

クイバーから得られる冪零および可解 リー代数と幾何構造

溝口 史華

理化学研究所 革新知能統合研究センター 数理科学チーム

2026/9/10

- 1 背景
- 2 既知の例
- 3 Quiver から得られる Lie 代数
- 4 例
- 5 結果

微分幾何学における一般的な問題

いつ Lie 群 G は特別な左不変幾何構造を許容するか？

微分幾何学における一般的な問題

いつ Lie 群 G は特別な左不変幾何構造を許容するか？

単連結 Lie 群 G

+

左不変計量

$\longleftrightarrow$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$

+

内積

微分幾何学における一般的な問題

いつ Lie 群 G は特別な左不変幾何構造を許容するか？

単連結 Lie 群 G

+

左不変計量

$\longleftrightarrow$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$

+

内積

いつ Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は特別な内積を許容するか？

$\mathfrak{g}$ 上の特別な内積の存在性

$\longleftrightarrow$

$\mathfrak{g}$ の代数的性質

- Ricci-flat
- Einstein
- 代数的 Ricci soliton...

- simple
- nilpotent
- solvable...

定義

$(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$: 内積つき Lie 代数, $\text{Ric} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$,

- $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$: Ricci-flat $\iff \text{Ric} = 0$.
- $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$: Einstein $\iff \exists c \in \mathbb{R}, \text{Ric} = c \cdot \text{id}$.
- $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$: 代数的 Ricci soliton $\iff \exists c \in \mathbb{R}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), \text{Ric} = c \cdot \text{id} + D$.

定義

$(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$: 内積つき Lie 代数, $\text{Ric} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$,

- $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$: Ricci-flat $\iff \text{Ric} = 0$.
- $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$: Einstein $\iff \exists c \in \mathbb{R}, \text{Ric} = c \cdot \text{id}$.
- $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$: 代数的 Ricci soliton $\iff \exists c \in \mathbb{R}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), \text{Ric} = c \cdot \text{id} + D$.

定義

$\mathfrak{g}$: Lie 代数, $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$.

- $\mathfrak{g}$: m -step nilpotent Lie 代数 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathfrak{g}^{m-1} \neq 0, \mathfrak{g}^m = 0$,
- $\mathfrak{g}$: solvable Lie 代数 $\stackrel{\text{def}}{\iff} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は nilpotent.

問題点

- nilpotent および solvable Lie 代数は一般的な議論が困難.
- 計算が困難 (特に step 数が高い場合).
- 扱いやすい具体例の不足.

問題点

- nilpotent および solvable Lie 代数は一般的な議論が困難.
- 計算が困難 (特に step 数が高い場合).
- 扱いやすい具体例の不足.

Quiver Q



nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$, solvable Lie 代数 $\mathfrak{s}_Q$

$\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{s}_Q$ 上の幾何構造の存在性 $\longleftrightarrow$ Q の組合せ論的性質

既知の例

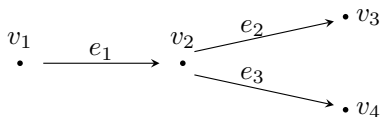
定義 (Dani-Mainkar, 2004)

$\Gamma = (V, E \subset V \times V)$: 有向単純グラフに対して,

$$\mathfrak{n}_\Gamma = \text{span}(V \cup E)$$

$$[x, y] = \begin{cases} e & (x, y \in V, e = (x, y)) \\ -e & (x, y \in V, e = (y, x)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とすると, 2-step nilpotent Lie 代数を得る.



$\Rightarrow$

$$\mathfrak{n}_\Gamma = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, e_1, e_2, e_3\}$$

$$[v_1, v_2] = e_1, [v_2, v_3] = e_2$$

$$[v_2, v_4] = e_3$$

定理 (Lauret-Will, 2011)

グラフから得られる Lie 代数には, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する場合と存在しない場合がある.

また, その判定条件も知られている.

Quiver から得られる Lie 代数

Quiver : 多重辺とループを許す有向グラフ.

定義

V, E : 集合, $s, t: E \rightarrow V$ に対して, $Q = (V, E, s, t)$ を quiver という.

- V の元を 頂点, E の元を 矢 という.
- $e \in E$ に対して, $s(e)$ を 始点, $t(e)$ を 終点 という.

定義

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in E$ に対して,

列 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$: 長さ m の道 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1}) \quad (\forall i).$

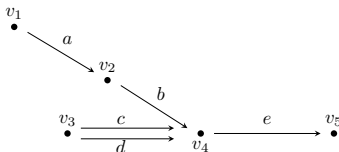
注意

一般に, 頂点は長さ 0 の道とする.

$Q = (V, E, s, t)$:

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,
- $E = \{a, b, c, d, e\}$,
- $s(a) = v_1, s(b) = v_2, s(c) = v_3, s(d) = v_3, s(e) = v_4$,
- $t(a) = v_2, t(b) = v_4, t(c) = v_4, t(d) = v_4, t(e) = v_5$.

