\nabla \otimes U) \}, \quad (2)$$

とする. ここで ν は歪粘性係数, λ は第二粘性係数と呼ばれる. ここで (1) に対する球対称問題を考察する. 即ち,

$$\rho(t, x) = \rho(t, |x|), \quad U(t, x) = \frac{x}{|x|} u(t, |x|), \quad \theta(t, x) = \theta(t, |x|), \quad (3)$$

としてスカラー値関数 $u(t, |x|)$ を導入し, $r = |x|$ に関して空間 1 次元化した方程式

$$\begin{cases} (r^{n-1}\rho)_t + (r^{n-1}\rho u)_r = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_r + (n-1)\frac{\rho u^2}{r} = \nu \left(\frac{r^{n-1}u}{r^{n-1}} \right)_r, \quad r > r_0, t > 0 \\ \left\{ \rho \left(c_V\theta + \frac{1}{2}u^2 \right) \right\}_t + \frac{\{ r^{n-1}\rho u (c_V\theta + \frac{1}{2}u^2) \}_r}{r^{n-1}} + \frac{(r^{n-1}p u)_r}{r^{n-1}} \\ = \kappa \frac{(r^{n-1}\theta)_r}{r^{n-1}} + \mu \left(\frac{r^{n-1}u}{r^{n-1}} \right)_r u + \Psi, \\ \Psi = 2\nu u_r^2 + 2\nu(n-1)\left(\frac{u}{r}\right)^2 + \lambda \left(u_r + \frac{n-1}{r}u \right)^2, \end{cases} \quad (4)$$

に対し, 初期値条件および遠方条件については以下を課す.

$$(\rho, u, \theta)(0, r) = (\rho_0, u_0, \theta_0)(r), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} (\rho, u, \theta)(t, r) = (\rho_+, u_+, \theta_+). \quad (5)$$

本講演では流入問題について考察し, 境界条件としては以下を課す.

$$(\rho, u, \theta)(t, r_0) = (\rho_-, u_-, \theta_-) \quad (u_- > 0). \quad (6)$$

ここに $\mu = 2\nu + \lambda$ であり, また $\rho_{\pm} > 0, u_{\pm}, \theta_{\pm}$ は与えられた定数である. Matsumura-Nishihara [2] は $u_- = 0$ のもとで $\mathbb{R}^3$ における閉領域の外部領域において球対称とは限らない (1) の定常解の漸近安定性を示した. また Jiang [1] により $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ における球対称解の漸近安定性が考察され, さらに Nakamura-Nishibara [3] が $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ においてポテンシャル外力がある場合の定常解の漸近安定性を考察した. しかし

ながら境界から流入, 流出がある場合即ち $u_- \neq 0$ の場合は定常解の存在は知られていないため今回, 定常解の存在について若干の結果を得たので紹介する. (4) に対する定常問題は次の境界値問題として書ける:

$$\begin{cases} \frac{(r^{n-1}\rho u)_r}{r^{n-1}} = 0, \\ \frac{(r^{n-1}\rho u^2)_r}{r^{n-1}} + p_r = \mu \left(\frac{(r^{n-1}u)_r}{r^{n-1}} \right)_r, & r_0 \geq 0, \\ \frac{\{r^{n-1}\rho u (e + \frac{1}{2}u^2)\}_r}{r^{n-1}} + \frac{(r^{n-1}pu)_r}{r^{n-1}} = \sigma \frac{(r^{n-1}\theta_r)_r}{r^{n-1}} + \mu \left(\frac{(r^{n-1}u)_r}{r^{n-1}} \right)_r u + \Psi, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} (\rho, u, \theta)(r) = (\rho_+, u_+, \theta_+), \quad (\rho, u, \theta)(r_0) = (\rho_-, u_-, \theta_-). \end{cases} \quad (7)$$

ここに, (7) の第一式と密度に関する遠方条件 $\rho_+ > 0$ より, $u_+ = 0$ が定常解が存在するための必要条件であることに注意する. 境界値問題 (7) について, 以下の結果が得られた.

定理 $n \geq 3$ かつ $u_- > 0, u_+ = 0$ とする. このとき任意の $\rho_+ > 0$ に対して, ある正定数 ϵ_0 と C が存在して以下が成立する. $|u_-| + |\rho_- - \rho_+| + |\theta_- - \theta_+| \leq \epsilon_0$ ならば境界値問題 (7) に滑らかな定常解がただ一つ存在して以下が成立する.

$$\begin{aligned} |\rho(r) - \rho_+|, |\theta(r) - \theta_+| &\leq Cr^{-(n-2)}(|\rho_+ - \rho_-| + |\theta_+ - \theta_-| + |u_-|), \\ C^{-1}r^{-(n-1)}|u_-| &\leq |u(r)| \leq Cr^{-(n-1)}|u_-|, \quad r \geq r_0. \end{aligned}$$

証明は遠方状態での線形化方程式を利用した逐次近似法によりなされる. また $u_- = 0$ のとき (7) の解として自明解が構成できることに注意する, $\rho_- \neq \rho_+$ であれば $u_- \rightarrow +0$ としたとき, 質量密度について境界層が現れることが予測されるが, こちらについては今後の課題である.

参考文献

- [1] S. Jiang, Global spherically symmetric solutions to the equations of a viscous polytropic ideal gas in an exterior domain, *Comm. Math. Phys.* 178 (1996), 339-374.
- [2] A. Matsumura and T. Nishida, Initial-boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, *Comm. Math. Phys.* 89 (1983), 445-464.
- [3] T. Nakamura, S. Nishibata, Large-time behavior of spherically symmetric flow of heat-conductive gas in a field of potential forces, *Indiana Univ. Math. J.* 57 (2008), no.2, 1019-1054.