

特異点付き曲面の幾何

神戸大学大学院理学研究科

島田 瑠奈 (Runa Shimada)*

1 導入

本講演では、写像の局所的な振る舞いのみに注目するため、写像は断りのない限りすべて写像芽として述べる。

定義 1.1. M を m 次元多様体, N を n 次元多様体とし, $p \in M$ の開近傍 U_1 で定義された写像 $f_1 : U_1 \rightarrow N$ と $p \in M$ の開近傍 U_2 で定義された写像 $f_2 : U_2 \rightarrow N$ が p において同じ写像芽を定めるとは, ある p の近傍 W が存在して, $f_1|_W = f_2|_W$ が成り立つときをいう. この同値類 $f : (M, p) \rightarrow (N, f(p))$ を f の p における写像芽という.

定義 1.2. 2つの写像芽 $f, g : (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ が $\mathcal{A}$ 同値または右左同値であるとは, 定義域の座標変換 $\varphi : (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^m, 0)$ と像域の座標変換 $\psi : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ が存在して $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が成り立つときをいう.

この同値関係は写像芽の定義域と像域の座標変換, つまり微分同相写像で移り合うものはすべて等しいとみなすものであり, 写像の幾何的な性質を扱う立場から自然なものである. この同値関係で考えると, 微分の階数が最大となっている点の写像芽はすべて同値になる. したがって, 注目するのは次で定義する特異点である.

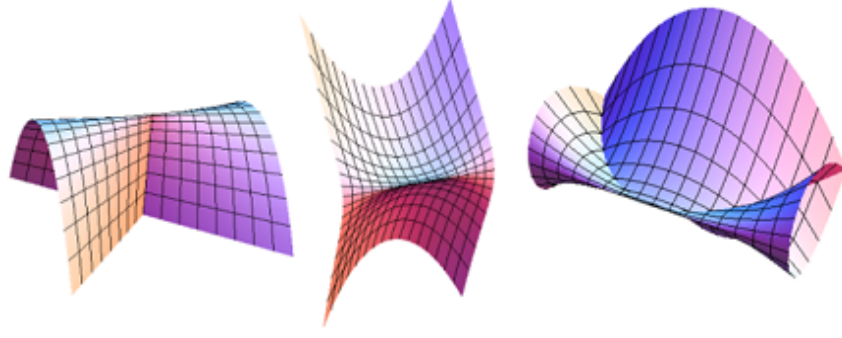
定義 1.3. 多様体間の写像 $f : M \rightarrow N$ が $p \in M$ において特異点であるとは, $\text{rank } df_p < \min\{m, n\}$ となるときをいう. ただし, $\dim M = m$, $\dim N = n$ である. さらに, $S(f)$ で f の特異点集合を表す.

定義 1.4. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ において, 定義域のベクトル場 η が退化ベクトル場であるとは, $p \in S(f)$ ならば, η が $\ker df_p$ の生成元であるときをいう.

曲面に最もよくあらわれるのはホイットニーの傘と呼ばれる特異点で, $(u, v) \mapsto (u, uv, v^2)$ と原点で $\mathcal{A}$ -同値になる写像芽のことをいう. また, 次によく現れるのは $S_1^\pm$ 特異点で $(u, v) \mapsto (u, v^2, v(u^2 \pm v^2))$ と原点で $\mathcal{A}$ -同値になる写像芽のことをいう.

特異点においては通常単位法線ベクトルが定義されず, このために曲面の性質を表している幾何学的量が意味を失う. そのような場合の有効な方法の一つが normal form (正確には $SO(3)$ -normal

* E-mail: 231s010s@stu.kobe-u.ac.jp



左: ホイットニーの傘, 中: S_1^+ 特異点, 右: S_1^- 特異点

form) と呼ばれるものである.

定理 1.5. [1] 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ がホイットニーの傘とする. このとき, 向きを保つ微分同相写像芽 $\varphi : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$ と $T \in SO(3)$ が存在して,

$$T \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v) = \left(u, uv + O(3), \frac{1}{2} (a_{20}u^2 + 2a_{11}uv + a_{02}v^2) + O(3) \right) \quad (1.1)$$

と書ける. ただし, $a_{20}, a_{11}, a_{02} \in \mathbf{R}$ である. この式 (1.1) をホイットニーの傘の **normal form** という.