- 長さ 0 の道: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ,
- 長さ 1 の道: a, b, c, d, e ,
- 長さ 2 の道: ab, be, ce, de ,
- 長さ 3 の道: abe .



(※長さ 1 以上の道は頂点を省略して書く.)

- Q : quiver,
- $\text{Path}(Q) = \{Q \text{ のすべての道 } \}$
 $\mathfrak{s}_Q = \text{span Path}(Q).$

$x, y \in \text{Path}(Q)$ に対して,

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & (xy \text{ が道 } (t(x) = s(y))), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

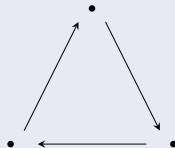
括弧積を

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

と定めると, Lie 代数となる.

この Lie 代数 $\mathfrak{s}_Q$ を Q から得られる Lie 代数 という.

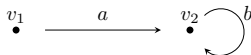
cycle: 始点と終点が一致する道



注意

cycle を持つ quiver から得られる Lie 代数は, 無限次元である.

例



cycle を含まない有限 quiver Q に対して, Q のすべての道の長さの最大値が存在する. これを quiver の長さ という.

- Q : cycle を含まない有限 quiver,
- $\text{Path}(Q)_{\geq 1} = \{ \text{長さ 1 以上の道} \},$
- $\text{Path}(Q)_{\geq 0} = \{ \text{長さ 0 以上の道} \}.$

定義

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_Q &= \text{span Path}(Q)_{\geq 1}, \\ \mathfrak{s}_Q &= \text{span Path}(Q)_{\geq 0}. \end{aligned}$$

命題

長さ m の quiver Q 対して,

- Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ は m -step nilpotent Lie 代数である.
- Lie 代数 $\mathfrak{s}_Q$ は $[\mathfrak{s}_Q, \mathfrak{s}_Q] = \mathfrak{n}_Q$ の solvable Lie 代数である.

$$\begin{array}{ccccc} v_1 & & a & & v_2 & & b & & v_3 \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \bullet \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathfrak{n}_Q = \text{span}\{a, b, ab\} \quad | \quad \mathfrak{s}_Q = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, a, b, ab\}$$

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = ab$$

$$[a, ab] = 0, [b, ab] = 0$$

$$[v_1, a] = v_1 \cdot a - a \cdot v_1 = a$$

$$[v_2, a] = v_2 \cdot a - a \cdot v_2 = -a$$

$$[v_2, b] = b, [b, v_3] = b,$$

$$[v_1, ab] = ab, [ab, v_3] = ab$$

$$\simeq \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & x_1 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\simeq \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_4 & x_6 \\ \hline 0 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & x_3 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

背景
○○○

既知の例
○○○

Quiver から得られる Lie 代数
○○○○○○

例
○●

結果
○○○○○○○○○○○○○○

背景
○○○

既知の例
○○○

Quiver から得られる Lie 代数
○○○○○○

例
○○

結果
●○○○○○○○○○○○○

結果

結果 1

$\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{s}_Q$ 上の幾何構造の存在性 $\longleftrightarrow$ Q の組合せ論的性質

- $Q = (V, E, s, t)$: cycle を含まない有限 quiver,
- $\text{Path}(Q)_{\geq 1}$: Q の長さ 1 以上すべての道の集合,
- $\mathfrak{n}_Q$: Q から得られる nilpotent Lie 代数

定理 (M. -Tamaru, 2025)

$\mathfrak{n}_Q$ は常に代数的 Ricci soliton を許容する.

注意

定理で得られた内積 $\langle, \rangle$ は, 次を満たす:

- $\langle, \rangle$ は $\text{Path}(Q)_{\geq 1}$ を直交基底とする内積で, 正規直交基底とは限らない. $\forall x \in \text{Path}(Q)$,

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{2} (\#T_{t(x)} + \#S_{t(x)} + 1).$$

ここで, $v \in V$ に対して

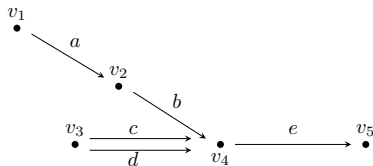
$$T_v = \{y \in \text{Path}(Q)_{\geq 1} \mid t(y) = v\},$$

$$S_v = \{y \in \text{Path}(Q)_{\geq 1} \mid s(y) = v\}.$$

- $\text{Ric} = -\text{id} + D$, $D \in \text{Der}(\mathfrak{n}_Q)$ は $\text{Path}(Q)_{\geq 1}$ に関して対角.

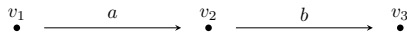
$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{2} (\#T_{t(x)} + \#S_{t(x)} + 1)$$

例)



- $\langle b, b \rangle = (1/2)(4 + 1 + 1),$
- $\langle be, be \rangle = (1/2)(5 + 0 + 1)...$

例)



- $\langle a, a \rangle = (1/2)(1 + 1 + 1),$
- $\langle b, b \rangle = \langle ab, ab \rangle = (1/2)(2 + 0 + 1)$

- $Q = (V, E, s, t)$: cycle を含まない有限 quiver,
- $\text{Path}(Q)_{\geq 1}$: Q の長さ 1 以上すべての道の集合,
- $\mathfrak{n}_Q$: Q から得られる nilpotent Lie 代数

定理 (M. -Tamaru, 2025)

$\mathfrak{n}_Q$ は常に代数的 Ricci soliton を許容する.

この方法によって, 任意の step 数の Ricci soliton を許容する nilpotent Lie 群が得られる.

結果 2-1

定理 (Lauret, 2011)

- $(\mathfrak{s}, \langle, \rangle)$: 代数的 Ricci soliton
 $\Rightarrow (\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}], \langle, \rangle|_{\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}})$: 代数的 Ricci soliton.
- $(\mathfrak{n}, \langle, \rangle)$: 代数的 Ricci soliton nilpotent Lie 代数
 $\Rightarrow \exists (\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \langle, \rangle')$: 代数的 Ricci soliton
s.t. $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{n}, \langle, \rangle'|_{\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}} = \langle, \rangle$.
- $Q = (V, E, s, t)$: cycle を含まない有限 quiver,
- $\mathfrak{s}_Q$: Q から得られる solvable Lie 代数
($(\mathfrak{n}_Q = [\mathfrak{s}_Q, \mathfrak{s}_Q]), \exists \langle, \rangle$): 代数的 Ricci soliton).

定理

$\exists \langle, \rangle$: $\mathfrak{s}_Q$ 上の内積 s.t. $(\mathfrak{s}_Q, \langle, \rangle)$ は代数的 Ricci soliton.

問題

先の定理で得られた代数的 Ricci soliton $(\mathfrak{s}_Q, \langle, \rangle)$ はより特別な内積は許容しないのか？ (Einstein など...)

定理 (Lauret, 2001)

$(\mathfrak{n}, \langle, \rangle)$: 代数的 Ricci soliton nilpotent Lie 代数
 $\Rightarrow \exists(\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \langle, \rangle')$: Einstein solvable Lie 代数.

$\mathfrak{s}_Q$ は Einstein を許容しない. ($\because \mathfrak{s}_Q = (\text{abelian}) \oplus \mathfrak{s}'$)

$\Rightarrow \langle, \rangle \simeq (\text{flat}) \oplus (\text{Einstein}). ?$

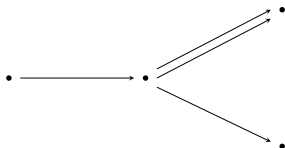
例

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_4 & x_6 \\ \hline 0 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & x_3 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \underbrace{\left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \end{array} \right) \right\}}_{\text{flat}} \oplus \underbrace{\left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_4 & x_6 \\ \hline 0 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & x_3 \end{array} \right) \mid \text{tr} = 0 \right\}}_{\text{Einstein}}
 \end{aligned}$$

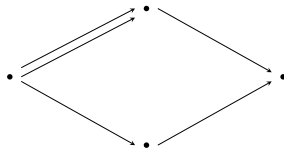
結果 2-2

Q : oriented multi-tree

$\Leftrightarrow$ 向きと多重辺を無視すると tree.
def



×



定理

Q : oriented multi-tree

$\Rightarrow \exists \langle, \rangle: \mathfrak{s}_Q$ 上の内積 s.t.

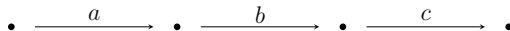
$$(\mathfrak{s}_Q, \langle, \rangle) \simeq (\text{flat}) \oplus (\text{Einstein})$$

今後の展望 1

〈構成方法の拡張〉

- Q : 長さ m の quiver,
- $\text{Path}(Q)_{\geq 1}^k$: 長さ 1 以上 k 以下すべての道 ($k \leq m$).
 $\mathfrak{n}_Q^k := \text{span Path}(Q)_{\geq 1}^k.$

例) Q : 長さ 3 の quiver, ($k = 2$)



$$\mathfrak{n}_Q^2 = \text{span Path}(Q)_{\geq 1}^2 = \{a, b, c, ab, bc\}$$

$[a, b] = ab$, $[b, c] = bc$, その他 0.

$\Rightarrow \mathfrak{n}_Q^2$ は長さ 2 の quiver からは得られない.

今後の展望 2

〈他の幾何構造〉

- Ricci-flat 擬 Riemann 計量
 n_Q が 2-step のときは, すべて許容する (符号数に制限あり).
- symplectic 構造
 n_Q が 2-step のときは, 許容するための必要十分条件がわかっている.

ご清聴ありがとうございました。