2 特異点の変形

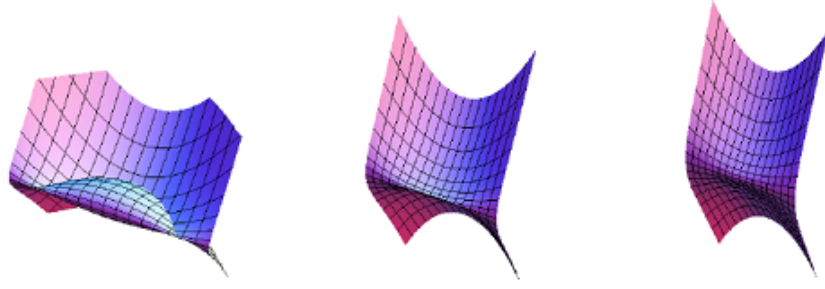
本節で注目するのは, 特異点の変形である. 一番あらわれやすい特異点の次にあらわれやすい特異点は特異点の出現や消滅に対応するような, 写像の 1 パラメーター変形にあらわれるものである. したがって, この節では, 変形について詳しく述べる.

定義 2.1. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が $g : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ の変形であるとは, $f(u, v, 0) = g(u, v)$ と $f(0, 0, s) = (0, 0, 0)$ を満たすことである.

この定義において, 定義域に追加した $s \in \mathbf{R}$ が写像の変形を表すパラメーターであり**変形パラメーター**という. 写像芽の変形に対しては変形パラメーターを保つ右左同値を考えるのが適切である. また, 以下は変形の例である.

$$f_s : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \ni (u, v, s) \mapsto (u, v^2, v(u^2 + v^2) + sv) \in (\mathbf{R}^3, 0)$$

定義 2.2. 2つの写像芽 $f_1, f_2 : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ を $g : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ の変形とする. このとき f_1 と f_2 が**変形として同値**であるとは, $\psi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}(u, v, s) = f_2(u, v, s)$ となる微分同相写像芽 $\varphi : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0)$ と $\psi : (\mathbf{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が存在することをいう. ただし, $\varphi(u, v, s) = (\varphi_1(u, v, s), \varphi_2(u, v, s), \varphi_3(s))$ の形である.



左: f_{-1} , 中: f_0 , 右: f_1

ここで定義域の第 3 成分が変形パラメーターであり, φ_3 が s にしか依存しないように定義されているのは, 変形パラメーター自体の変化は許すが, 変形パラメーターに他のパラメーターが影響を与えないようにするためである. ゆえに, この定義は変形パラメーターを保つような $\mathcal{A}$ -同値である.

注意 2.3. [4] 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ において, $\text{rank } df_0 = 1$ となる写像芽の 2-ジェットは, $(u, v^2, 0)$, (u, v^2, uv) , $(u, uv, 0)$, $(u, 0, 0)$ の 4 種類のいずれかと $\mathcal{A}$ -同値になる.

本講演では 2-ジェットが $(u, v^2, 0)$ または (u, v^2, uv) と $\mathcal{A}$ -同値となるものだけに注目する. また, 写像の幾何学的性質を調べたいため, 次の変形まで含めた $SO(3)$ -標準形を導入する.

定理 2.4. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ を $g : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ の変形とする. ただし, $j^2 g$ は $(u, v^2, 0)$ または (u, v^2, uv) と $\mathcal{A}$ -同値である. このとき, 定義 2.2 の向きを保つ微分同相写像芽 $\varphi : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, 0)$ と $T \in SO(3)$ と関数 $f_{21}, f_{31} \in C^\infty(1, 1)$, $f_{24}, f_{33}, f_{34} \in C^\infty(2, 1)$, $f_{32} \in C^\infty(3, 1)$ が存在して,

$$\begin{aligned} f_n^s &:= T \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v, s) \\ &= (u, u^2 f_{21}(u) + v^2 + u s f_{24}(u, s), \\ &\quad u^2 f_{31}(u) + v^2 f_{32}(u, v, s) + v f_{33}(u, s) + u s f_{34}(u, s)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

が成り立つ. ただし, $f_{32}(0, 0, 0) = f_{33}(0, 0) = 0$ である. $j^2 g$ が $(u, v^2, 0)$ と $\mathcal{A}$ -同値ならば, $(f_{33})_u(0, 0) = 0$ であり, (u, v^2, uv) と $\mathcal{A}$ -同値ならば, $(f_{33})_u(0, 0) \neq 0$ である. また, 原点で $S_1^\perp$ 特異点をもつ必要十分条件は $(f_{32})_v(0, 0, 0) \neq 0$, $(f_{33})_{uu}(0, 0) \neq 0$ である.

この写像 f_n^s の特異点集合 $S(f_n^s)$ は, $S(f_n^s) = \{(u, v) \mid v = 0, f_{33}(u, s) = 0\}$ である. この定理において与えられた f と f_n^s は変形として同値であり, さらに像域の微分同相写像は, $SO(3)$ の元であるため f と f_n^s は同じ幾何学的な性質をもつ. さらに, この式の係数 f_{ij} はすべて定義域の微分同相写像と像域の $SO(3)$ の作用で不変であり, 写像の幾何学的な性質を表現できる. これを用いて変形まで含めた特異点の性質を述べる.

3 特異点の変形の幾何学的性質

ここでは $S_1^\pm$ 特異点の変形に焦点をあてる. さらに, $SO(3)$ -normal form を用いることで, いくつかの幾何学的性質を述べる. $S_1^\pm$ 特異点の変形の条件を考慮すると, (2.1) 内の f_{33} は,

$$f_{33}(u, s) = s + usf_{331}(s) + u^2f_{332}(s) + u^3f_{333}(s) + u^4f_{334}(u, s),$$

と書きかえられる. さらに, $f_{332}(0) > 0$ を仮定し, $f_{332}(0) = f_{3320}^2$ とおく. $f_{332}(0) < 0$ の場合は $f_{332}(0) = -f_{3320}^2$ とおくことで同様に計算できる. さらに, $S(f_n^s) \neq \emptyset$ であることと $s \leq 0$ は同値であるため $s = -\tilde{s}^2$ とおく.

3.1 特異点の座標

定理 3.1. $(u, v) \in S(f_n^s)$ ならば $v = 0$ であり, さらに, u は $\tilde{s}$ に依存する. この u を $u(\tilde{s})$ と書く. と特異点の座標は,

$$\begin{aligned} u(\tilde{s}) = & \frac{1}{f_{3320}}\tilde{s} + \frac{1}{2f_{3320}^4}\left(f_{331}(0)f_{3320}^2 - f_{333}(0)\right)\tilde{s}^2 \\ & + \frac{1}{8f_{3320}^7}\left(f_{3320}^4(f_{331}(0))^2 + 4f_{332}'(0)\right) \\ & - 2f_{3320}^2(3f_{331}(0)f_{333}(0) + 2f_{334}(0, 0)) + 5f_{333}(0)^2\tilde{s}^3 + O_{\tilde{s}}(4) \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる.

$\tilde{s} \neq 0$ ならば f_n^s は点 $(u(\pm\tilde{s}), 0)$ でホイットニー傘である.

3.2 2 次の不変量

また, ホイットニーの傘の幾何学的不変量として以下が知られている.

定理 3.2. [3] 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ がホイットニーの傘であるとする. $\ker df_0 = \langle \partial_v \rangle$ である (u, v) に対して, $|f_u, f_{uv}, f_{vv}| > 0$ ならば (1.1) 内の不変量は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} a_{20} &= \frac{|f_u \times f_{vv}|}{4|f_u|^3|f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2}(|f_u, f_{uu}, f_{vv}|^2 + 4|f_u, f_{uv}, f_{vv}||f_u, f_{uv}, f_{uu}|) \\ a_{11} &= \frac{1}{2|f_u||f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2}\left(2|f_u, f_{uv}, f_{vv}|\begin{vmatrix} f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_{uv} \\ f_{vv} \cdot f_u & f_{vv} \cdot f_{uv} \end{vmatrix} - |f_u \times f_{vv}|^2|f_u, f_{uu}, f_{vv}|\right) \\ a_{02} &= \frac{|f_u||f_u \times f_{vv}|^3}{|f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2} \end{aligned}$$

点 $(u(\tilde{s}), 0)$ における a_{20}, a_{11}, a_{02} を考えると, これらは $\tilde{s}$ の関数とみなすことができる. これを $a_{20}(\tilde{s}), a_{11}(\tilde{s}), a_{02}(\tilde{s})$ と書く. ここで, $\lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} |f_u, f_{uv}, f_{vv}|(u(\tilde{s}), 0) = 0$ となることに注意すると, これらの関数は一般には $S_1^\pm$ 特異点において発散する. したがって, 以下の定理を得る.

定理 3.3. (2.1) の変形にあらわれるホイットニーの傘の (3.1) における不変量 a_{20}, a_{11}, a_{02} は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} a_{20}(\tilde{s}) &= \frac{1}{\tilde{s}^2} \left(\frac{f_{31}^2(0)}{2f_{3320}^2} - \frac{2f_{31}(0)(f_{31}(0)f_{333}(0) - f_{3320}^2((f_{31})_u(0) - (f_{32})_u(0,0,0)f_{21}(0)))}{f_{3320}^5} \tilde{s} + O_{\tilde{s}}(2) \right) \\ a_{11}(\tilde{s}) &= \frac{1}{\tilde{s}^2} \left(\frac{f_{31}(0)}{2f_{3320}^2} - \frac{2f_{333}(0)f_{31}(0) - f_{3320}^2(3(f_{31})_u(0) - (f_{32})_u(0,0,0)f_{21}(0))}{2f_{3320}^5} \tilde{s} + O_{\tilde{s}}(2) \right) \\ a_{02}(\tilde{s}) &= \frac{1}{\tilde{s}^2} \left(\frac{1}{2f_{3320}^2} + O_{\tilde{s}}(1) \right) \end{aligned}$$

3.3 曲率線と 3 次の不変量

ここで, $s = 0$ のときを考える. すなわち, (2.1) において

$$f_n^0 = (u, u^2 f_{21}(u) + v^2, u^2 f_{31}(u) + v^2 f_{32}(u, v) + v f_{33}(u)) \quad (3.2)$$

と書ける. $f_{33}(0) = 0$ より, $f_{33}(u) = u f_{331}(u)$ とおく. [2] によつて, $(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とすると, (r, θ) の関数として特異点を越えて法線ベクトルが定義できることが知られているため, 以下のよう曲率線を考えることができる. E, F, G を第一基本形式の係数, L, M, N を第二基本形式の係数とし,

$$\omega_{lc} = (LF - EM)du^2 + (GL - EN)/2dudv + (MG - FN)dv^2,$$

を考える. $X = x\partial_u + y\partial_v$ とし $\omega_{lc}(X, X) = 0$ のとき X を ω_{lc} の解という. $\omega_{lc}(X, X) = 0$ と X が主方向であることは必要十分である. さらに, $a = LF - EM = a_0 + a_1 r + O_r(2)$ とおくと,

$$a_0 = -\cos \theta \sin \theta ((f'_{331}(0) - 3(f_{32})_v(0,0)) \cos 2\theta + f'_{331}(0) + 3(f_{32})_v(0,0) + 2(f_{32})_u(0,0) \sin 2\theta)$$

と計算できる. このとき, $a_0 = 0$ となる θ 上で $r \rightarrow 0$ のとき, 主方向は $(\partial_r, \partial_\theta)$ であり, $a_0 \neq 0$ となる θ 上で $r \rightarrow 0$ のとき, 主方向は $(\partial_r, -4 \cos \theta f_{331}(0) \partial_r + a_0 \partial_\theta)$ である. ゆえに, 収束方向は a_0 が 0 が否かに依存する. また, $a_0 \neq 0$ のとき, f_n^0 の 3 次の量が意味をもつ.

ここでは, 以下のように adapted, strongly adapted, most strongly adapted ベクトル場を取るのが便利である. 以下の adapted ベクトル場に対して, 写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が $\xi f \times \eta \eta f \neq 0$ を満たすとする. (これは, 2-ジェットが $(u, v^2, 0)$ または (u, v^2, uv) という条件と同値である). このとき, $(\mathbf{R}^2, 0)$ 上のベクトル場の組 (ξ, η) が adaptd とは, 原点で以下の (a), (b) を満たすことをいい, strongly adapetd とは, 原点で以下の (a), (b), (c) を満たすことをいい, most strongly adapted とは, 原点で以下の (a), (b), (c), (d) を満たすことをいう.

(a) η が退化ベクトル場である

(b) ξ は η と横断的である

(c) $\xi f \cdot \eta \eta f = 0$ である

(d) $\eta \xi f = \xi \eta f$ である

このとき,

$$\widetilde{f_{32\eta}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3|f_\xi||f_{\eta\eta}|^{\frac{5}{2}}} \left(|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}| - \frac{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|(f_\xi \cdot f_{\eta\eta})}{|f_\xi|^2} \right)$$

は adapted ベクトル場の取り方に依らない.

$$\begin{aligned} \widetilde{f_{32\xi}} = & \frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|}{|f_{\eta\eta}|^2 |f_\xi|^{\frac{8}{3}}} \left(\frac{|f_\xi|^{\frac{2}{3}} |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|}{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{2f_\xi \cdot f_{\xi\eta}}{|f_\xi|^{\frac{4}{3}}} \right. \\ & + \frac{|f_\xi|^{\frac{2}{3}} |f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{2|f_\xi|^{\frac{2}{3}} |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}| |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} \\ & \left. + \frac{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi|^{\frac{4}{3}} |f_{\eta\eta}|^2 |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} X \right) \end{aligned}$$

は strongly adapted ベクトル場の取り方に依らない.

$$\begin{aligned} \widetilde{f_{331\xi}} = & \frac{2^{\frac{3}{2}} |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|}{|f_{\eta\eta}|^{\frac{3}{2}} |f_\xi|^3} \left(\frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi\eta}|}{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}| |f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} \right. \\ & - \frac{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}| |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta\eta}|}{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} + \frac{(f_\xi \cdot f_{\xi\eta}) |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}|}{|f_\xi|^2 |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} \\ & + \frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}| |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}|^2}{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^3} + \frac{|f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\xi\eta\eta}|}{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{f_\xi \cdot f_{\xi\xi}}{|f_\xi|^2} \\ & - \frac{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{2|f_\xi|^4 |f_{\eta\eta}|^4 |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^3} X^2 \\ & + \frac{3}{|f_\xi|^{\frac{8}{3}} |f_{\eta\eta}|^2 |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} X \left(\frac{|f_\xi|^{\frac{2}{3}} |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta\eta}|}{|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{2f_\xi \cdot f_{\xi\eta}}{|f_\xi|^{\frac{4}{3}}} \right. \\ & + \frac{|f_\xi|^{\frac{2}{3}} |f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|} - \frac{2|f_\xi|^{\frac{2}{3}} |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}| |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} \\ & \left. \left. + \frac{2|f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\eta}|}{3|f_\xi|^{\frac{4}{3}} |f_{\eta\eta}|^2 |f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}|^2} X \right) \right) \end{aligned}$$

は most strongly adapted ベクトル場の取り方に依らない.

ただし,

$$X = 2|f_\xi, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta}| \begin{vmatrix} |f_\xi|^2 & f_\xi \cdot f_{\xi\eta} \\ f_{\eta\eta} \cdot f_\xi & f_{\eta\eta} \cdot f_{\xi\eta} \end{vmatrix} - |f_\xi \times f_{\eta\eta}|^2 |f_\xi, f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}|$$

である.

写像芽 f が (3.2) の形で書かれていると,

$$\widetilde{f_{32\eta}} = (f_{32})_\eta(0, 0), \quad \widetilde{f_{32\xi}} = (f_{32})_\xi(0, 0), \quad \widetilde{f_{331\xi}} = (f_{331})_\xi(0)$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] J. W. Bruce, and J. M. West, *Function on a cross cap*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **123** (1998), 19-39.
- [2] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella -a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35-67.

- [3] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, Sel. Math. New Ser. **20** (2014), 769-785.
- [4] D. Mond, *On the classification of germs of maps from $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}^3$* , Proc. London Math. Soc. **50**, (1985), 333-369.